



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. M. Sidel'nikov, Orbital spherical 11-designs in which the initial point is a root of an invariant polynomial,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 4, 183–203

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1068>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 12:29:10



ОРБИТНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ 11-ДИЗАЙНЫ, У КОТОРЫХ НАЧАЛЬНАЯ ТОЧКА — КОРЕНЬ ИНВАРИАНТНОГО МНОГОЧЛЕНА

© В. М. Сидельников

В работе рассматриваются сферические t -дизайны на N -мерной евклидовой сфере S_{N-1} , которые являются орбитой Gx_0 конечной группы G ортогональных матриц с начальной точкой $x_0 \in S_{N-1}$. Если в качестве начальной точки x_0 взять общий корень всех гармонических G -инвариантных многочленов $f(x)$ степени $\leq t$ с нулевым средним, т.е. тех $f(x)$, для которых $\int_{S_{N-1}} f(x) d\mu(x) = 0$, то орбита будет t -дизайном [1].

Для групп $\Phi_{n,2}$ и $\Sigma_{n,2}$ ортогональных $2^n \times 2^n$ -матриц, введенных в работе [13], показано, что пространство $\Phi_{n,2}$ -инвариантных и $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов степеней ≤ 9 с нулевым средним является одномерным. Найдена образующая $\Lambda(x)$ этого пространства. Показано, что $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов десятой степени нет. Если x_0 — корень $\Lambda(x)$, то орбита $\Phi_{n,2}x_0$ является 9-дизайном, а орбита $\Sigma_{n,2}x_0$ — 11-дизайном в 2^n -мерном евклидовом пространстве.

§1. Введение

Сферическим t -дизайном в N -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^N называется непустое конечное множество $X \subset S_{N-1}$, для которого выполнено соотношение

$$\frac{1}{|S_{N-1}|} \int_{S_{N-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

для всех многочленов степени $\leq t$, где $S_{N-1} := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \dots + x_N^2 = 1\}$ — единичная сфера в \mathbb{R}^N , $\mu(x)$ — обычная евклидова (т.е. инвариантная относительно ортогональной группы $O(N)$) мера на S_{N-1} и $|S_{N-1}| := \int_{S_{N-1}} d\mu(x)$ — площадь поверхности S_{N-1} . Читатель может ознакомиться с основными свойствами сферических t -дизайнов по работам [2, 4].

Работа поддержана Американским фондом US Civilian Research Development, грант № RM1-346 и РФФИ, грант № 96-01-00931.

Основные определения: $\text{Hom}(k)$ — пространство однородных многочленов степени k над \mathbb{R} от N переменных, $\text{Harm}(k)$ — пространство однородных гармонических многочленов степени k , т.е. пространство однородных полиномов $y = y(\mathbf{x})$, для которых выполнено уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} = 0$. Размерности пространств $\text{Hom}(k)$ и $\text{Harm}(k)$ равны $m(N, k) = \binom{N+k-1}{k}$ и $n(N, k) = \binom{N+k-1}{k} - \binom{N+k-3}{k-2}$ соответственно [7, 6].

Скалярное произведение (f, g) на $\text{Hom}(k)$ определим обычным образом, а именно с помощью соотношения

$$(f, g) := \frac{1}{|S_{N-1}|} \int_{S_{N-1}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}).$$

Пространство $\text{Harm}(k)$ является неприводимым инвариантным подпространством представления ортогональной группы $O(N)$ на $\text{Hom}(k)$. Говоря более точно, пространство $\text{Hom}(k)$ может быть представлено как прямая сумма [7, 6]:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(k) = & \text{Harm}(k) + r^2 \text{Harm}(k-2) + \dots \\ & + r^{2l} \text{Harm}(k-2l), \quad l = [k/2], \quad r^2 := \sum_{i=1}^N x_i^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Как следует из [6, гл. 2, теорема 2.1, следствие 2.4] и [7, гл. IX, §6, с. 441]:

i. Каждый многочлен $f(\mathbf{x})$ степени не выше t равен на S_{N-1} сумме $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^t a_i h_i(\mathbf{x})$ однородных гармонических многочленов $h_i(\mathbf{x})$ степеней i , т.е. равен некоторому гармоническому многочлену.

ii.

$$\int_{S_{N-1}} h_j(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}) = 0, \quad j > 0, \quad h_j(\mathbf{x}) \in \text{Harm}(j). \quad (2)$$

Отсюда следует

Лемма А [3]. Пусть $H(t) = \text{Harm}(1) + \dots + \text{Harm}(t)$, $t \geq 1$. Множество X является t -дизайном тогда и только тогда, когда для любого $h(\mathbf{x})$ из $H(t)$ выполнено

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} h(\mathbf{x}) = 0.$$

Отметим, что пространство $H(t)$ состоит, как следует из (2), из гармонических многочленов $f(x)$ степени $\leq t$ с нулевым средним, т.е. многочленов, для которых $\int_{S^{N-1}} f(x) d\mu(x) = 0$.

Пусть G — конечная группа ортогональных матриц и a — точка на S^{N-1} . Естественный класс дизайнов X составляют орбитные дизайны, т.е. множества вида $X := Ga := \{ga \mid g \in G\}$, которые представляют собой орбиту начальной точки a .

Как показано в [3-5], орбита Ga является $2s$ -дизайном при любом $a \in S^{N-1}$, если естественное представление группы G на пространстве гармонических многочленов степени k является абсолютно неприводимым для каждого k , $k = 0, \dots, s$.

В работе [1, теорема 3.12] доказано, что орбита Ga является t -дизайном при любом $a \in S^{N-1}$, если и только если $H(t)$ не содержит G -инвариантных гармонических многочленов. Кроме того, там же показано, что если $H(t)$ содержит G -инвариантные многочлены, то их можно „убить“, выбрав в качестве начальной точки a их общий корень. В этом случае орбита Ga — t -дизайн.

В §2 настоящей работы указанные результаты работы [1] (применительно к орбитным дизайнам) приведены в несколько более общем и более удобном для использования виде.

В качестве примера приведем следующие хорошо известные результаты. Орбита $.0a$ группы Конвея $.0$ всех ортогональных преобразований, оставляющих на месте решетку Лича, является 11-дизайном при любом начальном векторе a , ибо первый $.0$ -инвариантный многочлен с нулевым средним имеет степень 12 [10]. Если в качестве a взять вектор $e = 32^{-1/2}(-3, 1^{23}) \in S_{23}$ (см. [11, гл. 4, §11]), то мы получим 11-дизайн, который содержит 196560 элементов. Заметим, что $2e$ — один из векторов решетки Лича минимальной длины. Общее число таких векторов равно 196560, а группа $.0$ действует на них транзитивно [12, теорема 2.82].

Если же в качестве a взять корень единственного $.0$ -инвариантного гармонического многочлена $\Omega(a)$ степени 12 с нулевым средним, то мы получим 15-дизайн в 24-мерном евклидовом пространстве, ибо в $H(15)$ нет $.0$ -инвариантных гармонических многочленов степеней 13, 14, 15 [10]. В этом случае орбита $.0a$, очевидно, содержит $|.0|/S(a)$ элементов, где $|.0| = 2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$ и $S(a)$ — стабилизатор элемента a [12]. Как предполагает автор, $|S(a)| = 1$ для любого корня $\Omega(a)$, поэтому число элементов у 15-дизайна $.0a$ предположительно равно $|.0|$. Необходимо отметить, что „явный вид“ инвариантного многочлена $\Omega(a)$ автору не известен.

Основным результатом работы является построение бесконечной серии 9-дизайнов и 11-дизайнов в 2^n -мерном евклидовом пространстве с помо-

щью введенных в работе [13] групп $\Phi_{n,2}$ и $\Sigma_{n,2}$, $n = 1, 2, \dots$, ортогональных $2^n \times 2^n$ -матриц. Группа $\Phi_{n,2}$ является подгруппой индекса 2 группы $\Sigma_{n,2}$. Группа $\Phi_{n,2}$ при $n = 2$ является группой порядка 1152, которая порождена 16 матрицами $\text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, 24 матрицами P_π и матрицей Адамара $H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, где P_π — подстановочная матрица, которая соответствует аффинному отображению $x \xrightarrow{\pi} Qx + \alpha$, ($Q \in M_n(\mathbb{F}_2)$ — невырожденная матрица, $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$) пространства \mathbb{F}_2^n в себя (см. §3).

Для того чтобы породить группу $\Sigma_{n,2}$, надо в наборе порождающих матриц заменить H на матрицу $H(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Мы доказываем, что пространство $\Phi_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов $f(x)$ степени ≤ 9 с нулевым средним является одномерным с образующей $\Lambda^{(n)}(x)$ 8-й степени, которая имеет достаточно сложный вид (см. теорему 1). Пространство $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов $f(x)$ степени ≤ 11 с нулевым средним также является одномерным с той же образующей $\Lambda^{(n)}(x)$. Поэтому орбиты $\Phi_{n,2}a$ и $\Sigma_{n,2}a$, где a — любой корень многочлена $\Lambda^{(n)}(x)$, являются 9-дизайном и 11-дизайном соответственно.

Отметим, что $\Lambda^{(2)}(x) = \sum_{i=0}^4 x_{\alpha_i}^8 + 7 \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j} x_{\alpha_i}^4 x_{\alpha_j}^4 + 168 \prod_{i=1}^4 x_{\alpha_i}^2 - \frac{7}{10} (\sum_{i=1}^4 x_{\alpha_i}^2)^4$, где индексация переменных производится элементами двумерного пространства $\mathbb{F}_2^2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ над полем \mathbb{F}_2 из двух элементов.

Одним из корней многочлена $\Lambda^{(2)}(x)$ является вектор $c(x_0)$, где $c(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) + \cos x(1, 0, 0, 0)$, и x_0 — корень уравнения $\Lambda^{(2)}(c(x)) = \cos^8 x + \frac{14}{3} \cos^4 x \sin^4 x + \frac{56}{9} \cos^2 x \sin^6 x + \frac{5}{9} \sin^8 x - \frac{7}{10} = 0$. Орбитные коды $\Phi_{n,2}c(x_0)$ и $\Sigma_{n,2}c(x_0)$ содержат 96 и 192 точек и являются 9- и 11-дизайнами на сфере в четырехмерном евклидовом пространстве.

Подобными методами можно построить 9- и 11-дизайны на сфере в восьмерном евклидовом пространстве, которые содержат 15360 и 30720 точек (см. §6).

§2. Необходимые и достаточные условия, при которых орбита Ga является t -дизайном

Рассмотрим линейное представление ι_k ортогональной группы $O(N)$ на $\text{Hom}(k)$, $k > 0$, т.е. на однородных многочленах степени k . Пусть $\Omega'' = \{a_1(x), \dots, a_{m(N,k)}(x)\}$ — некоторый ортогональный базис $\text{Hom}(k)$. Представление ι_k в базисе Ω'' представляет собой гомоморфизм группы $O(N)$ в группу ортогональных $\binom{N+k-1}{k} \times \binom{N+k-1}{k}$ -матриц $T(g) = (t_{i,j}(g))$ с помощью ото-

бражения $a_i(\mathbf{x}) \rightarrow a_i(g^{-1}\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m(N,k)} t_{i,j}(g^{-1})a_j(\mathbf{x})$. Ввиду (1) и того, что пространства $\text{Harm}(i)$ являются $O(N)$ -инвариантными, все матрицы $T(g)$ в соответствующем ортогональном базисе Ω' могут быть представлены как клеточно-диагональные с клетками $T_i(g)$ размера $n(N,i) \times n(N,i)$, $i = k, k-2, \dots, k-2[k/2]$. Отметим, что при $i = 0$ все матрицы $T_0(g)$ реализуют тождественное преобразование на одномерном пространстве $\text{Harm}(0)$, в то время как при $i > 0$ ω_i — не тождественное неприводимое представление на пространстве $\text{Harm}(i)$.

Пусть G — конечная подгруппа группы $O(N)$ и ρ_k — представление G на $\text{Hom}(k)$.

В этом случае инвариантные подпространства $\text{Harm}(i)$ не обязательно остаются неприводимыми для ρ_k и, вообще говоря, распадаются в прямую сумму неприводимых инвариантных подпространств $H_{i,j}$ размерности $\dim H_{i,j} = k_{i,j}$, $j = 1, \dots, N_i$, так, что $\text{Harm}(i) = H_{i,1} + \dots + H_{i,N_i}$. По теореме Машке каждая матрица $T_i(g)$ в соответствующем ортогональном базисе Ω становится клеточно-диагональной с клетками $T_{i,j}(g)$ размера $k_{i,j} \times k_{i,j}$. Линейные операторы $T_{i,j}(g)$ реализуют неприводимое представление $\rho_{i,j}$ группы G на подпространстве $H_{i,j}$.

Лемма 1. Пусть $f(\mathbf{x}) \in H_{i,j}$. Тогда

$$\sum_{g \in G} f(g\mathbf{x}) = |G|f(\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad \sum_{g \in G} f(g\mathbf{x}) = 0$$

в зависимости от того, представление $\rho_{i,j}$ — тождественное или нет на $H_{i,j}$.

Доказательство. Первое равенство очевидно. Второе следует из хорошо известного соотношения ортогональности для матричных элементов нетождественного неприводимого представления конечной группы (соотношение (5) из §4, гл. 8 в [9])

$$\sum_{g \in G} T_{i,j}(g)\hat{f}(\mathbf{x}) = 0 \iff \sum_{g \in G} f(g\mathbf{x}) = 0$$

для $f(\mathbf{x}) \in H_{i,j}$, где $\hat{f}(\mathbf{x})$ — вектор, элементы которого являются координатами многочлена $f(\mathbf{x})$ в базисе Ω . •

Многочлен $h(\mathbf{x})$ из $H(t)$ будем называть G -инвариантным, если $f(g\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ для всех $g \in G$.

Пусть $y \in S_{N-1}$. Множество $X(y) := \{gy : g \in G\}$ называется орбитным кодом или орбитным дизайном с начальным вектором y . Очевидно, число элементов $X(y)$ равно $|G|/|S(y)|$, где $S(y)$ — стабилизатор точки y в группе G .

Лемма 2. *и. Множество $X := X(x_1, \dots, x_s) := \bigcup_{i=1}^s X(x_i)$ является t -дизайном тогда и только тогда, когда для любого G -инвариантного многочлена $h(x)$ из $H(t)$ выполнено*

$$\sum_{i=1}^s h(x_i) = 0. \quad (3)$$

ii. Орбитный код $X(x_1)$ является t -дизайном при любом начальном векторе $x_1 \in S_{N-1}$ тогда и только тогда, когда пространство $H(t)$ не содержит G -инвариантных многочленов.

Доказательство. *и.* Пусть X — t -дизайн. Пространство $H(t)$, как следует из леммы 1, является прямой суммой пространства инвариантных многочленов H_0 и ортогонального к H_0 в $H(t)$ пространства H_1 , т.е. любой $h(x)$ из $H(t)$ может быть представлен в виде $h(x) = h_0(x) + h_1(x)$, $h_0(x) \in H_0$, $h_1(x) \in H_1$ так, что

$$\sum_{x \in X} h(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{g \in G} h(gx_i) = |G| \sum_{i=1}^s h_0(x_i) = 0.$$

Если X — не t -дизайн, то по лемме А найдется такой многочлен $h(x)$, что $\sum_{x \in X} h(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{g \in G} h(gx_i) = |G| \sum_{i=1}^s h_0(x_i) \neq 0$, т.е. для $h_0(x)$ не выполнено (3).

ii. Из лемм А и (1) следует, если в $H(t)$ нет G -инвариантных многочленов, то для всех $h(x)$ выполнено $\sum_{x \in X} h(x) = 0$. Как следует из леммы 1, последнее равенство выполнено для всех $h(x)$ только при отсутствии G -инвариантных многочленов в $H(t)$. •

Таким образом, $X(x_1, \dots, x_s)$ является t -дизайном, если и только если множество $\{x_1, \dots, x_s\}$ — дизайн для пространства G -инвариантных многочленов из $H(t)$. Лемма 2 далее будет использована только при $s = 1$.

§3. Структура группы $\Sigma_{n,2}$

В качестве G мы будем рассматривать группу $\Sigma_{n,2}$, которая введена через матричные образующие в работе [13]. В работе [15] показано, что группа $\Sigma_{n,2}$ изоморфна полупрямому произведению экстраспециальной группы O_2 порядка 2^{2n+1} и ортогональной группы $O^+(2n, 2)$, которая действует на O_2 естественным образом. Отметим, что этот результат мы в работе использовать не будем. Очень коротко напомним определение $\Sigma_{n,2}$ [13].

Пусть $N := 2^n$ и $f(x)$ — булева функция от n переменных, $F_2^n := \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ — множество n -мерных двоичных векторов, упорядоченное каким-либо образом. Мы обозначаем через \mathcal{E} группу, состоящую из диагональных матриц

$E_f := \text{diag}((-1)^{f(\alpha_1)}, \dots, (-1)^{f(\alpha_N)})$, где $f(x)$ пробегает все булевы функции степени 2 или менее, и через \mathcal{P} — группу, состоящую из подстановочных $2^n \times 2^n$ -матриц $P(Q, \alpha) = P_\pi$, реализующих аффинные отображения $x \xrightarrow{\pi} Qx + \alpha$, где $Q \in M_n(\mathbb{F}_2)$ — невырожденная матрица, $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ и $M_n(\mathbb{F}_2)$ — множество всех матриц над полем \mathbb{F}_2 . Пусть $D, R, T \in M_n(\mathbb{F}_2)$, $\text{Im } R := R\mathbb{F}_2^n$ — пространство строк R , $\text{Ker } R := \{x : Rx = 0\}$, $\text{Com } R$ — дополнение к пространству $\text{Ker } R$.

Конечная группа $\Sigma_{n,2}$ определяется как группа, порожденная группой \mathcal{U} и всевозможными матрицами $B(D, R, T) = (v_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$, такими, что $\text{Im } R = \text{Im } T$ и билинейная форма $x Dy^T$ невырождена на $\text{Ker } R \times \text{Ker } T$.

По определению матрицы $B(D, R, T)$ ее элемент $v_{\alpha,\beta}$ является нулевым только тогда, когда $\alpha R \neq \beta T$, т.е. когда $\alpha = \alpha' + \alpha''$, $\beta = \beta' + \beta''$, $\alpha' \in \text{Ker } R$, $\beta'' \in \text{Ker } T$, $\alpha' \in \text{Com } R$, $\beta' \in \text{Com } T$ и $\alpha'R \neq \beta'T$. Если $\alpha R = \beta T$, то $v_{\alpha,\beta} := 2^{-m/2}(-1)^{\alpha D \beta^T}$, где $m := \dim \text{Ker } R$.

Индексацию строк и столбцов матриц из $\Sigma_{n,2}$ осуществляем элементами пространства \mathbb{F}_2^n , упорядоченным указанным образом.

Порядок $\sigma_{n,2}$ группы $\Sigma_{n,2}$ асимптотически равен $c2^{n(2n+1)+1}$, $c = 1.38\dots, n \rightarrow \infty$. Отметим, что $\sigma_{1,2} = 8$, $\sigma_{2,2} = 2304 = 2^8 \cdot 3^2$, $\sigma_{3,2} = 5160960 = 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $\sigma_{4,2} = 178362777600 = 2^{22} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, $\sigma_{5,2} = 96253116206284800 = 2^{32} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$, $\sigma_{6,2} = 819651496316379542323200 = 2^{44} \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31$ [13].

Мы будем обозначать через $\Phi_{n,2}$ подгруппу индекса 2 группы $\Sigma_{n,2}$, которая образована элементами (матрицами) с рациональными коэффициентами. О свойствах группы $\Phi_{n,2}$ см. [13] и [15]. Пусть $H := 2^{-n/2}((-1)^{\langle a,b \rangle})$, где $a, b \in \mathbb{F}_2^n$, $\langle a, b \rangle$ — их скалярное произведение в пространстве \mathbb{F}_2^n , — матрица Адамара.

Лемма 3. *Группа $2^n \times 2^n$ -матриц $\Sigma_n := \langle \mathcal{U}, H \rangle$, где $\mathcal{U} := \langle \mathcal{E}, \mathcal{P} \rangle$, совпадает с $\Sigma_{n,2}$ при нечетном n и с группой $\Phi_{n,2}$ при четном n .*

Доказательство. Как вытекает из определений

$$P(Q', \mathbf{0})B(D, R, T)P(Q, \mathbf{0}) = B(Q'DQ^T, Q'R, QT). \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{W} := \{i_1, \dots, i_k\}$ — k -элементное подмножество \mathcal{N} и $\overline{\mathcal{W}} := \mathcal{N} \setminus \mathcal{W}$. Обозначим через $I(\mathcal{W})$ диагональную $n \times n$ -матрицу из $M_n(\mathbb{F}_2)$, у которой на местах (i_j, i_j) , $j = 1, \dots, k$, стоят единицы, а на остальных местах диагонали — нули.

Ввиду условия $\text{Im } R = \text{Im } T$ можно подобрать невырожденные матрицы Q' и Q так, чтобы $Q'R = QT = I_{n-m}$, где $m = \text{rang } R$ и $I_k := (\{1, \dots, k\})$.

Покажем, что матрицу $B(D, I_{n-m}, I_{n-m})$ можно представить в виде

$$B(D, I_{n-m}, I_{n-m}) = E_{f_1} B(\tilde{D}, I_{n-m}, I_{n-m}) E_{f_2}, \tag{5}$$

где $\tilde{D} = (\tilde{d}_{i,j})$ и $\tilde{d}_{i,j} = 0$, если выполнено по крайней мере одно из соотношений $i \geq n - m, j \geq n - m$ и $f_i(x), i = 1, 2$, — некоторые булевы функции степени не выше 2. Другими словами, $\tilde{D} = \text{diag}(0, \dots, 0, \hat{D})$ — матрица ранга m , у которой ненулевые элементы сосредоточены только в нижнем правом блоке размера $m \times m$, и \hat{D} — невырожденная $m \times m$ -матрица.

Для этого билинейную форму $x Dy^T$ представим в виде $x Dy^T = x' Dy'^T + x' Dy''^T + x'' Dy'^T + x'' Dy''^T$, где $x = x' + x'', y = y' + y'', x', y' \in \text{Ker } I_{n-m}, x'', y'' \in \text{Com } I_{n-m}$ и $x'' = y''$ для ненулевых элементов $v_{x,y}$. Отсюда $x Dy^T = x' D' y'^T + x' D x''^T + y'' D y'^T + x'' D x''^T$. Положим $f_1(x) = x' D x''^T + x'' D x''^T$ и $f_2(y) = y'' D y'^T$. Отсюда следует соотношение (5).

Для невырожденной матрицы $Q = \text{diag}(1, \dots, 1, \hat{D}^{-1})$ ввиду $\text{Im } \tilde{D} = \text{Ker } I_{n-m}$ выполнены соотношения $\tilde{D} Q^T = I(\{n - m + 1, \dots, n\}) = \bar{I}_m$ и $I_{n-m} Q = I_{n-m}$. Таким образом, по построению $B(\tilde{D}, I_{n-m}, I_{n-m}) P(Q, O) = B(\bar{I}_m, I_{n-m}, I_{n-m})$.

Следовательно, группа $\Sigma_{n,2}$ порождена матрицами $B(\bar{I}_m, I_{n-m}, I_{n-m}), m = 1, \dots, n$ и группой \mathcal{U} .

Матрица $H(W) := B(I(W), I(\bar{W}), I(\bar{W}))$ является (при соответствующей перестановке ее строк и столбцов) блочно-диагональной, блоками которой служат $2^k \times 2^k$ -матрицы Адамара $H_k := 2^{-k/2}((-1)^{(\alpha,\beta)})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^k$. В частности, $H(N) = H$. Как нетрудно установить,

$$H(W_1)H(W_2) = H(W), \quad (6)$$

где $W = W_1 \oplus W_2 = W_1 \cup W_2 \setminus W \cap W_2$ — симметрическая сумма множеств W_1 и W_2 .

Отсюда, в частности, вытекает, что группа $\Sigma_{n,2}$ порождена группой \mathcal{U} и матрицей $h(W)$ с одноэлементным множеством W , а группа $\Phi_{n,2}$ — группой \mathcal{U} и двухэлементным множеством W .

Пусть $f(x) = x_1 x_2$. Прямые вычисления дают, что $H(N)E_f H(N) = E_f H(\{1, 2\})P(Q, O)E_f = E_f P(Q, O)E_f$, где $Q = \text{diag}((\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}), 1, \dots, 1)$. Следовательно, с учетом (6) группе $\langle \mathcal{U}, H(N) \rangle$ принадлежат все матрицы $H(W)$, у которых множество W содержит четное число элементов. Отсюда вытекает, что $\Phi_{n,2} = \langle \mathcal{U}, H(N) \rangle$ при четном n .

При нечетном n , как следует из (6), группе $\langle \mathcal{U}, H(N) \rangle$ принадлежит матрица $H(\{1\}) = H(N)H\{2, \dots, n\}$, что доказывает равенство $\Sigma_{n,2} = \langle \mathcal{U}, H(N) \rangle$ для нечетного n . •

Максимальность подгруппы \mathcal{U} в $\Phi_{n,2}$ доказана также в [15].

§4. $\Phi_{n,2}$ -инвариантные многочлены восьмой степени

Пусть $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — набор элементов F_2^n , который будем также рассматривать и как множество элементов. Положим $x_\alpha := x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}$.

Пусть g — элемент группы $\Sigma_{n,2}$, G — подгруппа $\Sigma_{n,2}$ и $f(x)$ — многочлен. Положим $f^g(x) := f(gx)$ и $f^G(x) := |G|^{-1} \sum_{g \in G} f^g(x)$. Многочлен $f^G(x)$ будем называть усреднением $f(x)$ по подгруппе G . Как следует из леммы 1, $f^G(x) = f(x)$, если $f(x)$ принадлежит пространству H_0 G -инвариантных многочленов, и $f^G(x) = 0$, если $f(x)$ принадлежит пространству H_1 ортогональному к H_0 .

Лемма 5. Случай i. *Одночлен $x_\alpha = x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_8}$ восьмой степени является \mathcal{E} -инвариантным тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

- i.1. в наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ каждый элемент встречается четное число раз;
- i.2. множество $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ является смежным классом некоторого подпространства размерности 3, т.е., например, $\alpha_1 = \gamma$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \gamma$, $\alpha_4 = \alpha_3 + \gamma$, $\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma$, $\alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_3 + \gamma$, $\alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma$, $\alpha_8 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \gamma$.

Случай ii. *Одночлен $x_\beta = x_{\beta_1} \dots x_{\beta_{10}}$ десятой степени \mathcal{E} -инвариантен тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих трех условий:*

- ii.1. в наборе $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{10})$ каждый элемент встречается четное число раз;
- ii.2. в наборе $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{10})$ один элемент, скажем β_i , встречается дважды, а остальные однократно, и набор α длины 8, полученный удалением в наборе β двух β_i , удовлетворяет условию i.2;
- ii.3. в наборе $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{10})$ один элемент, скажем β_i , встречается трижды, а остальные однократно, и набор α длины 8, полученный удалением в β двух β_i , удовлетворяет условию 1.2.

Доказательство. Случай i. Заметим, что

$$E_f x_\alpha = (-1)^{f(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_8)} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_8}. \quad (7)$$

Отсюда вытекает, что x_α \mathcal{E} -инвариантен, если α удовлетворяет условию i.1 леммы. Предположим теперь, что набор α индексов монома x_α состоит из элементов, среди которых имеется по меньшей мере один встречающийся нечетное число раз.

Как известно [8], для фиксированной булевой функции $g(x)$ равенство

$$\sum_{z \in F_2^n} f(z)g(z) = 0 \quad (8)$$

для всех $f(x)$, $\deg f(x) \leq 2$, выполнено тогда и только тогда, когда $\deg g(x) \leq n - 3$. Это утверждение на языке теории кодирования звучит следующим образом: кодом, двойственным к коду Рида-Маллера второго порядка, является код Рида-Маллера $n - 3$ порядка (код RM_{n-3}). Равенство (8) по другому можно записать в виде

$$\sum_{a \in M} f(a) = 0,$$

где M — множество решений уравнения $g(x) = 1$.

Минимальное кодовое расстояние кода RM_{n-3} равно 8. Кодовые векторы веса 8 порождаются булевыми функциями вида $g(x) = l_1(x) \cdots l_{n-3}(x)$, где $l_j(x) = \tilde{l}_j(x) + l_j$ и $\tilde{l}_j(x)$, $j = 1, \dots, n - 3$, — линейно независимые линейные функции и l_j — константы, и только ими. Множество векторов M , на которых функция $g(x)$ принимает значение 1, является решениями системы уравнений $a_j(x) = 1$, $i = 1, \dots, n - 3$, т.е. смежным классом некоторого линейного пространства размерности 3.

Случай ii. Очевидно, что x_α \mathcal{E} -инвариантен, если α удовлетворяет условию ii.1 леммы.

Для доказательства утверждений ii.2 и ii.3 следует только заметить, что код RM_{n-3} не содержит векторов веса 10, т.е. моном x_β , у которого набор β состоит из различных элементов, не является \mathcal{E} -инвариантным. Поэтому случаи ii.2 и ii.3 по существу сводятся к случаю i.2. •

Рассмотрим многочлены

1. $\Gamma_3(x) := \sum_{\alpha} \sum_{(3)} x_{\alpha} x_{\beta+\alpha} x_{\gamma+\alpha} x_{\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\alpha} x_{\beta+\delta+\alpha} x_{\gamma+\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\delta+\alpha}$, $n \geq 3$, где суммирование в сумме \sum_{α} производится по всем $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ и в сумме $\sum_{(3)}$ — по всем наборам $(\beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$, у которых β, γ, δ — линейно-независимые векторы. Отметим, что $\Gamma_3(x)$ — гармонический многочлен, а число слагаемых в двойной сумме $\sum_{\alpha} \sum_{(3)}$ равно $N(N-1)(N-2)(N-4)$. Если $n = 1, 2$, то полагаем, что $\Gamma_3(x) = 0$.

2. $\Gamma_2(x) := \sum_{\alpha} \sum_{(2)} x_{\alpha} x_{\beta+\alpha} x_{\gamma+\alpha} x_{\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\alpha} x_{\beta+\delta+\alpha} x_{\gamma+\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\delta+\alpha}$, $n \geq 2$, где суммирование в сумме \sum_{α} производится по всем α и в сумме $\sum_{(2)}$ — по всем наборам (β, γ, δ) , для которых пространство, натянутое на векторы β, γ, δ , имеет размерность 2. Покажем, что для многочлена $\Delta(x) = \sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 x_{\alpha_4}^2$, где суммирование в \sum производится по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ с попарно различными элементами таким, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, выполнено

$$\Gamma_2(x) = 7\Delta(x).$$

Очевидно, многочлены $\Gamma_2(x)$ и $\Delta(x)$ содержат одни и те же мономы. Каждый моном в любом из этих многочленов встречается одинаковое число раз, поэтому $\Gamma_2(x) = q\Delta(x)$. Вычислим число слагаемых Y_1, Y_2 у сумм, представляющих эти два многочлена, что позволит вычислить q .

Область суммирования суммы $\sum_{(2)}$ разбивается на семь непересекающихся множеств: тройки вида $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, вида $(0, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, 0, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ и вида $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$, $\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$. Число троек каждого вида равно $(N-1)(N-2)$, т.е. сумма $\sum_{\alpha} \sum_{(2)}$ содержит $Y_1 = 7N(N-1)(N-2)$ слагаемых.

Очевидно, число $Y_2 = 2^n(2^n - 1)(2^n - 2)$, ибо $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ и $\alpha_4 \neq \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ попарно различны, т.е. $q = 7$.

3. $\Gamma_1 := \sum_{\alpha} \sum_{(1)} x_{\alpha} x_{\beta+\alpha} x_{\gamma+\alpha} x_{\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\alpha} x_{\beta+\delta+\alpha} x_{\gamma+\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\delta+\alpha}$, $n \geq 1$, где суммирование в сумме $\sum_{(1)}$ производится по всем α и всем наборам (β, γ, δ) , для которых пространство, натянутое на векторы β, γ, δ , имеет размерность 1. Покажем, что многочлен $\Gamma_1(x)$ может быть представлен в виде

$$\Gamma_1(x) = 7 \sum x_{\alpha_1}^4 x_{\alpha_2}^4 = 7\Omega(x),$$

где суммирование в сумме \sum производится по всем наборам (α_1, α_2) с различными элементами.

Действительно, многочлены $\Gamma_1(x)$, $\Omega(x)$ образованы одними и теми же мономами $x_{\alpha_1}^4 x_{\alpha_2}^4$. Число слагаемых у суммы, представляющей многочлен $\Gamma_1(x)$, равно $7N(N-1)$, ибо имеется $N-1$ одномерных пространств $L = \{0, a\}$, $a \neq 0$, и каждое из них может быть представлено как пространство, натянутое на векторы семи различных наборов (β, γ, δ) : 1 набор (a, a, a) , $a \neq 0$, и 3 набора (β, γ, δ) с двумя элементами a и одним 0 , 3 набора (β, γ, δ) с одним элементом a и двумя 0 . Число слагаемых у суммы $\sum x_{\alpha_1}^4 x_{\alpha_2}^4$ равно $N(N-1)$.

4. $\Gamma_0(x) := \sum_{\alpha} \sum_{(0)} x_{\alpha} x_{\beta+\alpha} x_{\gamma+\alpha} x_{\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\alpha} x_{\beta+\delta+\alpha} x_{\gamma+\delta+\alpha} x_{\beta+\gamma+\delta+\alpha}$, $n \geq 1$, где суммирование в сумме $\sum_{(0)}$ производится по всем α и всем наборам (β, γ, δ) , для которых пространство, натянутое на векторы β, γ, δ , имеет размерность 0, т.е. сумма $\sum_{(0)}$ имеет одно слагаемое с $(\beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0)$. Число слагаемых в сумме $\sum_{\alpha} \sum_{(0)}$ равно N .

5. $\Phi(x) := \sum' x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 x_{\alpha_4}^2$, где суммирование в \sum' производится по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ с попарно различными элементами такими, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$.

Далее будем полагать, что суммирование в \sum производится по всем наборам $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$ с попарно различными элементами и с соответствующим значением k .

$$6. \Upsilon(\mathbf{x}) := \sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^4.$$

$$7. \Xi(\mathbf{x}) := \sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^6.$$

Следует заметить, что все эти многочлены являются многочленами вида $c_{\beta} x_{\beta}^U$ с соответствующими наборами β и постоянными c_{β} . Например, для $\Gamma_3(\mathbf{x})$ $\beta = (0, e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.

Лемма 6. *Базис пространства $L_8(\mathcal{U})$ \mathcal{U} -инвариантных многочленов степени 8, где $\mathcal{U} := \langle \mathcal{E}, \mathcal{D} \rangle$, образован многочленами Γ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, $\Phi(\mathbf{x})$, $\Upsilon(\mathbf{x})$, $\Xi(\mathbf{x})$.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{P}$ — подстановочная матрица, реализующая аффинное отображение $\mathbf{x} \mapsto Q\mathbf{x} + \alpha$ пространства \mathbb{F}_2^n в себя, и $E_f \in \mathcal{E}$. Так как $E_f P = P E_{f'}$, где $f'(\mathbf{x}) = f(\pi^{-1}\mathbf{x})$, то любой элемент U из \mathcal{U} может быть представлен как $U = P E_f$.

Отсюда с учетом равенства $P x_{\beta_1} \dots x_{\beta_s} = x_{\pi(\beta_1)} \dots x_{\pi(\beta_s)}$ вытекает, что \mathcal{U} -инвариантными многочленами являются многочлены $x_{\beta}^P = |\mathcal{P}|^{-1} \sum_{P \in \mathcal{P}} P x_{\beta}$, у которых x_{β} — один из \mathcal{E} -инвариантных мономов из леммы 5.

Если вычислить многочлен x_{β}^P для всех типов \mathcal{E} -инвариантных мономов x_{β} , перечисленных в лемме 5, и учесть, что группа \mathcal{P} , действующая на \mathbb{F}_2^n , является трижды транзитивной, то мы получим список многочленов из условия леммы. Очевидно, эти многочлены являются линейно-независимыми. Лемма доказана.

Замечание. Пусть G_0 — подгруппа группы G и $L_t(G)$ и $L_t(G_0)$ — пространства G -инвариантных и G_0 -инвариантных многочленов из $H(t)$. Тогда $L_t(G) \subseteq L_t(G_0)$.

Лемма 7. *Пусть $n \geq 3$ и L — пространство, натянутое на шесть многочленов Γ_i , $i = 0, 1, 2$, $\Psi(\mathbf{x})$, $\Upsilon(\mathbf{x})$, $\Xi(\mathbf{x})$ от 2^n переменных. Тогда в пространстве $H(8) \cap L$ нет ненулевых $\Phi_{n,2}$ -инвариантных многочленов, т.е. пространство $H(8) \cap L$ нульмерно.*

Доказательство. В работе [14] автора показано (с использованием результатов работ [3, 4]), что орбитный код $\Phi_{n,2}\mathbf{x}$ является 7-дизайном при любом $\mathbf{x} \in S_{N-1}$. Отсюда и из леммы 2 сразу вытекает, что в $H(7)$ нет $\Phi_{n,2}$ -инвариантных многочленов. Поэтому если в $H(8)$ имеется ненулевой $\Phi_{n,2}$ -инвариантный многочлен $I(\mathbf{x})$, то он принадлежит $\text{Harm}(8)$. Обозначим через $\text{Pr}(J(\mathbf{x}))$ проекцию однородного многочлена $J(\mathbf{x})$ степени 8 на подпространство $\text{Harm}(8)$ (см. [2]).

Легко проверить, что

$$\text{i. } \Xi(\mathbf{x}) + \Gamma_0(\mathbf{x}) = r^2 (\sum x^6), \text{ где } r^2 = \sum x^2;$$

$$\text{ii. } \Upsilon(\mathbf{x}) + \Xi(\mathbf{x}) + \Gamma_1(\mathbf{x})/7 = r^2 (\sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^4);$$

$$\text{iii. } 3\Upsilon(\mathbf{x}) + \Gamma_2(\mathbf{x})/4 + \Phi(\mathbf{x}) = r^2 (\sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2).$$

Так как $\text{Pr}(r^2\Pi(\mathbf{x})) = 0$ для любого $\Pi(\mathbf{x})$ степени 6, то из i, ii, iii вытекает, что среди 6 многочленов $\text{Pr}(\Gamma_i(\mathbf{x}))$, $i = 0, 1, 2$, $\text{Pr}(\Phi(\mathbf{x}))$, $\text{Pr}(\Upsilon(\mathbf{x}))$, $\text{Pr}(\Xi(\mathbf{x}))$ имеется не более трех линейно-независимых, и в качестве последних мы можем взять многочлены $\text{Pr}(\Gamma_i(\mathbf{x}))$, $i = 0, 1, 2$.

Таким образом, мы показали с учетом замечания, что если в $H(8) \cap L$ имеется ненулевой $\Phi_{n,2}$ -инвариантный многочлен $I(\mathbf{x})$, то он принадлежит подпространству, натянутому на многочлены $\text{Pr}(\Gamma_i(\mathbf{x}))$, $i = 0, 1, 2$.

Проекция $\text{Pr}(J(\mathbf{x}))$ может быть представлена в виде

$$\text{Pr}(J(\mathbf{x})) = \sum_{k=0}^4 h_k r^{2k} \Delta^k J(\mathbf{x}), \quad h_0 = 1, \quad (9)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$ и h_k — некоторые константы (см. [6, с. 440]).

Пусть $I(\mathbf{x}) = a_0 \text{Pr}(\Gamma_0(\mathbf{x})) + a_1 \text{Pr}(\Omega(\mathbf{x})) + a_2 \text{Pr}(\Delta(\mathbf{x}))$, где $\Omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{7}\Gamma_1(\mathbf{x})$, $\Delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{7}\Gamma_2(\mathbf{x})$.

Из [9], леммы 1 и из того, что в пространстве $H(7)$ отсутствуют $\Phi_{n,0}$ -инвариантные многочлены, вытекает, что для $\Phi_{n,2}$ -инвариантного гармонического многочлена $I(\mathbf{x})$ степени 8 выполнено

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) &= (a_0 \text{Pr}(\Gamma_0(\mathbf{x})) + a_1 \text{Pr}(\Omega(\mathbf{x})) + a_2 \text{Pr}(\Delta(\mathbf{x})))^{\Phi_{n,2}} \\ &= a_0 \Gamma_0(\mathbf{x}) + a_1 \Omega(\mathbf{x}) + a_2 \Delta(\mathbf{x}) - b \left(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 \right)^4. \end{aligned}$$

С учетом соотношения $(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2)^3 = \sum_{\alpha} x_{\alpha}^6 + 3 \sum_{\alpha \neq \beta} x_{\alpha}^2 x_{\beta}^4 + \sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2$ коэффициенты a_i , b определяются из соотношения

$$\begin{aligned} \Delta I(\mathbf{x}) &= 8 \cdot 7 a_0 \sum_{\alpha} x_{\alpha}^6 + 24 a_1 \sum_{\alpha \neq \beta} x_{\alpha}^2 x_{\beta}^4 \\ &\quad + 8 a_2 \sum x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 - 8(N+6)b \left(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 \right)^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, если $I(\mathbf{x})$ — ненулевой многочлен, то $I(\mathbf{x}) = (\Gamma_0(\mathbf{x}) + 7\Omega(\mathbf{x}) + 7\Delta(\mathbf{x})) - 7(N+6)^{-1}(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2)^4 = \Gamma_0(\mathbf{x}) + \Gamma_1(\mathbf{x}) + \Gamma_2(\mathbf{x}) - 7(N+6)^{-1}(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2)^4$.

Таким образом, мы показали, что пространство $\Phi_{n,2}$ -инвариантных многочленов не более, чем одномерно.

$I(x) - \Phi_{n,2}$ — инвариантный многочлен, поэтому $I(H(\{1, \dots, 2i\})e_1) = I(e_1)$, $i = 0, \dots, [n/2]$, где $H(\{1, \dots, 2i\})$ — блочно-диагональная матрица из $\Phi_{n,2}$, блоками которой являются $2^{2i} \times 2^{2i}$ -матрицы Адамара ($H(\{1, \dots, j\})$ определена в доказательстве леммы 4 и принадлежит $\Phi_{n,2}$ только при четных j). Следовательно, если одно из последних равенств не выполнено, то $I(x)$ — не $\Phi_{n,2}$ -инвариантный многочлен.

Легко вычислить $I(e_1) = I(H(\{1\})e_1) = I(H(\{1, 2\})e_1) = 1 - 7(N + 6)^{-1}$, $I(H(\{1, 2, 3\})e_1) = 43/64 - 7(N + 6)^{-1}$, $I(H(\{1, 2, 3, 4\})e_1) = 197/512 - 7(N + 6)^{-1}$. Отсюда вытекает, что $I(x)$ не является $\Sigma_{n,2}$ -инвариантным при $n \geq 3$ и не является $\Phi_{n,2}$ -инвариантным при $n \geq 4$, ибо $H(\{1, 2, 3\}) \notin \Phi_{n,2}$.

Многочлен $I(x)$ не является $\Phi_{n,2}$ -инвариантным при $n = 3$ по следующей причине. Пусть $c = 2^{-3/2}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Тогда $21/64 = I(c) \neq I(H(\{1, 2\})c) = 1/2$.

Таким образом, предположение о существовании $\Phi_{n,2}$ -инвариантного ненулевого многочлена приводит к противоречию при $n \geq 3$, что доказывает лемму. •

Отметим, что в $H(8) \cup L$ существуют $\Phi_{n,2}$ -инвариантные многочлены $I(x)$ при $n = 1, 2$ (см. теорему 1).

Теорема 1. *Пространство \mathcal{I}_n гармонических $\Phi_{n,2}$ -инвариантных многочленов степени 8 при $n \geq 1$ является одномерным. Ее образующей является $\Lambda(x) = \Lambda^{(n)}(x) = \Gamma(x) - 7/(N + 6)(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2)^4 \in \text{Harm}(8)$, где*

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} x_{\alpha} x_{\beta+\alpha} x_{\gamma+\alpha} x_{\delta+\alpha} x_{\gamma+\beta+\alpha} x_{\gamma+\delta+\alpha} x_{\beta+\delta+\alpha} x_{\gamma+\beta+\delta+\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^3 \Gamma_i(x). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $\Gamma(x)$ является Σ_n -инвариантным многочленом. По построению $\Gamma(x)$ — \mathcal{U} -инвариантный многочлен и по лемме 3 $\Sigma_n = \langle \mathcal{U}, H \rangle$, поэтому для доказательства этого достаточно показать, что $\Gamma(x) = \Gamma(Hx)$. Отметим, что $\Phi_{n,2} \subseteq \Sigma_n$, поэтому $\Gamma(x)$ будет являться и $\Phi_{n,2}$ -инвариантным многочленом.

Имеем

$$\begin{aligned}
 \Gamma(Hx) &= 2^{-4n} \sum_{\alpha, \gamma, \beta, \delta} \left(\sum_{\theta_1} (-1)^{(\alpha, \theta_1)} x_{\theta_1} \right) \left(\sum_{\theta_2} (-1)^{(\beta + \alpha, \theta_2)} x_{\theta_2} \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{\theta_3} (-1)^{(\gamma + \alpha, \theta_3)} x_{\theta_3} \right) \left(\sum_{\theta_4} (-1)^{(\delta + \alpha, \theta_4)} x_{\theta_4} \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{\theta_5} (-1)^{(\beta + \gamma + \alpha, \theta_5)} x_{\theta_5} \right) \left(\sum_{\theta_6} (-1)^{(\beta + \delta + \alpha, \theta_6)} x_{\theta_6} \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{\theta_7} (-1)^{(\gamma + \delta + \alpha, \theta_7)} x_{\theta_7} \right) \left(\sum_{\theta_8} (-1)^{(\beta + \gamma + \delta + \alpha, \theta_8)} x_{\theta_8} \right) \\
 &= 2^{-3n} \sum_{\theta} \sum_{\beta, \gamma, \delta} (-1)^{(\beta, \theta_2 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_8) + (\gamma, \theta_3 + \theta_5 + \theta_7 + \theta_8) + (\delta, \theta_4 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8)} \\
 &\quad \times x_{\theta_1} x_{\theta_2} x_{\theta_3} x_{\theta_4} x_{\theta_5} x_{\theta_6} x_{\theta_7} x_{\theta_8} \\
 &= \sum'_{\theta} x_{\theta_1} x_{\theta_2} x_{\theta_3} x_{\theta_4} x_{\theta_5} x_{\theta_6} x_{\theta_7} x_{\theta_8},
 \end{aligned}$$

где суммирование в сумме \sum_{θ} производится по всем наборам $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8)$ таким, что $\sum_{i=1}^8 \theta_i = 0$, а в сумме \sum'_{θ} по всем наборам θ , для которых $\theta_2 + \theta_5 + \theta_6 + \theta_8 = 0$, $\theta_3 + \theta_5 + \theta_7 + \theta_8 = 0$, $\theta_4 + \theta_6 + \theta_7 + \theta_8 = 0$ и $\sum_{i=1}^8 \theta_i = 0$.

Выписанная система линейных уравнений имеет ранг 4, и все ее решения могут быть записаны в виде $\theta_1 = \kappa$, $\theta_2 = \psi_1 + \kappa$, $\theta_3 = \psi_2 + \kappa$, $\theta_4 = \psi_1 + \psi_2 + \kappa$, $\theta_5 = \psi_3 + \kappa$, $\theta_6 = \psi_1 + \psi_3 + \kappa$, $\theta_7 = \psi_2 + \psi_3 + \kappa$, $\theta_8 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \kappa$. Отсюда вытекает, что $\Gamma(x) = \Gamma(Hx)$.

Проверка равенства $\Delta\Lambda(x) = 0$ с учетом равенств, полученных при доказательстве леммы 7, не может представить затруднений.

Пусть $n \geq 3$ и имеется другой $\Phi_{n,2}$ -инвариантный гармонический многочлен $\Lambda'(x)$, не пропорциональный $\Lambda(x)$. Из леммы 7 вытекает, что одним из его слагаемых является многочлен Γ_3 . Поэтому разность $a\Lambda(x) - b\Lambda'(x)$ с подходящими коэффициентами a и b будет ненулевым $\Phi_{n,2}$ -инвариантным многочленом из пространства L . Это противоречит лемме 7, т.е. $\Lambda(x) = d\Lambda'(x)$.

Так как $\Lambda^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, — ненулевые $\Phi_{n,2}$ -инвариантные многочлены, а из доказательства леммы 7 следует, что пространство гармонических многочленов L , к которому принадлежит $\Lambda^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$, не более чем одномерно, то одномерными являются и I_i , $i = 1, 2$, пространства $\Phi_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов. •

Как нетрудно вычислить, $\Lambda^{(1)}(\mathbf{x}) = x_{\alpha_1}^8 + x_{\alpha_2}^8 + 14x_{\alpha_1}^4 x_{\alpha_2}^4 - \frac{7}{8}(x_{\alpha_1}^2 + x_{\alpha_2}^2)^4$ и $\Lambda^{(2)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^4 x_{\alpha_i}^8 + 7 \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j} x_{\alpha_i}^4 x_{\alpha_j}^4 + 168 \prod_{i=1}^4 x_{\alpha_i}^2 - \frac{7}{10}(\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2)^4$.

Отметим, что при нечетных n многочлен $\Lambda(\mathbf{x})$ является одновременно $\Sigma_{n,2}$ -инвариантным, ибо $\Sigma_n = \Sigma_{n,2}$ при нечетном n . При четном n имеем $\Sigma_n = \Phi_{n,2}$ и $\Lambda(\mathbf{x})$ не обязан быть $\Sigma_{n,2}$ -инвариантным. Однако $\Sigma_{n,2}$ -инвариантным будет многочлен $\Lambda'(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda(H(\mathbf{e}_1)\mathbf{x})$, если он отличен от нуля. Последнее выполнено, ибо, используя явный вид многочлена $\Lambda(\mathbf{x})$, нетрудно вычислить, что $\Lambda'(\mathbf{e}_1) = 2\Lambda(\mathbf{e}_1) \neq 0$. Таким образом, $\Lambda(\mathbf{x}) - \Sigma_{n,2}$ -инвариантный многочлен при всех n . Следует заметить, что $\Sigma_{n,2}$ -инвариантные и $\Phi_{n,2}$ -инвариантные многочлены десятой степени различны (см. §5).

§5. $\Sigma_{n,2}$ -инвариантные гармонические многочлены десятой степени отсутствуют

Будем обозначать через L_1 -пространство \mathcal{U} -инвариантных многочленов, которые получаются \mathcal{U} -усреднением одночленов, удовлетворяющих условию ii.1.

План доказательства отсутствия $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов 10-й степени. Мы доказываем, что

1. Пространство $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных многочленов вида \mathbf{x}_β , где β — удовлетворяет ii.2 или ii.3, принадлежит $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \text{Hom}(8)$, т.е. $\Sigma_{n,2}$ -инвариантные гармонические многочлены 10-й степени, если они существуют, принадлежат пространству L_1 (лемма 8).

2. Пространство $L_1 \cap \text{Harm}(10) = \langle N_{10}, N_{6,4}, N_{4,2,2,2}^{(0)} \rangle$ не содержит $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных многочленов 10-й степени (лемма 9).

Пусть $n \geq 4$ и $\beta_0 = (0^3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\beta_1 = (\mathbf{e}_4^2, 0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ — наборы, которые удовлетворяют условию ii.3 и ii.2 леммы 5 соответственно, и $\beta = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\omega = (\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$. При $n \geq 3$ положим $I_{\beta_i} = c_i(\mathbf{x}_{\beta_i})^{\mathcal{U}}$, $i = 0, 1$, постоянную c_i выберем так, чтобы коэффициент при \mathbf{x}_{β_i} был равен 1. При $n = 1, 2$ полагаем $I_{\beta_i} = 0$. Отметим, что $I_{\beta_0} + I_{\beta_1} = (\mathbf{x}, \mathbf{x})I_\beta$ и $c_0 = (2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 4)(2^n - 8) \dots (2^n - 2^{n-1})$, $c_1 = 8(2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 4)(2^n - 16) \dots (2^n - 2^{n-1})$.

Лемма 8. $(\mathbf{x}_{\beta_i})^{\Sigma_{n,2}} \in \text{Hom}(8)$, $i = 0, 1$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $i = 0$. Случай $i = 1$ рассматривается совершенно аналогично.

Как нетрудно проверить, $(\mathbf{x}_{\beta_0})^U = (\mathbf{x}, \mathbf{x})\Gamma_3(\mathbf{x})$, поэтому далее будем полагать, что $n \geq 4$. Для матрицы $H(\mathbf{e}_4) \in \Sigma_{n,2}$, определенной в §3, имеем

$$\begin{aligned} H(\{\mathbf{e}_4\})\mathbf{x}_{\beta_0} &= 2^{-5}(x_0 + x_{e_4})^3(x_{e_1} + x_{e_1+e_4})(x_{e_2} + x_{e_2+e_4})(x_{e_3} + x_{e_3+e_4}) \\ &\quad \times (x_{e_1+e_2} + x_{e_1+e_2+e_4})(x_{e_1+e_3} + x_{e_1+e_3+e_4})(x_{e_2+e_3} + x_{e_2+e_3+e_4}) \\ &\quad \times (x_{e_1+e_2+e_3} + x_{e_1+e_2+e_3+e_4}) \\ &= 2^{-5}(\mathbf{x}_{\beta_0} + 3\mathbf{x}_{\gamma_0} + 3\mathbf{x}_{\delta_0} + \mathbf{x}_{\omega_0}) + S, \end{aligned} \quad (10)$$

где S — члены, которые не удовлетворяют условиям ii.1–ii.3, т.е. члены, которые при усреднении по \mathcal{E} уйдут в 0, и $\gamma_0 = (e_4^2, 0, e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$, $\delta_0 = (0^2, e_4, e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $\omega_0 = (e_4^3, e_1 + e_4, e_2 + e_4, e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Наборы β_0 и ω_0 являются наборами, удовлетворяющими свойству ii.3, а наборы γ_0 и δ_0 — свойству ii.2.

Из (10) вытекает, что

$$(H(\{\mathbf{e}_4\})\mathbf{x}_{\beta_0})^U = 2^{-5}(2c_0^{-1}I_{\beta_0} + 6c_1^{-1}I_{\beta_1}).$$

С другой стороны,

$$(I_{\beta_0})^{\Sigma_{n,2}} = ((H(\mathbf{e}_4)\mathbf{x}_{\beta_0})^U)^{\Sigma_{n,2}} = 2^{-5}(2c_0^{-1}I_{\beta_0}^{\Sigma_{n,2}} + 6c_1^{-1}I_{\beta_1}^{\Sigma_{n,2}}).$$

Прибавим к обеим частям равенства $2^{-5}(6c_1^{-1} - 2c_0^{-1})I_{\beta_0}^{\Sigma_{n,2}}$. В результате получим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{32}(6c_1^{-1} - 2c_0^{-1})\right)(I_{\beta_0})^{\Sigma_{n,2}} &= \frac{6}{32}c_1^{-1}(I_{\beta_0} + I_{\beta_1})^{\Sigma_{n,2}} \\ &= \frac{6}{32}c_1^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x})(I_{\beta})^{\Sigma_{n,2}}, \end{aligned}$$

т. е. $I_{\beta_0}^{\Sigma_{n,2}} = c(\mathbf{x}_{\beta_i})^{\Sigma_{n,2}} \in (\mathbf{x}, \mathbf{x})\text{Hom}(8)$. Отметим, что $1 + \frac{1}{32}(6c_1^{-1} - 2c_0^{-1}) = 1 + \frac{1}{32}(6 \cdot ((2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 4)(2^n - 8) \dots (2^n - 2^{n-1}))^{-1} - 2(8(2^3 - 1)(2^3 - 2)(2^3 - 4)(2^n - 16) \dots (2^n - 2^{n-1}))^{-1}) \neq 0$. •

Переходим к изучению гармонических многочленов, которые могут быть получены из одночленов, которые удовлетворяют условию ii.1. Положим $M_{i,j,k} :=$

$(x_{\alpha_1}^i x_{\alpha_2}^j x_{\alpha_3}^k)^U$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (\alpha_s \in \mathbb{F}_2^n)$ — попарно различные индексы. Отметим, что многочлен $M_{i,j,k}$ не зависит от выбора набора $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Совершенно также введем многочлены $M_{i,j}$ и M_i .

Положим $M_{4,2,2,2}^{(0)} := (x_{\alpha_1}^4 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 x_{\alpha_4}^2)^U$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, $M_{4,2,2,2}^{(1)} := (x_{\alpha_1}^4 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 x_{\alpha_4}^2)^U$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — попарно различные векторы; $M_{2,2,2,2,2}^{(0)} := (x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 x_{\alpha_4}^2 x_{\alpha_5}^2)^U$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, $M_{2,2,2,2,2}^{(1)} := (x_{\alpha_1}^2 x_{\alpha_2}^2 x_{\alpha_3}^2 x_{\alpha_4}^2 x_{\alpha_5}^2)^U$, если для любого i четыре ненулевых вектора из множества $\{\alpha_1 - \alpha_i, \alpha_2 - \alpha_i, \alpha_3 - \alpha_i, \alpha_4 - \alpha_i, \alpha_5 - \alpha_i\}$ линейно-независимы, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ — попарно различные векторы.

Лемма 9. *Пространство L_1 не содержит $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных многочленов.*

Доказательство. U -инвариантные многочлены, получаемые усреднением по U из мономов, удовлетворяющих условию ii.1, следующие:

- | | | |
|----------------|--------------------------|----------------------------|
| 1. M_{10} , | 4. $M_{6,2,2}$, | 7. $M_{4,2,2,2}^{(1)}$, |
| 2. $M_{8,2}$, | 5. $M_{4,4,2}$, | 8. $M_{2,2,2,2,2}^{(0)}$, |
| 3. $M_{6,4}$, | 6. $M_{4,2,2,2}^{(0)}$, | 9. $M_{2,2,2,2,2}^{(1)}$. |

Очевидно, при подходящих константах $c_{i,j,k,\dots}$ имеем

i. $(x, x)M_8 = c_8 M_{10} + c'_{10} M_{8,2}$.

ii. $(x, x)M_{6,2} = c_{6,2} M_{8,2} + c'_{6,2} M_{6,4} + c''_{6,2} M_{6,2,2}$.

iii. $(x, x)M_{4,4} = c_{4,4} M_{6,4} + c'_{4,4} M_{4,4,2}$.

iv. $(x, x)M_{6,2,2} = c_{6,2,2} M_{6,2,2} + c'_{6,2,2} M_{4,4,2} + c''_{6,2,2} M_{4,2,2,2}^{(0)} + c'''_{6,2,2} M_{4,2,2,2}^{(1)}$.

v. $(x, x)M_{2,2,2,2,2}^{(0)} = c_{2,2,2,2,2} M_{4,2,2,2,2}^{(0)} + c'_{2,2,2,2,2} M_{2,2,2,2,2}^{(0)}$.

vi. $(x, x)M_{2,2,2,2,2}^{(1)} = c M_{4,2,2,2,2}^{(1)} + c' M_{2,2,2,2,2}^{(0)} + c'' M_{2,2,2,2,2}^{(1)}$.

Положим $N_{*,*,\dots} = \text{Pr}_{10}(M_{*,*,\dots})$, где $\text{Pr}_{10}(J(x))$ — проекция многочлена $J(x)$ на $\text{Harm}(10)$. Проекции левых частей равенств i–vi на $\text{Harm}(10)$ равны 0. Поэтому 9 многочленов $N_{*,*,\dots}$, как можно легко проверить, линейно выражаются через 3 многочлена $N_{10}, N_{6,4}, N_{4,2,2,2}^{(0)}$.

Таким образом, если имеется $\Sigma_{n,2}$ -инвариантный гармонический многочлен $I(x)$, принадлежащий пространству, натянутому на 9 многочленов $N_{*,*,\dots}$, то он имеет вид

$$\begin{aligned} I(x) &= a_0 N_{10} + a_1 N_{6,4} + a_3 N_{4,2,2,2}^{(0)} \\ &= a_0 M_{10} + a_1 M_{6,4} + a_2 M_{4,2,2,2}^{(0)} + a_3 (x, x)^5 + b(x, x)\Lambda(x). \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из (9) и того, что $\text{Harm}(8)$ содержит единственный инвариантный многочлен $\Lambda(x)$, а пространства $\text{Harm}(j)$, $j = 1, \dots, 7$, не содержат $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных многочленов [14]. Коэффициент b равен нулю, ибо в многочлен $\Lambda(x)$ входят мономы из $\Gamma_3(x)$, не выражающиеся через многочлены $M_{*,*,\dots}$.

Коэффициенты a_i удовлетворяют условию $\Delta I(x) = 10a_0M_8 + 12a_1M_{6,2} + 30a_2M_{4,4} + 12a_2M_{2,2,2,2}^{(0)} + 12a_2M_{4,2,2} + 10(N+8)a_3(x,x)^4 = 0$. Отметим, что $(x,x)^4 = M_8 + 4M_{6,2} + 6M_{4,4} + M_{2,2,2,2}^{(0)} + M_{2,2,2,2}^{(1)}$. Отсюда вытекает, что $a_3 = 0$, ибо при $a_3 \neq 0$ коэффициент при многочлене $M_{2,2,2,2}^{(1)}$ у $\Delta I(x)$, равный a_3 , будет отличен от 0, а $M_{2,2,2,2}^{(1)}$ линейно не выражается через многочлены $M_{6,2}$, $M_{4,4}$, $M_{2,2,2,2}^{(0)}$, $M_{4,2,2}$. Коэффициенты a_i , $i = 0, 1, 2$, также равны 0, ибо многочлены $M_{6,2}, \dots, M_{2,2,2,2}^{(0)}$ — линейно-независимы. •

Теорема 2. При $n \geq 1$ множество $\Sigma_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов 10 степени пусто.

Доказательство непосредственно вытекает из лемм 8 и 9. •

Отметим, что множество $\Phi_{n,2}$ -инвариантных гармонических многочленов 10 степени не пусто по крайней мере для $n = 3, 4, 5, 6$.

§6. 9- и 11-дизайны в 2^n -мерном евклидовом пространстве

Теорема 3. Пусть $a \in S^{2^n}$ — корень многочлена $\lambda^{(n)}(x)$. Тогда орбита $X = \Phi_{n,2}a$ является 9-дизайном, орбита $X = \Phi_{n,2}a$ — 11-дизайном.

Доказательство. Так как $-E \in \Phi_{n,2}$, то для любого $f(x) \in \text{Hom}(2k+1)$ выполнено $f(x)^{\Phi_{n,2}} = 0$, т.е. $\Phi_{n,2}$ -инвариантных многочленов нечетной степени не существует. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы. •

Отметим, что у многочлена $\Lambda^{(n)}(x)$ всегда имеется корень на S^{N-1} , ибо он является многочленом с нулевым средним.

Укажем естественный способ (среди множества других возможных способов) вычисления некоторых корней многочлена $\Lambda^{(n)}(x)$. Предположим, что известны две точки a и b такие, что $\Lambda^{(n)}(a) \geq 0$, $\Lambda^{(n)}(b) \leq 0$. Пусть $x = (1 + \sin 2x(a, b))^{-1/2}(a \sin x + b \cos x)$ — точка на S^{N-1} и x_0 — любой корень тригонометрического многочлена $q(x) = (1 + \sin 2x(a, b))^4 \Lambda^{(n)}(x)$, $0 \leq x_0 \leq \pi/2$. Тогда $x_0 = (1 + \sin 2x_0(a, b))^{-1/2}(a \sin x_0 + b \cos x_0)$ — корень $\Lambda^{(n)}(x)$.

Пусть $a = N^{-1/2}(1, \dots, 1)$. Как нетрудно вычислить, при $\Lambda^{(n)}(a) = 1 - 7/(N+6) \geq 0$. Указать точку b , для которой $\Lambda^{(n)}(b) \leq 0$, значительно сложнее. Будем полагать, что далее координаты векторов a индексируются элементами F_2^n ,

расположенными в лексикографическом порядке так, что первая координата занумерована нулевым вектором из F_2^n .

Рассмотрим случай $n = 2$. Положим $\mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{j} = (1, 0, 0, 0)$. Рассмотрим многочлен $q(x) = \Lambda^{(2)}(\mathbf{i} \sin x + \mathbf{j} \cos x) = \cos^8 x + \frac{14}{3} \cos^4 x \sin^4 x + \frac{56}{9} \cos^2 x \sin^6 x + \frac{5}{9} \sin^8 x - \frac{7}{10}$. Так как $q(\pi/2) = \Lambda^{(2)}(\mathbf{i}) = -\frac{49}{270}$, $q(0) = \Lambda^{(2)}(\mathbf{j}) = \frac{3}{10}$, то многочлен $q(x)$ имеет корень x_0 на интервале $0 \leq x \leq \pi/2$.

Стабилизатор точки $\mathbf{a} = \mathbf{i} \sin x_0 + \mathbf{j} \cos x_0$ состоит из 6 элементов $P(Q, 0)$, которые оставляют элемент с индексом $0 = (0, 0)$ на месте.

Таким образом, мы построили 9-дизайн $\Phi_{2,2\mathbf{a}}$ и 11-дизайн $\Sigma_{2,2\mathbf{a}}$ на сфере S^3 в четырехмерном евклидовом пространстве, который содержит $|\Phi_{2,2}|/6 = 96$ и 192 элемента соответственно.

В случае $n = 3$ положим $\mathbf{b}_0 = 2^{-3/2}(-1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{a}_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Как показывают вычисления, $\Lambda^{(3)}(\mathbf{b}_0) = -0,15625$, $\Lambda^{(3)}(\mathbf{a}_0) = 1/2$. Стабилизатор точки $\mathbf{c} = \mathbf{a} \sin x_0 + \mathbf{b} \cos x_0$, где x_0 — корень многочлена $q(x)$, состоит из 168 элементов вида $P(Q, 0)$, т.е. орбитный 9-дизайн $\Phi_{3,2\mathbf{c}}$ на S^7 содержит 15360 элементов, а 11-дизайн $\Sigma_{3,2\mathbf{c}_0}$ — 30720 элементов.

Выражаю благодарность Л. С. Казарину, С. П. Стрункову за полезные советы.

Список литературы

- [1] Goethals J.-M., Seidel J. J., *Cubature formulae, polytopes, and spherical designs*, Geometric Vein (C. Devis, B. Grunbaum, and F. A. Sherk, eds.), Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981, pp. 203-218.
- [2] Delsarte Ph., Goethals J.-M., Seidel J. J., *Spherical codes and designs*, Geom. Dedicata 6 (1977), 363-388.
- [3] Goethals J.-M., Seidel J. J., *Spherical designs*, Relations between Combinatorics and other Parts of Mathematics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 34, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, pp. 255-272.
- [4] Bannai E., *On some spherical t-designs*, J. Combin. Theory Ser. A 26 (1979), 157-161.
- [5] Bannai E., *Spherical t-designs which are orbits of finite groups*, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), no. 2, 341-354.
- [6] Стейн И., Вейс Г., *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [7] Виленкин Н. Я., *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [8] MacWilliams F. J., Sloane N. J. A., *The theory of error-correcting codes*, North-Holland Math. Library, vol. 16, North-Holland Publishing Co., Amsterdam etc., 1977.
- [9] Кострикин А. И., *Введение в алгебру*, Наука, М., 1977.
- [10] Huffman W. C., Sloane N. J. A., *Most primitive groups have messy invariants*, Adv. Math. 32 (1979), 118-127.
- [11] Конвей Дж., Слоэн Н., *Упаковки шаров, решетки и группы*, Мир, М., 1990.
- [12] Горенштейн Д., *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, Мир, М., 1985.

- [13] Сидельников В. М., *Об одной конечной матричной группе и кодах на евклидовой сфере*, Пробл. передачи информ. 33 (1997), № 1, 35–54.
- [14] Side'nikov V. M., *Spherical 7-designs in 2ⁿ-dimensional Euclidean space*. (Предложено в J. Algebraic Combin.).
- [15] Казарин Л. С., *О группах, предложенных Сидельниковым*, Мат. сб. 189 (1998), № 7, 131–144.

Поступило 16 февраля 1998 г.