

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Смышляев, Рассеяние “почти вперед” на
гладком выпуклом конусе, *Зап. научн. сем. ЛО-*
МИ, 1991, том 195, 138–153

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

19 марта 2025 г., 18:40:53



РАССЕЯНИЕ "ПОЧТИ ВПЕРЕД" НА ГЛАДКОМ ВЫПУКЛОМ КОНУСЕ

При косом падении плоской волны на гладкий выпуклый конус произвольного сечения волновая картина позади препятствия имеет довольно сложный вид (рис.1).

В высокочастотном приближении благодаря отрасыванию тени во фронте \mathcal{F} падающей волны образуется вырез с вершиной в точке F , лежащей на луче падающей волны, проходящем через вершину конуса O . Этот луч

OF мы будем называть предельным. Вершина O порождает также дифракционную волну, фронт которой есть сфера \mathcal{S} с центром в O , касающаяся плоскости \mathcal{F} в точке F . Помимо того, имеется волна, отраженная освещенной частью

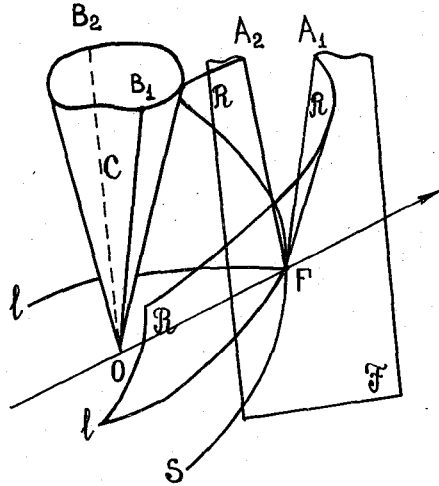


Рис.1

боковой поверхности конуса \mathcal{C} . Ее фронт \mathcal{R} есть поверхность, сосредоточенная между \mathcal{S} и \mathcal{F} и касающаяся \mathcal{F} вдоль краев FA_1, FA_2 секториального выреза. Кроме того, поверхность \mathcal{R} касается \mathcal{S} вдоль некоей замкнутой кривой l на сфере, которая гладка всюду, кроме точки F , в которой наблюдается излом (трансверсальное пересечение двух гладких кривых). Отвечающие излому два касательных вектора в F лежат в плоскости \mathcal{F} и ортогональны FA_1 и FA_2 соответственно. Внутри сектора A_1FA_2 находится зона тени, в которую помимо сферической волны могут проникать лишь волны соскальзывания, порожденные двумя семействами скользких лучей, касающихся \mathcal{C} вдоль образующих OB_1 и OB_2 . Полупрямые OB_1 и OB_2 , отделяющие освещенную часть поверхности \mathcal{C} от затененной, мы по традиции называем терминалами.

Если точка наблюдения не слишком близка к лучу OF , то для

построения высокочастотных асимптотик волнового поля можно привлечь те или иные известные приемы. Асимптотика отраженной волны вдали от $\Gamma A_1, \Gamma A_2$ и ℓ строится лучевым методом (см. напр. [1]). Если точка наблюдения близка к ΓA_1 или ΓA_2 , но достаточно удалена от Γ , то для построения соответствующих асимптотик мы можем применить теорию Фока и др. [2-5]. Асимптотика сферической волны вдали от ℓ имеет лучевой характер, отвечая центральному полю лучей, выходящих из вершины O . Задача об определении главного члена амплитуды может быть сведена или к задаче Дирихле в единичном шаре с коническим вырезом [6] или к вычислению ядра некоего оператора на подобласти единичной сферы N , которое можно выразить также в виде ряда по собственным функциям оператора Бельтрами-Лапласа на N [7, 8]. Вблизи кривой ℓ (на удалении от Γ), где смыкаются волновые фронты отраженной и сферической волн, можно построить асимптотику специального вида, выражающуюся через функции параболического цилиндра [6, 9].

Все перечисленные асимптотики рушатся при приближении к точке Γ , в которой смыкаются фронты всех перечисленных волн. Цель настоящей работы - построить локальную асимптотику волнового поля в окрестности точки Γ , которая сшивалась бы при удалении от Γ с вышеперечисленными асимптотическими разложениями. Мы сосредоточили внимание на принципиальных вопросах, опустив некоторые технические детали из-за недостатка места. Так, мы ограничились вычислением лишь первых членов асимптотик и не проводили до конца процедуру сращения. Отметим, что эти технические детали можно восстановить, не встречаясь с какими-либо принципиальными трудностями.

1. Постановка задачи и результаты. Пусть волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad (I)$$

в трехмерном евклидовом пространстве во внешности гладкого выпуклого конуса C , вершина которого O совпадает с началом координат $\vec{r} = 0$. Введем радиально-сферическую систему координат $\vec{r} = (r, \omega)$, где $r = |\vec{r}| \geq 0$ есть расстояние до вершины, а переменная $\omega = \vec{r}/r$, характеризующая направление, изменяется в пределах подмножества N двумерной единичной сферы, находящегося вне конуса C (рис.2). Выпуклость конуса C и гладкость его боковой поверхности эквивалентны гладкости границы ∂N многообразия N и его геодезической выпуклости.

Мы предполагаем, что на конус C из направления $\omega_0 \in N$ па-

дает плоская волна

$$u_0(r, \omega) = e^{-ikr \langle \omega, \omega_0 \rangle} = e^{-ikr \cos \theta(\omega, \omega_0)} \quad (2)$$

Здесь \langle, \rangle - скалярное произведение в трехмерном пространстве, θ - угол между векторами

$\hat{\omega}, \hat{\omega}_0$ или, что то же самое, геодезическое расстояние между точками $\hat{\omega}$ и $\hat{\omega}_0$ на сфере. В настоящей работе нас интересует случай "косого" падения, когда наряду с точкой $\hat{\omega}_0$ области N принадлежит также и ее антипод - точка $-\hat{\omega}_0$. Из геометрических соображений видно, что это соответствует в точности тем направлениям падения, при которых конус отбрасывает тень. Для нас существенно условие того, чтобы обе геодезические выходящие из $\hat{\omega}_0$ и касающиеся ∂N в точках $\hat{\omega}_1$ и $\hat{\omega}_2$ имели бы невырожденный порядок касания. Для этого достаточно потребовать, чтобы кривая ∂N имела на сфере отличную от нуля геодезическую кривизну. Сформулированное условие эквивалентно тому, что лучи падающей волны u_0 имеют невырожденное касание вдоль терминаторов OB_1, OB_2 , т.е. что вдали от вершины для скользящих лучей применима теория Фока.

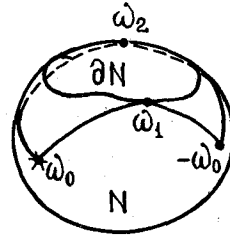


Рис.2

Мы требуем также, чтобы волновое поле u удовлетворяла на поверхности конуса S краевому условию Дирихле, т.е.

$$u(r, \omega) \Big|_{\omega \in \partial N} = 0. \quad (3)$$

Условия (1)-(3) необходимо также дополнить условиями в вершине и на бесконечности. Для корректной постановки задачи функцию $u(r, \hat{\omega})$ можно считать по определению пределом решений задачи о точечном источнике, помещенном в точку $(r_0, \hat{\omega}_0)$ при $r_0 \rightarrow \infty$ (см. [7, 8]).

Радiallyнная симметрия задачи (1)-(3) позволяет заключить, что функция $u(k, r, \hat{\omega}, \hat{\omega}_0)$ помимо сферических переменных зависит лишь от произведения $kr \equiv \lambda: u = u(\lambda, \hat{\omega}, \hat{\omega}_0)$. Нас интересует асимптотика при $\lambda \rightarrow \infty$, которую можно трактовать или как асимптотику на конечных расстояниях при больших k (высокочастотная асимптотика) или как асимптотику при фиксированных k при $r \rightarrow \infty$ (теория рассеяния).

Поскольку нас будут интересовать локальные асимптотики при $\hat{\omega}$ близких к $-\hat{\omega}_0$ (что соответствует окрестности точки F на

рис. 1), введем вблизи $-\omega_0$ сферическую систему координат $\omega = (\vartheta, \psi)$ так, чтобы $\vartheta(-\omega_0) = 0$ (полос), $0 \leq \psi \leq 2\pi$ - периодическая переменная. Поскольку ϑ мала, можно интерпретировать (ϑ, ψ) как полярные координаты в окрестности нуля некоей вспомогательной двумерной плоскости $z = (z_1, z_2)$:

$$z_1 = \vartheta \cos \psi, \quad z_2 = \vartheta \sin \psi.$$

В работе будет показано, что при ω близких к $-\omega_0$ (или при $z \rightarrow 0$) полное асимптотическое разложение волнового поля имеет структуру, качественно напоминающую асимптотику в окрестности предельного луча в задаче Фока (см. [3]). Именно, локальная асимптотика вблизи OF состоит из трех частей

$$u = u_F + u_B^1 + u_B^2. \quad (4)$$

Здесь u_F, u_B^1, u_B^2 - полные асимптотические разложения

$$u_F(\lambda, z) \simeq e^{i\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} F_j(\lambda^{1/2} z) \quad (5)$$

$$u_B^k(\lambda, z) \simeq e^{i\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-1/3-j/6} \Phi_j^{(k)}(c_k \lambda^{1/2} z_1, d_k \lambda^{1/6} z_2), \quad k=1,2 \quad (6)$$

$$c_k, d_k = \text{const.}$$

По аналогии с [3] часть u_F мы называем обобщенно-френелевой и она имеет такой же вид, как пограничный слой в случае подмены конуса S плоским сектором $B_1 O B_2$. Главное приближение есть обобщенный интеграл Френеля [10]

$$F_0(\lambda^{1/2} z_1, \lambda^{1/2} z_2) = F_0(\mu_1, \mu_2) = \iint_{00}^{\infty\infty} e^{i\frac{\xi^2}{2} + i\frac{\eta^2}{2} + i\beta\xi_1\xi_2 - i\xi_1\mu_1 - i\xi_2\mu_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (7)$$

Части u_B^1 и u_B^2 есть фоновые асимптотики, отвечающие терминаторам OB_1 и OB_2 соответственно; $(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})$ и $(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})$ есть соответствующим образом выбранные декартовы координаты на Z . Главное приближение Φ_0 есть двумерный аналог интеграла Фока:

$$\Phi_0(x, y) = \iint_{00}^{\infty\infty} e^{i\xi^2/2 - i\xi y + i\chi\xi} \xi^{1/3} \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)} \xi^{1/3} d\xi d\xi -$$

$$-\frac{1}{2i} e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta e^{i\xi^2/2 - i\xi\eta + i\lambda\xi\eta^{1/3}} \frac{W_2(\xi)}{W_1(\xi)} \eta^{1/3} d\eta d\xi.$$

При $\lambda^{1/2}z \rightarrow \infty$ в освещенной части (5) сливается с падающей волной, а (6) - с отраженной и каждая асимптотика - со сферической волной.

Отметим попутно, что термин "фоновая" в данном контексте не совсем точен (как и в контексте задачи [3]), поскольку фоновая часть мала по сравнению с френелевой лишь в самой узкой окрестности предельного луча ($|z| \lesssim k^{-1/2}$), становясь сравнимой с ней в более широкой окрестности точки - ω_0 .

В работе строится лишь локальная асимптотика (4)-(6), имеющая вышеописанную аналогию с [3]. Вопрос о наличии аналогии с идеями [4] и, значит, о возможности построения равномерной асимптотики остается открытым.

2. Полутеневые формулы вблизи ΓA_1 и ΓA_2 на удалении от Γ

Для последующего сраживания с асимптотикой в окрестности Γ наиболее важно проследить за трансформацией полутеневых формул для окрестности ΓA_1 и ΓA_2 (ср. [2,3,5]) при приближении точки наблюдения к Γ . Выпишем соответствующие формулы, используя построения [3, 5] с очевидными модификациями. Для этого необходимо воспроизвести нижеследующие построения для каждого из двух терминаторов.

Для терминатора OB_1 введем эвольвентную систему координат (τ, α, ρ) , ($\rho > 0$), связанную с поверхностью конуса C и падающей волной (рис.3). Для этого строится система лучей, касающихся C и параметризуемых парой чисел (α, ρ) . При $\alpha = 0$ соответствующий луч параллелен направлению OF падения волны u_0 и ρ - расстояние от точки касания M_ρ , лежащей на OB_1 , до вершины O . Чтобы построить лучи при $\alpha \neq 0$, нужно из точки M_ρ выпустить в обе стороны геодезическую на поверхности C , направленную в этой точке также параллельно OF . Луч с параметрами (α, ρ) касается этой геодезической в точке $M_{\rho\alpha}$, удаленной

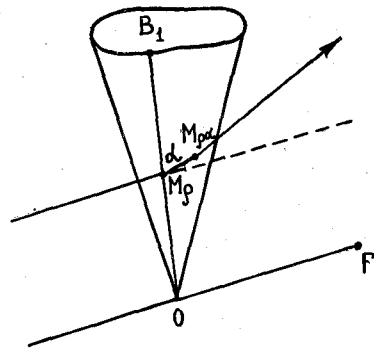


Рис.3

от M_p на геодезическое расстояние $|\alpha|$; при этом $\alpha > 0$ в затененной части и $\alpha < 0$ - в освещенной. По определению τ - эйконал данной системы лучей, причем на поверхности $C \tau = \alpha + \beta \rho$, где $\beta = -\cos \theta_1 = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_0$, где $\theta_1 \equiv \theta(\omega_0, \omega_1)$, $\vec{l} = \overline{OF}/|OF|$, $\vec{\tau}_0 = \overline{OM_p}/|OM_p| = \vec{\omega}_1$ (при данном определении $\tau = \tau_0$ на OB_1 , где $\tau_0 = \beta \rho$ есть эйконал падающей волны u_0).

При каждом фиксированном $\rho > \varepsilon > 0$ вблизи границы свет-ть $\alpha = 0$ для полученного поля можно построить полное асимптотическое разложение (ср. [3, 5]):

$$u = u_F + u_B \quad (8)$$

$$u_F \approx e^{ik\tau} \sum_{j=0}^{\infty} k^{-j/2} F_j(\tau, \rho, \eta), \quad \eta = 2^{-1/2} \alpha k^{1/2} \rho^{-1/2} \quad (9)$$

$$u_B \approx e^{ik\tau} \sum_{j=0}^{\infty} k^{-1/6-j/3} \varphi_j(\tau, \rho, \chi), \quad \chi = \alpha k^{1/3} \rho^{-2/3}. \quad (10)$$

Здесь каждое слагаемое u_F, u_B - ряд, являющий формальным решением уравнения (I). Быстроменяющаяся френелева часть u_F сращивается при $\eta \rightarrow -\infty$ с падающей волной; меняющаяся более медленно фоновая часть u_B при $\chi \rightarrow -\infty$ сращивается с отраженной волной.

Главное приближение u_F выражается через интеграл Френеля

$$F(t) = e^{-i\pi/4} \int_t^{+\infty} e^{i\xi^2/2} d\xi, \quad t = \eta \sqrt{\frac{\tau}{\rho \beta K_0}},$$

где $K_0 > 0$ - геодезическая кривизна кривой ∂N в точке ω_1 (рис.2).

Любопытно, что если рассматривать ρ как фиксированный параметр, то френелева асимптотика (9) на самом деле не зависит от кривизны K_0 и является одинаковой для разных препятствий, имеющих общую точку касания, с точностью до замены переменных $(\alpha_1, \tau_1) \rightarrow (\alpha_2, \tau_2)$ и соответствующих переразложений в (9). Более того, эта асимптотика в точности та же, что и в случае классической задачи Зоммерфельда, т.е. если конус заменить на полуплоскость, ограниченную прямой OB_1 .

Действительно, ряд (8) является формальным решением уравнения (I), переписанного в системе координат (τ, ρ, η) . Перейдем от переменных (τ, ρ, η) к аналогичным переменным, отвечающим полю лучей, дифрагирующих на ребре OB_1 (конус заменен на полуплоскость): (τ', ρ, χ) , где $\chi = \psi(k(\tau - \beta\rho))^{1/2}$. Здесь

луч с параметрами $(\rho, \Psi = 0)$ есть луч, касающийся ребра в точке M_ρ (рис.3); лучи с параметрами (ρ, Ψ) , $\Psi \neq 0$ исходят из той же точки M_ρ , составляют с осью OB_1 тот же угол θ_1 , и Ψ - угол поворота луча вокруг оси OB_1 ($\Psi > 0$ в области тени).

Несложные вычисления показывают, что при описанной замене переменных (9) переразложится в ряд

$$u_r \approx e^{ikr'} \sum_{j=0}^{\infty} k^{-j/2} \tilde{F}_j(r', \rho, \chi), \quad (9')$$

также являющийся формальным решением (I). Если записать далее уравнение Гельмгольца (I) в координатах (r', ρ, χ) и подставить в него (9'), получится рекуррентная система уравнений для \tilde{F}_j , дополненная условием срачивания с падающей плоской волной

$$u_0 = e^{ikr_0} = e^{ik\rho\rho + ik(\tau' - \beta\rho)\cos\Psi} \approx e^{ikr' - i\chi^2/2} \left(1 + \frac{i}{24} k^{-1} \tau'^{-1} \chi^4 + \dots\right)$$

при $\chi \rightarrow -\infty$. Не входя в технические подробности, отметим, что \tilde{F}_j определяются из этих условий однозначно и что \tilde{F}_0 выражается через интеграл Френеля. Подводя итог сказанному, заключаем, что переразложение (9') одно и то же для разных препятствий и поэтому ряды (9) одинаковы с точностью до замены переменных и переразложений.

Поскольку все сказанное в отношении френелевой части можно повторить применительно ко второму терминатору, возникает мысль искать асимптотику в окрестности F' в виде (4), где первое слагаемое соответствовало бы замене конуса на сектор и сшивалось бы с падающей волной, а также с (9) (для каждого терминатора) (см. п.3), второе и третье слагаемые сшивались бы с (10) соответственно для первого и второго терминатора (пп.4, 5).

Выпишем формулы для функций φ_j в (10) для фоновых асимптотик. Они могут быть получены из детального анализа возникающей рекуррентной системы уравнений для φ_j в переменных τ, ρ, δ (ср. [3, 5]):

$$\begin{aligned} \varphi_j(\delta, \rho, \tau) = & \rho^{2/3j+1/3} (\tau - \beta\rho)^{-j-1/2} I_{j,j}(\delta) + \rho^{2/3j-2/3} (\tau - \beta\rho)^{-j+1/2} I_{j,j-1}(\delta) + \\ & + \dots + \rho^{1/3-j/3} (\tau - \beta\rho)^{-1/2} I_{j,0}(\delta) + \rho^{1/3-j/3-2/3} (\tau - \beta\rho)^{1/2} I_{j,-1}(\delta) + \dots + \\ & + \rho^{1/3-j/3-[j/3]} (\tau - \beta\rho)^{-1/2+[j/3]} I_{j,[j/3]}(\delta). \end{aligned} \quad (II)$$

Здесь [...] обозначает целую часть, $I_{jk}(\delta) = I_{jk}^{(1)}(\delta) + I_{jk}^{(2)}(\delta)$ и

$$I_{jk}^{(s)}(\delta) = \int_{\mathcal{L}_s^1} e^{i\delta\zeta} Q_{ij}^{(s)}(\zeta) d\zeta, \quad s=1,2;$$

$\mathcal{L}_1^1 = (0, +\infty)$, $\mathcal{L}_2^1 = (0, +\infty e^{2\pi i/3})$ и $Q_{ij}^{(s)}$ - полином по ζ , а также $v(\zeta)/w_1(\zeta)$ ($s=1$) и $w_2(\zeta)/w_1(\zeta)$ ($s=2$). Здесь v, w_1, w_2 - функции Эйри (см. [5]).

Нулевое приближение (I0) выражается через специальную функцию Фока:

$$I_{00}(\delta) = \int_0^{+\infty} e^{i\delta\zeta} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{i\delta\zeta} \frac{w_2(\zeta)}{w_1(\zeta)} d\zeta. \quad (I2)$$

3. Обобщенно-френелева часть. В рамках метода пограничного слоя полное асимптотическое разложение френелевой части в окрестности предельного луча строится следующим образом. Во введенной в п. I сферической системе координат (r, ϑ, φ) уравнение Гельмгольца для функции $u = u(\lambda, \vartheta, \varphi)$ запишется в виде

$$(\lambda^2 \partial_\lambda^2 + 2\lambda \partial_\lambda + \lambda^2 + \partial_\vartheta^2 + ctg \vartheta \partial_\vartheta + \sin^{-2} \vartheta \partial_\varphi^2) u = 0.$$

Мы будем строить погранслоиную асимптотику при ω близких к $-\omega_0$ или, что то же самое, при $\vartheta \ll 1$. Роль большого параметра играет безразмерная переменная λ . Введем растянутую переменную

$$\eta = \vartheta \lambda^{1/2}$$

и будем искать асимптотику $u(\lambda, \omega)$ в виде

$$u_F(\lambda, \omega) = e^{i\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} F_j(\eta, \varphi). \quad (I3)$$

После элементарных преобразований получим следующую рекуррентную цепочку уравнений для F_j , $j=0,1,\dots$:

$$[\partial_\eta^2 + \eta^{-1} \partial_\eta + \eta^{-2} \partial_\varphi^2 + i\eta \partial_\eta + 2i] F_j = \mathcal{L}_j(F_0, \dots, F_{j-1}), \mathcal{L}_0 = 0. \quad (I4)$$

Здесь \mathcal{L}_j - определенные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами. Если переменные (η, φ) интерпретировать как полярные координаты на плоскости $Z = (x, y)$, $x = \eta \cos \varphi$,

$\psi = \eta \sin \Psi$, то уравнение для $F_0 \equiv F$ запишется в виде

$$\Delta_{\mathbf{z}} F + i \langle \mathbf{z}, \nabla_{\mathbf{z}} \rangle F + 2iF = 0. \quad (15)$$

Ряд (13) при определенных Ψ должен сшиваться с падающей волной когда $\eta \rightarrow +\infty$. Очевидно, на плоскости \mathbf{z} освещенной области соответствует секториальное множество $\{ \mathbf{z} = (\eta, \Psi) : \Psi_1 \leq \Psi \leq \Psi_2 \}$, где $\Psi = \Psi_1, \Psi = \Psi_2$ соответствуют FA_1 и FA_2 . Разложение вида (13) для падающей волны $u_0 = e^{-ikr \cos \theta}(\omega, \omega_0)$ строится элементарно

$$u_0 = e^{i\lambda} \times e^{-i\eta^2/2} \left\{ 1 + \frac{i}{24} \lambda^{-1} \eta^4 + \dots \right\}. \quad (16)$$

Анализируя уравнение (15), замечаем, что оно инвариантно по Ψ и допускает разделение переменных. Именно, в любой "повернутой" системе координат $(x', y') : x' = \eta \cos(\Psi - \Psi'), y' = \eta \sin(\Psi - \Psi')$ его частными решениями являются функции

$$F_1(x') = e^{-i/4 x'^2} D_{-2}(e^{-i\eta'/4} x') = \text{const} \int_0^{\infty} e^{i/2 \xi^2 - i\xi \eta \cos(\Psi - \Psi')} \xi d\xi$$

$$F_2(x') = e^{-i/4 x'^2} D_1(e^{i\eta'/4} x') = \text{const} \cdot e^{-i\eta^2/2 \cos^2(\Psi - \Psi')} \eta \cos(\Psi - \Psi').$$

Здесь D_λ - функции параболического цилиндра [II].

Условия срачивания с (7) заставляют взять суперпозицию по решениям первого типа:

$$F(\eta, \Psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i/2 \xi^2 - i\xi \eta \cos(\Psi - \Psi')} C(\Psi) \xi d\xi d\Psi.$$

Стационарная точка $\xi = \eta, \Psi = \Psi$ дает вклад

$$F_{\text{ст}}(\eta, \Psi) \sim e^{-i\eta^2/2} C(\Psi)$$

и, следовательно, необходимо положить $C(\Psi) = \begin{cases} 1, & \Psi_1 \leq \Psi \leq \Psi_2 \\ 0, & \Psi \notin [\Psi_1, \Psi_2] \end{cases}$

Окончательно получим

$$F(\eta, \Psi) = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \int_0^{\infty} e^{i/2 \xi^2 - i\xi \eta \cos(\Psi - \Psi')} \xi d\xi d\Psi \quad (17)$$

- обобщенный интеграл Френеля (7), записанный в полярных координатах [10].

Продолжая стандартным образом, можно получить вслед за (Г7) точные формулы для высших приближенных ряда (I3).

Легко заметить, что асимптотика (I3), (Г7) в точности та же, что и в методе Кирхгофа, примененном к задаче дифракции на секторе. Нетрудно установить [I2], что из (Г7) при $\eta \rightarrow \infty$ извлекаются наряду с падающей краевые и сферическая волны, что соответствует вкладам стационарных точек на краях и окрестности вершины $\xi = 0$.

4. Трансформация фоновых асимптотик (IO) при $\rho \rightarrow 0$.

Наша ближайшая задача - проследить как трансформируется асимптотический ряд (IO), (II) при приближении точки наблюдения к предельному лучу OF , т.е. при $\rho \rightarrow 0$, $\alpha/\rho \rightarrow 0$.

Предполагая, что $\gamma = O(1)$, оценим, при каких соотношениях ряд (IO) будет сохранять асимптотический характер. В выражении для $\varphi_j(\gamma, \rho, \tau)$ доминирует последнее слагаемое:

$$\varphi_j \sim \rho^{1/3 - j/3 - [j/3]} \tau^{-1/2 + [j/3]} I_{j, [j/3]}(\gamma) + \dots$$

И условие асимптотичности ряда (IO) эквивалентно

$$k^{-1} \rho^{-2} \tau \ll 1 \quad \text{или} \quad (k\rho) \gg (k\tau)^{-1/2}. \quad (I8)$$

Заметим, что радиус вектор \bar{r} в вышеописанной системе координат определяется с помощью формулы

$$\bar{r}(\tau, \alpha, \rho) = \bar{r}_0(\alpha, \rho) + (\tau - \alpha - \beta\rho) \bar{l}(\alpha, \rho). \quad (I9)$$

Здесь \bar{r}_0 - радиус-вектор точки $M_{\rho, \alpha}$ касания S лучом с параметрами (α, ρ) ; $\bar{l} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{r}_0(\alpha, \rho)$ - направление этого луча (касательной к геодезической $\bar{R}_\rho(\alpha) = \bar{r}_0(\alpha, \rho)$ (рис.3)). Соображения подобия (радиальная симметрия) позволяют заключить, что на самом деле $\bar{r}_0(\alpha, \rho) = \rho \bar{r}_0(\alpha/\rho)$, $\bar{l}(\alpha, \rho) = \bar{l}(\alpha/\rho)$. Вводя вместо переменной α новую переменную $\alpha = \alpha/\rho$, получим вместо (I9)

$$\bar{r}(\tau, \rho, \alpha) = \rho \bar{r}_0(\alpha) + (\tau - \rho\alpha - \beta\rho) \bar{l}(\alpha). \quad (20)$$

Здесь $\bar{r}_0(\alpha) \equiv \bar{r}_0(\alpha, 1)$ - гладкая вектор-функция в окрестности $\alpha = 0$, $|\bar{r}_0(0)| = 1$, $\bar{l}(\alpha) = \bar{r}'_0(\alpha)$, $|\bar{l}(\alpha)| \equiv 1$.

Отметим, что в отличие от (τ, ρ, α) система координат

(τ, ρ, κ) регулярна вблизи $\rho = 0$ и посредством (20) она может быть продолжена на отрицательные ρ . Действительно,

$$\bar{r}_\tau(\tau, 0, 0) = \bar{l}(0), \bar{r}_\rho(\tau, 0, 0) = \bar{r}_0(0) - \beta \bar{l}(0) = \sqrt{1 - \beta^2} \bar{b};$$

$$\bar{r}_\kappa(\tau, 0, 0) = \tau \bar{l}'(\kappa) = -K(0) \tau \bar{n}.$$

Здесь \bar{n} - нормаль к поверхности S (и к геодезической $\bar{R}_1(\alpha)$) в точке $\alpha = 0$; $\bar{b} = \bar{n} \times \bar{l}$ - бинормаль, $K(0)$ - кривизна на кривой $\bar{R}_1(\alpha)$ при $\alpha = 0$. То есть $\bar{r}_\tau, \bar{r}_\kappa, \bar{r}_\rho$ образуют ортогональную тройку при $\tau > 0, \rho = \kappa = 0$ и якобиан отображения $(\tau, \kappa, \rho) \rightarrow \bar{r}(\tau, \kappa, \rho)$ отличен от нуля, поскольку $|\beta| \neq 1$ и $K(0) \neq 0$.

Для дальнейшего целесообразно вернуться к радиально-сферической системе координат (r, ϑ, φ) , $\vartheta(-\hat{\omega}_0) = 0$ и пусть $\varphi = 0$ соответствует границе света и тени ($\kappa = 0, \rho > 0$). Так же как и в п.2 полезно ввести "квазиевклидовы" координаты вблизи $\hat{\omega} = -\hat{\omega}_0$:

$$\xi = \vartheta \cos \varphi, \quad \eta = \vartheta \sin \varphi.$$

Теперь границе свет-тень соответствует $\xi = 0, \eta > 0$; точке F - $-\xi = \eta = 0, r > 0$.

Легко убедиться, что якобиан вновь построенного отображения $(r, \xi, \eta) \rightarrow \bar{r}(r, \xi, \eta)$ также отличен от нуля при $\xi = \eta = 0, r > 0$. Действительно, если координатные оси Ox, Oy, Oz выпущены из вершины O соответственно параллельно векторам $\bar{l}(0), \bar{n}$ и \bar{b} , то

$$x = r \cos \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \approx r \left(1 - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{2} \eta^2 + \dots \right)$$

$$y = r \xi \sin \sqrt{\xi^2 + \eta^2} / \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \approx r \left(\xi - \frac{1}{6} \xi^3 - \frac{1}{6} \xi \eta^2 + \dots \right) \quad (21)$$

$$z = r \eta \sin \sqrt{\xi^2 + \eta^2} / \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \approx r \left(\eta - \frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{6} \eta \xi^2 + \dots \right).$$

Отсюда для матричной производной имеем

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \xi, \eta)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

и якобиан отличен от нуля при $r > 0$.

Сказанное позволяет заключить, что преобразование координат $(\tau, \kappa, \rho) \rightarrow (r, \xi, \eta)$ невырождено при $\kappa = \rho = 0, \tau > 0$ и имеет место

$$\begin{aligned} \rho &= r (1 - \beta^2)^{-1/2} \eta + \dots \\ \kappa &= -r k^{-1}(0) \xi + \dots, \quad \tau = r + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Многоточием заменены члены разложения Тейлора, начиная с квадратичного. Для дальнейшего необходимо уточнить последнее из разложений (22). Для этого, пользуясь (20), получаем

$$v^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = \tau^2 + 2\tau\rho\{\bar{v}_0(x)\bar{v}'_0(x) - \beta - x\} + \rho^2[\bar{v}(x)\bar{v}'(x) + (\beta + \rho x)^2 - 2(\beta + \rho x)\bar{v}(x)\bar{v}'(x)]. \quad (23)$$

Раскладывая $\bar{v}(x)$ в ряд при малых x и привлекая формулы Френеля, получим:

$$\bar{v}(x) = \bar{v}_0 + x\bar{l} - \frac{1}{2}K(0)x^2\bar{n} - \frac{1}{6}x^3(K'(0)\bar{n} + K^2(0)\bar{l}) + K(0)K_2\bar{b} + O(x^4). \quad (24)$$

Здесь K_2 - кручение кривой $\bar{v}_0(x)$ в точке $x=0$.

После подстановки (24) в (23) получим

$$v^2 = \tau^2 + \rho^2(1 - \beta^2) + \rho O(x^3) + \rho^2 O(x^4).$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$v = \tau - \frac{1}{2}\tau\eta^2 + \tau\eta O(\xi^3) + \tau\eta^2 O(\xi) + \tau O(\eta^3).$$

Условие (18) асимптотичности ряда (10) в новых переменных запи-

шется $\eta \lambda^{1/2} \gg 1$. Поэтому введем растянутую переменную $\eta \lambda^{1/2} = y$, $\lambda \equiv k\tau$. Кроме того, считая, что $\delta \equiv c\alpha k^{1/3} \rho^{-2/3} = O(1)$, имеем $\delta \approx c_2 \lambda^{1/3} \xi \eta^{1/3}$, $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ и т.к. $\eta = O(\lambda^{-1/2})$, уместно, считая что $\xi = O(\lambda^{-1/6})$, ввести вторую пограничную переменную $x = \xi \lambda^{1/6}$; тогда $\delta = xy^{1/3}$.

Итак

$$\begin{aligned} x &= \xi \lambda^{1/6} \\ y &= \eta \lambda^{1/2} \end{aligned} \quad (25)$$

Если теперь в (10), (11) перейти от τ, ρ, δ к ρ, ξ, η , а затем сделать "растяжки" (25), то перераскладывая асимптотический ряд по новому большому параметру λ , получим

$$u \sim e^{i\lambda - iy^2/2} \lambda^{-1/3} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j/6} \tilde{\Phi}_j(x, y), \quad (26)$$

$$\tilde{\Phi}_0(x, y) \sim y^{1/3} I_{00}(xy^{1/3}) + y^{1/2-2} I_{3,-1}(\delta) + \dots + y^{1/3-2k} I_{3k,-k}(\delta) \dots \quad (27)$$

При $j \geq 1$ для $\tilde{\Phi}_j(x, y)$ имеют место аналогичные формальные

ряды.

5. Асимптотики фонового пограничного слоя. Разложение (26) наводит на мысль искать соответствующую асимптотику при ω , близких к ω_0 , вводя погранслоиные переменные (25), в виде

$$u(\lambda, x, y) \approx e^{i\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-1/3-j/6} \Phi_j(x, y). \quad (28)$$

При этом $\Phi_j(x, y)$ при $y \rightarrow +\infty$ должна иметь асимптотику

$$\Phi_j(x, y) \approx e^{-iy^2/2} \tilde{\Phi}_j(x, y). \quad (29)$$

Подставляя анзац (28) в уравнение Гельмгольца, выведем соответствующую рекуррентную систему для функций Φ_j , $j \geq 0$. Для этого запишем уравнение Гельмгольца в переменных λ, ξ, η :

$$(\lambda^2 \partial_\lambda^2 + 2\lambda \partial_\lambda + \lambda^2 + \Delta_{\xi, \eta}) u(\lambda, \xi, \eta) = 0. \quad (30)$$

Здесь $\Delta_{\xi, \eta} = \Delta_{\omega}$ - оператор Бельтрами-Лапласа на сфере в переменных (ξ, η) . Анализ формул (20) позволяет заключить, что

$$\Delta_{\xi, \eta} = \partial_\eta^2 + \partial_\xi^2 + \dots$$

Многоточием заменены члены, имеющие меньший порядок малости в предположении малости ξ и η . Делая далее в (30) растяжение переменных (25) и подставляя в получившееся уравнение ряд (28), получим следующую рекуррентную систему:

$$\left(\partial_y^2 + iy \partial_y + \frac{i}{3} x \partial_x + \frac{4i}{3} \right) \Phi_j = \mathcal{L}_j^B(\Phi_0, \dots, \Phi_{j-1}), \mathcal{L}_0^B = 0. \quad (31)$$

Здесь \mathcal{L}_j^B - дифференциальные операторы.

Итак, искомые функции $\Phi_j(x, y)$, $j = 0, 1, \dots$ должны удовлетворять уравнениям (31) и иметь при $y \rightarrow +\infty$ заданную асимптотику (29). Покажем как из этих условий находится главное приближение $\Phi(x, y) \equiv \Phi_0(x, y)$:

$$\frac{i}{3} x \Phi_x + iy \Phi_y + \Phi_{yy} + \frac{4i}{3} \Phi = 0. \quad (32)$$

Частными решениями данного уравнения с разделяющимися переменными являются функции

$$x^\nu e^{-i/4 y^2} \mathcal{D}_{-\frac{\nu+4}{3}}(-e^{-i\pi/4} y), \quad x^\nu e^{-i/4 y^2} \mathcal{D}_{\frac{\nu+1}{3}}(e^{i\pi/4} y)$$

при произвольном выборе параметра ν .

Поскольку при $y \rightarrow -\infty$ мы ожидаем получить только сферическую волну, с учетом асимптотического поведения функций параболического цилиндра при большом значении аргумента [II] естественно взять суперпозицию решений первого типа:

$$\Phi(x, y) = \int_x C(\nu) x^\nu e^{-i/4 y^2} \mathcal{D}_{-\frac{\nu+4}{3}}(e^{-i\pi/4} y) d\nu.$$

Используя интегральные представления функций $\mathcal{D}_\mu(x)$ [II], получим

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_x C(\nu) x^\nu \int_0^\infty e^{i\xi^2/2 - i\xi y} \xi^{\frac{\nu-1}{3}} d\xi = \\ &= \int_0^\infty e^{i\xi^2/2 - i\xi y} G(x \xi^{1/3}) \xi^{1/3} d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $C(x) \equiv \int_x z^\nu C(\nu) d\nu$ — преобразование типа Меллина произвольной функции $C(\nu)$, т.е. достаточно произвольная функция. Итак, мы получили, что при достаточно произвольной функции G функция (33) является решением уравнения (32), в чем нетрудно убедиться и непосредственно.

Функцию G надо выбрать так, чтобы имело место при $y \rightarrow +\infty$

$$\Phi(x, y) \simeq e^{-iy^2/2} \left[y^{1/3} I_{00}(xy^{1/3}) + y^{1/3-2} I_{3,-1}(xy^{1/3}) + \dots \right].$$

Ключевой член I_{00} есть функция Фока, определяемая посредством (12).

Если применить к (33) метод стационарной фазы, то получим следующий вклад, вносимый стационарной точкой $\xi_{ст} = y$:

$$\Phi \sim \sqrt{2\pi/i} e^{-iy^2/2} y^{1/3} G(xy^{1/3}) = \sqrt{2\pi/i} e^{-iy^2/2} y^{1/3} G(y). \quad (34)$$

Сравнивая (34) и (26), (27), получим, что $G \equiv I_{00}$ и окончательно

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i\xi^{2/2} - i\xi y + ix \zeta \xi^{1/3}} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} \xi^{1/3} d\xi d\zeta -$$

$$- \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\xi e^{i\xi^{2/2} - i\xi y + ix \zeta \xi^{1/3}} \frac{w_2(\zeta)}{w_1(\zeta)} \xi^{1/3} d\xi d\zeta. \quad (35)$$

Высшие приближения ряда (28) могут быть вычислены стандартным развитием настоящей техники.

Дальнейший анализ асимптотики (28), (35) показывает, что при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$ она сшивается с отраженной волной и при всех $|x| + |y| \rightarrow \infty$ - со сферической волной, дифрагированной вершинной конуса. Мы опускаем соответствующие громоздкие выкладки, не содержащие принципиальных трудностей.

Необходимо напомнить, что построенная асимптотика связана с терминатором OB_1 и все построения пп. 4, 5 нужно повторить применительно к терминатору OB_2 , в результате чего в окрестности точки $\omega = -\omega_0$ возникнет другая асимптотика, аналогичная (28) с другой ориентацией погранслоевых координат (x', y') , обозначенная в обобщающей формуле (4) через $U_B^{(2)}$.

Литература

1. Keller J.V. Diffraction by a convex cylinder. - Trans. IRE, Ant. and Prop., 1956, v.4, N 3.
2. Фок В.А. Дифракция Френеля от выпуклых тел. - УФН, 1950, т.43, № 4, с.587.
3. Brown W.P. On the asymptotic behavior of electromagnetic fields scattered from convex cylinders near grazing incidence. - J.Math.Anal.Appl., 1966, v.15, N 2, p.355-385.
4. Ludwig D. Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies. - Comm.Pure Appl.Math., 1967, v.20, N 1, p.103-138.
5. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. - Л.: ЛГУ, 1974.
6. Боровиков В.А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. - М.: Наука, 1966.
7. Смышляев В.П. Дифракция плоских волн на конических препятствиях. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 18. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1988, т.173, с.142-154.

8. S m y s h l y a e v V.P. Diffraction by conical surfaces at high frequencies. - Wave Motion, 1990, v.12, N 4, p.329-339.
9. Б р о д с к а я А.Л., П о п о в А.В., Х о з и о с к и й С.А. Асимптотика волны, отраженной от конуса, в области полутени. - В кн.: Теория дифракции и распространения волн. Т.1. VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Москва-Ереван, 1973.
10. C l e m m o w P.S., S e n i o r T.B.A. A note on generalized Fresnel integral, Proc.Cambridge Philos.Soc., 1953, v.9, N 3, p.570-572.
11. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции, тт.1-3, М., 1973.
12. Б о р о в и к о в В.А. Метод стационарной фазы для двумерных областей с угловыми точками. - Мат.заметки, 1984, т.36, № 5, с.777-788.

Smyshlyaev V.P. The forward scattering by a smooth convex cone.

The local asymptotics of a wave field scattered by a smooth convex cone is constructed near the forward scattering direction with the aid of the boundary layer method.