Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. V. Ignat'eva, A special representation of functions of several variables,
Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ., 1959, Issue 186, 235–244

https://www.mathnet.ru/eng/uzmu16

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.170
December 14, 2025, 07:20:07

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ МГУ
Вып. 186, Математика, т. IX

А. В. ИГНАТЬЕВА

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция достаточно гладкая в некоторой области.

При решении задач математической физики часто оказывается полезным следующее представление функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{N\to\infty} \int_{\Sigma} \varphi_N(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n)\, d\sigma, \qquad (1)$$

где Σ — сфера $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1$, $d\sigma$ — элемент площади этой сферы.

Обычно для такого представления используют многократный интеграл Фурье, в связи с чем на функцию приходится накладывать целый ряд ограничений (достаточная гладкость, необходимость доопределения функции во всем пространстве с определенным поведением ее в бесконечности).

В настоящей работе дается элементарный способ представления функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде (1), пригодный при сравнительно малых ограничениях, а также приводится пример на применение такого представления к решению задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами гиперболического типа.

Пусть теперь $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, непрерывная и ограниченная в некоторой области D.

Докажем следующее предложение:

Существует последовательность функций

$$\varphi_1(z, p_1, p_2, \ldots, p_n),\ \varphi_2(z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots, \varphi_N(z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots,$$

непрерывных при $|z| \leqslant d$ *(*d *— диаметр области* D*) и* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *удовлетворяющих условию* $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1$, *и таких, что последовательность*

$$f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{\Sigma} \varphi_N(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, d\sigma$$

---

* В настоящей заметке публикуется часть результатов, полученных в моей кандидатской диссертации, написанной под руководством проф. М. А. Крейнеса. Пользуюсь случаем выразить проф. М. А. Крейнесу свою признательность за советы и указания.

сходится к $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равномерно в любой замкнутой области D', лежащей внутри области D.

Для доказательства достаточно построить положительное ядро $K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, имеющее вид

$$K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \int_\Sigma \psi_N(u_1p_1 + u_2p_2 + \ldots + u_np_n)\, d\sigma. \qquad (2)$$

Действительно, если $K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ найдено, то мы можем в качестве последовательности $\varphi_N(z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ взять последовательность

$$\varphi_N(z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \iint_D f(s_1, s_2, \ldots, s_n)\, \psi_N(p_1s_1 + p_2s_2 + \ldots + p_ns_n - z)\, dS, \quad N = 1, 2, 3, \ldots,$$

так как, полагая

$$f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_\Sigma \varphi_N(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, d\sigma,$$

мы получаем, что

$$f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \iint_D f(s_1, s_2, \ldots, s_n)\, K_N(s_1 - x_1, s_2 - x_2, \ldots, s_n - x_n)\, dS$$

и $\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равномерно в любой замкнутой области D', лежащей внутри области D.

Дадим способ построения положительных ядер $K_N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, указанного вида (2).

Неотрицательная, определенная во всем пространстве R_n функция $\Phi_N(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, будет ядром, если

$$\lim_{N\to\infty} \iint_K \Phi_N(u_1, u_2, \ldots, u_n)\, dS = 1$$

для любого шара K с центром в точке $(0, 0, \ldots, 0)$. В полярных координатах $u_i = tp_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2 = 1$, $t = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$, ρ—радиус шара K, это условие запишется в виде:

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Sigma d\sigma \int_0^\rho t^{n-1}\Phi_N(tp_1, tp_2, \ldots, tp_n)\, dt = 1 \qquad (3)$$

для любого $\rho > 0$.

В силу того, что искомое ядро есть некоторая функция расстояния t:

$$K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overline{K}_N(t), \quad \text{а} \quad \int_\Sigma d\sigma = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

условие (3) в этом случае сведется к следующему

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\rho t^{n-1}\overline{K}_N(t)\, dt = 1 \quad \text{для любого } \rho > 0.$$

Отсюда следует, что для получения положительного ядра $K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ достаточно потребовать, чтобы функции

$$H_N(t) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} \overline{K}_N(t), \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

были неотрицательными и обладали следующим свойством

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\rho H_N(t)\,dt = 1 \quad \text{для любого } \rho > 0.$$

Такого рода последовательность функций $\{H_N(t)\}$ будем называть правосторонним положительным ядром.

Таким образом, для определения функций $\psi_N(z)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, которые, без ограничения общности, можно предполагать четными, имеем уравнение

$$H_N(t) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} \int_\Sigma \psi_N(u_1p_1 + u_2p_2 + \ldots + u_np_n)\,d\sigma, \tag{4}$$

где $\{H_N(t)\}$ — любое правостороннее положительное ядро, имеющее в точке $t = 0$ нуль кратности $n - 1$.

Полагая $u_1 = t$, $u_2 = u_3 = \ldots = u_n = 0$ и делая замену переменных под знаком интеграла

$$u_1 = t\beta_1, \quad u_2 = t\sqrt{1-\beta_1^2}\,y_2, \quad u_3 = t\sqrt{1-\beta_1^2}\,y_3, \ldots, \quad u_n = t\sqrt{1-\beta_1^2}\,y_n,$$

уравнение (4) можно привести к более простому

$$H_N(t) = \frac{4(\sqrt{\pi})^{2n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-\beta_1^2)^{\frac{n-3}{2}} \psi_N(t\beta_1)\,d\beta_1,$$

которое в свою очередь с помощью подстановки $\beta_1 = \cos\alpha$ преобразуется окончательно в уравнение

$$H_N(t) = \frac{8(\sqrt{\pi})^{2n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\alpha\, \psi_N(t\cos\alpha)\,d\alpha. \tag{5}$$

В случае, если $H_N(t)$ имеет непрерывную производную порядка $n-1$, решение уравнения (5) может быть представлено в виде

$$\psi_N(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{4(\sqrt{\pi})^{2n+1}[(n-3)!!]^2} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\beta\cos\beta\, H_N^{(n-1)}(t\cos\beta)\,d\beta \tag{6}$$

при n четном и

$$\psi_N(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{8(\sqrt{\pi})^{2n-1}[(n-3)!!]^2} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\beta\cos\beta\, H_N^{(n-1)}(t\cos\beta)\,d\beta \tag{7}$$

при n нечетном.

Действительно, подставляя $\psi_N(t)$, определенное, например, формулой (6) в уравнение (5), получаем

$$\frac{8(\sqrt{\pi})^{2n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\alpha\psi_N(t\cos\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \frac{2}{\pi[(n-3)!!]^2} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\alpha \left\{ \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\beta\cos\beta H_N^{(n-1)}(t\cos\alpha\cos\beta)\,d\beta \right\} d\alpha \underset{x=t\cos\beta}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi[(n-3)!!]^2} \int_0^t \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\alpha \left(\sqrt{t^2-x^2}\right)^{n-3} x H_N^{(n-1)}(x\cos\alpha)\,d\alpha dx \underset{y=x\cos\alpha}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi[(n-3)!!]^2} \int_0^t \int_0^x \left[\frac{\sqrt{(x^2-y^2)(t^2-x^2)}}{x}\right]^{n-3} H_N^{(n-1)}(y)\,dydx =$$

$$= \frac{2}{\pi[(n-3)!!]^2} \int_0^t H_N^{(n-1)}(y) \left\{ \int_y^t \left[\frac{\sqrt{(x^2-y^2)(t^2-x^2)}}{x}\right]^{n-3} dx \right\} dy, \qquad (8)$$

и так как

$$\int_y^t \left[\frac{\sqrt{(x^2-y^2)(t^2-x^2)}}{x}\right]^{n-3} dx = \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\frac{\pi}{2}(t-y)^{n-2},$$

то с помощью $n-1$-кратного интегрирования по частям находим, что первый член цепочки равенств (8) равен $H_N(t)$.

Аналогично проводится доказательство для случая, когда n есть нечетное число.

Отметим, что полученное решение уравнения (5) в классе функций, имеющих непрерывные производные до порядка $n-1$ включительно, единственно.

Таким образом, взяв любое положительное правостороннее ядро $H_N(t)$, имеющее непрерывную $n-1$-ую производную, для которого точка $t=0$ является нулем кратности $n-1$, мы можем построить положительное ядро

$$K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{4(\sqrt{\pi})^{2n+1}[(n-3)!!]^2} \int_\Sigma \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\beta\cos\beta H_N^{(n-1)}[(u_1p_1 + u_2p_2 + \ldots + u_np_n)\cos\beta]\,d\beta d\sigma$$

в случае четного n и

$$K_N(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{8(\sqrt{\pi})^{2n-1}[(n-3)!!]^2} \int_\Sigma \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\beta\cos\beta H_N^{(n-1)}[(u_1p_1 + u_2p_2 + \ldots + u_np_n)\cos\beta]\,d\beta d\sigma$$

в случае n нечетного, а это и дает решение поставленной задачи.

Приведем теперь примеры на применение полученного результата к решению дифференциальных уравнений с частными производными,

1. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au, \tag{9}$$

где a_{ij}, a_i, a — постоянные числа, такие, что при $h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2 \neq 0$, $\sum\limits_{i,j} a_{ij} h_i h_j > 0$. Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$u'_t(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где Φ_1 и Φ_2 достаточно гладкие функции, заданные в некоторой области D.

Представим начальные данные в виде

$$\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Sigma} \varphi_{N,i}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, d\sigma, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

При надлежащем выборе ядра $H_N(t)$ функции $\varphi_{N,i}(z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $i = 1, 2$, имеют в области D достаточное число производных и, кроме того, равенство (10) можно дифференцировать достаточное число раз по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

При таких предположениях для приближенного решения задачи Коши уравнения (9), в силу корректности постановки задачи для этого уравнения достаточно найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_N(z, t, p_1, p_2, \ldots, p_n)}{\partial t^2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j\right) \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial z^2} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right) \frac{\partial \varphi_N}{\partial z} + a\varphi_N, \tag{11}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_N(z, 0, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \varphi_{N,1}(z, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\varphi'_{N_t}(z, 0, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \varphi_{N,2}(z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1,$$

где

$$z_0 = \min_{\{x_i\} \in D} (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n),$$
$$z_1 = \max_{\{x_i\} \in D} (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n).$$

Обозначим для краткости

$$\lambda^2(p_i) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j, \quad \beta(p_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i;$$

тогда уравнение (11) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial t^2} = \lambda^2(p_i) \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial z^2} + \beta(p_i) \frac{\partial \varphi_N}{\partial z} + a\varphi_N. \tag{12}$$

Произведя затем замену переменных

$$\varphi_N(z, t, p_i) = e^{-\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)} z} v_N(z, t, p_i),$$

$$z-\lambda(p_i)t=z',\quad z+\lambda(p_i)t=t',$$

получим уравнение

$$\frac{\partial^2 v_N}{\partial z'\partial t'}+c(p_i)v_N=0,\ \text{где}\ c(p_i)=\frac{1}{4\lambda^2(p_i)}\left[a-\frac{\beta^2(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}\right],\qquad(13)$$

и задачу Коши для уравнения (12) можно свести к следующей.

Найти интеграл уравнения (13), зная значения частных производных $\frac{\partial v_N}{\partial t'}$ и $\frac{\partial v_N}{\partial z'}$ во всех точках некоторой дуги и значение самого интеграла в некоторой точке этой дуги. Применяя для решения этой задачи, например, метод Римана [1], получим, что

$$v_N(z,t,p_i)=\frac{e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}z}\left[e^{-\frac{\beta(p_i)}{2\lambda(p_i)}t}\varphi_{N,1}(z-\lambda(p_i)t,p_i)+e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda(p_i)}t}\varphi_{N,2}(z+\lambda(p_i)t,p_i)\right]}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{z-\lambda(p_i)t}^{z+\lambda(p_i)t}\left\{\frac{1}{\lambda(p_i)}I_0\left[-c(p_i)((z-\mu)^2-\lambda^2(p_i)t^2)\right]e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}\mu}\varphi_{N,2}(\mu,p_i)+\right.$$

$$\left.+2e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}\mu}\varphi_{N,1}(\mu,p_i)c(p_i)\lambda(p_i)tI_0'\left[-c(p_i)((z-\mu)^2-\lambda^2(p_i)t^2)\right]\right\}d\mu,$$

где $I_0(v)$ — функция Бесселя индекса нуль. Возвращаясь к переменному φ_N, в силу ранее изложенных соображений, найдем

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\int\limits_{\Sigma}\frac{e^{-\frac{\beta(p_i)}{2\lambda(p_i)}t}\varphi_{N,1}(z-\lambda(p_i)t,p_i)+e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda(p_i)}t}\varphi_{N,2}(z+\lambda(p_i)t,p_i)}{2}d\sigma+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma}e^{-\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}z}d\sigma\int\limits_{z-\lambda(p_i)t}^{z+\lambda(p_i)t}\left[\frac{1}{\lambda(p_i)}I_0(v)e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}\mu}\varphi_{N,2}(\mu,p_i)+\right.$$

$$\left.\left.+2e^{\frac{\beta(p_i)}{2\lambda^2(p_i)}\mu}\varphi_{N,1}(\mu,p_i)c(p_i)\lambda(p_i)tI_0'(v)\right]d\mu\right\},$$

$$v=-c(p_i)[(z-\mu)^2-\lambda^2(p_i)t^2],\qquad(14)$$

где $z=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$.

Из формулы (14) непосредственно ясно, что для определения решения уравнения (9) в точке $(0,0,\ldots,0,t_0)$ нужно знать $\varphi_{N,1}(z,p_i)$, $\varphi_{N,2}(z,p_i)$, $N=1,2,3,\ldots$, на отрезке $[-\lambda(p_i)t_0,\ \lambda(p_i)t_0]$, т. е. область D должна содержать область D', для которой $|x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n|\leqslant\lambda(p_i)t_0$ при всех $\{p_i\}$, удовлетворяющих условию $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2=1$; иными словами, должна содержать область D', границей которой служит огибающая семейства плоскостей

$$x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\lambda(p_i)t_0\qquad(15)$$

при условии

$$p_1^2+p_2^2+\ldots+p_n^2=1.$$

Считая один из параметров p_i функцией остальных, дифференцируя равенство (15) по независимым параметрам и разрешая получен-

ные уравнения относительно x_i, найдем параметрическое уравнение границы области D' в симметрично записанной форме

$$x_i = t_0 \frac{\partial \lambda (p_i)}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$\lambda (p_i) = \sqrt{\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j}, \quad p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1.$$

2. Рассмотрим теперь систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j + a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{16}$$

считая, для простоты, что a_{ij}^k, a_{ij}, a_i — постоянные числа.

Пусть система (1′) является системой гиперболического типа в смысле И. Г. Петровского [2], т. е. пусть она такова, что для всех $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1$ уравнение

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{11}^k p_k - \lambda & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{12}^k p_k \ldots\ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1N}^k p_k \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{21}^k p_k & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{22}^k p_k - \lambda \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2N}^k p_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{N1}^k p_k & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{N2}^k p_k \ldots\ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{NN}^k p_k - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

имеет действительные и различные корни. Найдем приближенное решение задачи Коши для начальных данных

$$u_i (0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где φ_i достаточно гладкие функции в некоторой области D.

Представим начальные данные в области D, пользуясь ранее полученной формулой

$$\varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{m \to \infty} \int_{\Sigma} \varphi_{i, m} (z, p_1, p_2, \ldots, p_n) d\sigma, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad z = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n,$$

и вместо решения задачи Коши для системы (16) решаем ту же задачу для системы

$$\frac{\partial u_{i, m}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k p_k \right) \frac{\partial u_{j, m}}{\partial z} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_{i, m} + a_i \tag{18}$$

при начальных данных

$$u_{i, m} (0, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \varphi_{i, m} (z, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad z_0 = \min_{\{x_i\} \in D} z, \quad z_1 = \max_{\{x_i\} \in D} z,$$

где p_i — фиксированы.

Решив эту систему, приближенное решение задачи Коши для системы (16) получим, интегрируя по единичной сфере $u_{i,m}$.

При надлежащем выборе ядра $H_m(t)$ в силу корректности постановки задачи Коши полученная последовательность интегралов будет сходиться к решению системы (16).

Положим для краткости $A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k p_k$; тогда система (18) запишется в виде

$$\frac{\partial u_{i,m}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(p_i) \frac{\partial u_{i,m}}{\partial z} + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_{i,m} + a_i.$$

Пусть $\lambda_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \lambda_1(p_i)$, $\lambda_2(p_i), \ldots, \lambda_N(p_i)$ — корни характеристического уравнения (17) и пусть числа k_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, являются нетривиальными решениями системы уравнений

$$\lambda_s(p_l) k_{sj} = \sum_{i=1}^{N} A_{ij} k_{si}, \quad s, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Введем новые неизвестные функции с помощью равенств

$$v_{s,m} = \sum_{j=1}^{N} k_{sj} u_{j,m}, \quad s = 1, 2, \ldots, N.$$

Имеем

$$\frac{\partial v_{s,m}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} k_{sj} \frac{\partial u_{j,m}}{\partial t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} k_{sj} \left(\sum_{i=1}^{N} A_{ji} \frac{\partial u_{i,m}}{\partial z} + \sum_{i=1}^{N} a_{ji} u_{i,m} + a_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} k_{sj} A_{ji} \right) \frac{\partial u_{i,m}}{\partial z} + \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} k_{sj} a_{ji} \right) u_{i,m} + \sum_{j=1}^{N} k_{sj} a_j =$$

$$= \lambda_s(p_i) \frac{\partial v_{s,m}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta} \sum_{r=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} k_{sj} a_{ji} D_{ri} \right) V_{k,m} + \sum_{j=1}^{N} k_{sj} a_j,$$

где $\Delta = |k_{ij}|$, D_{ri} — алгебраическое дополнение элемента k_{ri}. Таким образом, решение системы (18) свелось к решению системы

$$\frac{\partial v_{s,m}}{\partial t} = \lambda_s(p_i) \frac{\partial v_{s,m}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta} \sum_{r=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} k_{sj} a_{ji} D_{ri} \right) v_{r,m} + \sum_{j=1}^{N} k_{sj} a_j \quad (19)$$

с начальными условиями

$$v_{s,m}(0, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{N} k_{sj} \varphi_{j,m}(z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \; s = 1, 2, \ldots, N.$$

Но для решения системы (19) применим метод, изложенный в [2], причем дело упрощается тем, что характеристики системы (19) есть прямые линии с угловыми коэффициентами $k_i = -\frac{1}{\lambda_i(p_s)}$.

Предполагая, что числа $\lambda_i(p_s)$ перенумерованы в порядке возрастания

$$\lambda_1(p_s) < \lambda_2(p_s) < \ldots < \lambda_N(p_s)$$

(кстати отметим, что этот порядок сохранится при всех $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1$, в силу непрерывной зависимости корней характеристического уравнения от коэффициентов и гиперболичности системы в узком смысле), пользуясь методом И. Г. Петровского [2], найдем решение системы (19), а значит и (16), в треугольнике, ограниченном осью z и двумя характеристиками L_1 и L_N.

Для окончания рассуждений покажем, где нужно задать начальные данные $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (область D'), чтобы определить решение u в точке (для простоты) $(0, 0, \ldots, 0, t_0)$ предложенным методом. Очевидно, что

$$u_i(0, 0, \ldots, 0, t_0) = \lim_{m\to\infty} \int_{\Sigma} u_{i,m}(0, t_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, d\sigma,$$

т. е. для того, чтобы получить $u_i(0, 0, \ldots, 0, t_0)$, нужно знать $u_{i,m}(0, t_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ для всех $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Для определения же $u_{i,m}(0, t_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, при фиксированных $p_1, p_2, \ldots, p_n$, нужно задать начальные данные на отрезке оси z, заключенном между точками пересечения характеристик L_1 и L_N (проведенных из точки $(0, t_0)$) с осью z.

Уравнения характеристик L_1 и L_N будут соответственно

$$t - t_0 = -\frac{1}{\lambda_1(p_s)} z, \quad t - t_0 = -\frac{1}{\lambda_N(p_s)} z,$$

и, следовательно, начальные данные нужно задать на отрезке $[\lambda_1(p_s) t_0, \lambda_N(p_s) t_0]$.

Отсюда следует, что область D должна быть такова, чтобы она содержала подобласть D', координаты точек которой удовлетворяют неравенствам

$$t_0\lambda_1(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \leqslant t_0 \lambda_N(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

для всех $p_1, p_2, \ldots, p_n$, для которых $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 1$.

Замечание. Все рассуждения повторяются в случае, если

$$a_{ij}^k = a_{ij}^k(t), \quad a_{ij} = a_{ij}(t), \quad a_i = a_i(t),$$

только определение области D' в этом случае усложняется.

Для ее определения можно поступить следующим образом. Через точку $(0, t_0)$ проведем характеристики L_1 и L_N. Для нахождения их уравнений решим уравнения

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{\lambda_1(p_s, t)} \quad \text{и} \quad \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{\lambda_N(p_s, t)}$$

с начальными данными $t_0 = t(0)$. Пусть решениями будут функции

$$t = t_1(z, p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0) \quad \text{и} \quad t = t_N(z, p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0).$$

Разрешив далее соотношения

$$t_1(z, p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0) = 0 \quad \text{и} \quad t_N(z, p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0) = 0$$

относительно z, получим

$$z_1 = f_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0) \text{ и } z_N = f_N(p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0).$$

Координаты точек области D' будут удовлетворять неравенствам

$$f_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0) \leqslant x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \leqslant f_N(p_1, p_2, \ldots, p_n, t_0)$$

для всех p_i, $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1. М.—Л., 1933.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.—Л., 1950.

Статья поступила в редакцию 11. III 1955 г.