А. Б. Самаров, О существовании решения краевых задач для уравнения $y'' = f(t, y)$ с разрывной правой частью, *Изв. вузов. Матем.*, 1969, номер 4, 74–76

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1969 МАТЕМАТИКА № 4 (83)

УДК 517.91

А. Б. Самаров

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $y''=f(t, y)$ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В последнее время появился ряд работ, например, [1] — [3], в которых рассматриваются нелинейные интегральные уравнения с разрывным оператором. В основном, эти работы посвящены следующим вопросам: определение решения уравнения с разрывным оператором, существование и единственность решения, теоремы об интегральных и дифференциальных неравенствах, которые позволяют установить некоторые важные в приложениях оценки.

В настоящей заметке методом интегральных неравенств изучен вопрос о существовании решения следующих краевых задач:

$$y(0)=y(h)=0, \tag{1}$$

$$y(0)=y'(h)=0, \tag{2}$$

$$y'(0)=y'(h)=0 \tag{3}$$

для уравнения

$$y''=f(t, y). \tag{4}$$

Функция $f(t, y)$ определена почти всюду в области $D\{0\leqslant t\leqslant h, -\infty<B\leqslant y\leqslant A<+\infty\}$, причем $A>0$, $B<0$; $f(t, y)$ измерима и почти везде ограничена в области $D\,(f(t, y)\in \tilde{M})$ и, вообще говоря, не является непрерывной по y.

Дифференциальное уравнение с указанными краевыми условиями сведем к интегральному уравнению

$$y(t)=\int_0^h G(t, s)f(s, y(s))\,ds \tag{5}$$

с разрывным оператором ($G(t, s)$ — функция Грина). Решение уравнения (5) будем понимать в следующем смысле [1]. Решением уравнения (5) будем называть непрерывную функцию $y(t)\,(B\leqslant y(t)\leqslant A)$, для которой имеет место

$$y(t)=\int_0^h G(t, s)R(s)\,ds, \tag{6}$$

причем

$$m_y\{f(s, y(s))\}\leqslant R(s)\leqslant M_y\{f(s, y(s))\},$$

где

$$M_y\{f(s, y)\} = \lim_{\delta\to 0} \inf_{\mu N=0} \sup_{z\in R(x,\delta)-N} f(s, z),$$

$$m_y\{f(s, v)\} = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\mu N=0} \inf_{z\in R(x,\delta)-N} f(s, z)$$

и $R(x, \delta)$ есть δ-окрестность точки x.

В [1] указано, что интегральное уравнение (5) при данном определении решения и соответствующая краевая задача эквивалентны.

Сделаем некоторые замечания и введем обозначения:

а) функция Грина двухточечной задачи для уравнения второго порядка отрицательна при t, $s\in(0, h)$;

б) $f(t, y)$ удовлетворяет условию L_2 Н. В. Азбелева [3], т. е.

$$f(t, y) = k^2y + N(t, y), \tag{7}$$

где $N(t, y)$ не возрастает по y;

в) обозначим:

$$\alpha = \inf_{0\leqslant t\leqslant h} m_y\{f(t, A)\} - k^2A, \tag{8}$$

$$\beta = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} M_y\{f(t, B)\} - k^2B. \tag{9}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $\alpha > 0$ *и* β *таково, что*

$$-\beta(1 - e^{kh/2})^2/k^2(1 + e^{kh}) > B, \tag{10}$$

то задача (1) — (4) *имеет решение* $y(t)$, *причем* $B \leqslant y(t) \leqslant A$.

Доказательство. Так как $f(t, y)$ удовлетворяет условию L_2, то ее рост ограничен сверху ростом линейной функции k^2y, но изменение y ограничено постоянными A и B, следовательно, $f(t, y)$ ограничено сверху. Условие $\alpha > 0$ обеспечивает ограниченность $f(t, y)$ снизу.

Ввиду невозрастания $N(t, y)$ по y имеем следующие неравенства:

$$0 < \alpha = \inf_{0\leqslant t\leqslant h} (m_y f(t, A) - k^2A) = \inf_{0\leqslant t\leqslant h} m_y\{N(t, A)\} \leqslant$$
$$\leqslant m_y\{N(t, A)\} \leqslant M_y\{N(t, B)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant h} M_y\{N(t, B)\} = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} (M_y\{f(t, B) - k^2B\}) = \beta. \tag{11}$$

Следовательно, $\beta > 0$. Очевидно,

$$A > -\alpha(1 - e^{kh/2})^2/(1 + e^{kh}). \tag{12}$$

Ввиду (7) задачу (1) — (4) можно представить в следующем виде:

$$y'' - k^2y = N(t, y),\ y(0) = y(h) = 0. \tag{13}$$

Если $G(t, s)$ — функция Грина задачи

$$y'' - k^2y = 0,\ y(0) = y(h) = 0, \tag{14}$$

то (13) эквивалентно следующему интегральному уравнению [1]:

$$y(t) = \int_0^h G(t, s) N(s, y(s))\, ds. \tag{15}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$v'' - k^2v = 1,\quad v(0) = v(h) = 0. \tag{16}$$

Очевидно, $v = \int\limits_0^h G(t, s)\,ds$ — решение (16). Так как

$$v = (e^{kt} + e^{k(h-t)} - e^{kh} - 1)/k^2(1 + e^{kh}), \tag{17}$$

то

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant h} v = -(1 - e^{kh/2})^2/k^2(1 + e^{kh}) < 0. \tag{18}$$

Из соотношений (7) — (9) и невозрастания $N(t, y)$ по y следует, что $m_y\{N(t, y)\} \geqslant \alpha$, $M_y\{N(t, y)\} \leqslant \beta$. Ясно, что

$$A > \int\limits_0^h m_y\{G(t, s)N(s, A)\}\,ds. \tag{19}$$

(Правая часть неположительна, в то время как $A > 0$ по условию.)

Из (15) в силу (10) следует

$$B < \int\limits_0^h M_y\{G(t, s)N(s, B)\}\,ds. \tag{20}$$

Неравенства (19), (20), $A > B$, а также невозрастание $N(t, y)$ по y и отрицательный знак $G(t, s)$ обеспечивают выполнение условий теоремы об интегральных неравенствах; следовательно, уравнение (15) имеет решение в смысле [1], а потому имеет решение краевая задача (1) — (4) для уравнения с разрывной правой частью.

Аналогичные теоремы имеют место для задач (2) — (4) и (3) — (4). Доказываются они также, как теорема 1, поэтому ограничимся формулировками и некоторыми пояснениями.

Теорема 2. *Если* $\alpha > 0$ *и* β *таково, что*

$$-\beta(1 - e^{kh})/k^2(1 + e^{2kh}) > B, \tag{21}$$

то задача (2) — (4) *имеет решение* $y(t)$, *причем* $B \leqslant y(t) \leqslant A$.

Решение задачи

$$v'' - k^2 v = 1, \; v(0) = v'(h) = 0 \tag{22}$$

имеет вид

$$v = (e^{kt} + e^{k(2h-t)} - e^{2kh} - 1)/k^2(1 + e^{2kh}) \tag{23}$$

и

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant h} v = -(1 - e^{kh})^2/k^2(1 - e^{2hk}) < 0. \tag{24}$$

Теорема 3. *Если* $\alpha > 0$, *а* β *таково, что* $-\beta/k^2 > B$, *то задача* (3) — (4) *имеет решение* $y(t)$, *причем* $B \leqslant y(t) \leqslant A$.

Решение задачи

$$v'' - k^2 v = 1, \; v'(0) = v'(h) = 0 \tag{25}$$

имеет вид $v = -1/k^2$.

г. Челябинск

Поступило
6 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н. В., Ли Мун Су, Рагимханов Р. К. К вопросу об определении решения интегрального уравнения с разрывным оператором. ДАН СССР, т. 171, № 2, 1966.

2. Ли Мун Су. Об интегральных уравнениях Вольтерра с разрывным оператором. Автореф. канд. диссерт., Минск, 1966.

3. Азбелев Н. В. О задаче Чаплыгина. Автореф. докт. диссерт., Казань, 1961.