

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Поташев, А. В. Рубиновский, Струйные гидродинамические схемы пробивания двухслойных преград взрывом,  
*Тр. сем. по краев. задачам*, 1987, выпуск 23, 175–182

<https://www.mathnet.ru/kukz95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

18 мая 2025 г., 16:01:25



Поташев А. В., Рубиновский А. В.

## СТРУЙНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ПРОБИВАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ПРЕГРАД ВЗРЫВОМ

Наряду с задачами расчета пробоев, образованных взрывами зарядов взрывчатого вещества в однородных преградах (см., например, [1—3]), представляет интерес расчет пробоев в неоднородных, в частности в слоистых, преградах. Как показано в работах [4, 5], когда слои имеют одинаковую плотность и разную прочность, к исследованию можно с успехом применять твердожидкостную модель взрыва на выброс (см., например, [6]). Различные варианты этой модели применительно к задачам взрыва в сплошной среде были разработаны и детально исследованы в работах [7—9].

В настоящей работе по двум вариантам твердожидкостной модели взрыва в слоистой среде исследуется плоская задача о пробивании двухслойной преграды взрывом поверхностного шнуrowого заряда постоянной толщины.

**1. Постановка задачи.** Пусть преграда толщины  $H$  состоит из двух слоев одинаковой плотности, но различной прочности. Верхний слой толщины  $h$  характеризуется критической скоростью  $v_1$ , а нижний слой толщины  $H-h$  — критической скоростью  $v_2$ . Заряд ширины  $2l$  расположен на поверхности верхнего слоя, значение потенциала на нем  $\varphi = -\varphi_0$  ( $\varphi_0 > 0$ ). Требуется определить форму и размеры пробойны, а также предельные значения параметров, начиная с которых пробивание преграды происходить не будет.

Введем безразмерные переменные  $\bar{z} = z/H$ ,  $\bar{w} = w/\varphi_0$ ,  $\bar{v} = vH/\varphi_0$ , где  $z = x + iy$  — комплексная координата физической плоскости,  $w = \varphi + i\psi$  — комплексный потенциал,  $\psi$  — функция тока,  $v$  — величина скорости. Тогда решение задачи будет зависеть от четырех безразмерных величин  $\bar{l} = l/H$ ,  $\bar{h} = h/H$ ,  $\bar{v}_1 = v_1H/\varphi_0$ ,  $\bar{v}_2 = v_2H/\varphi_0$ , так как  $\bar{H} = 1$ ,  $\bar{\varphi}_0 = 1$  (в дальнейшем черту у безразмерных величин писать не будем). В зависимости от значений  $\bar{l}$ ,  $\bar{h}$ ,  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  могут реализоваться различные схемы течения, переходящие при изменении  $\bar{l}$ ,  $\bar{h}$ ,  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  друг в друга.

**2. Рассмотрим сначала частный случай**, когда прочностью верхнего слоя можно пренебречь по сравнению с прочностью нижнего слоя ( $v_1 = 0$ ). При построении схем пробоев воспользуемся первым вариантом твердожидкостной модели взрыва в слоистых средах [7, 8]. Согласно этому варианту, являющемуся наиболее общим, граница выемки, кроме участков постоянной скорости, имеет участок, принадлежащий линии раздела слоев, где скорость непрерывно меняется от  $v_2$  до  $v_1$ .

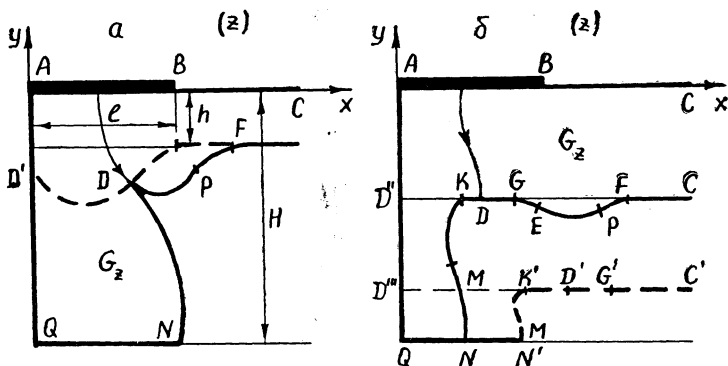


Рис. 1.

При малых значениях  $h$  точка разветвления граничной линии тока находится в нижнем слое, а схема границы пробойны (назовем ее первой схемой) имеет вид, показанный сплошной линией на рис. 1, *a* (в силу симметрии пробойны относительно оси  $y$  изображена лишь ее правая половина  $G_z$ , граница которой обозначена через  $\Gamma_z$ ). При увеличении  $h$  точка  $D$  будет приближаться к линии раздела слоев и, начиная с некоторого значения  $h_1 = h_1(v_2, l)$ , граница пробойны примет вид, показанный на рис. 1, *б* сплошной линией (вторая схема). Дальнейшее увеличение  $h$  ведет к уменьшению размеров участка  $FPEG$ , который при  $h = h_2(v_2, l)$  стягивается в точку (третья схема пробойны; ее граница изображена штриховой линией на рис. 1, *б*).

Для построения решения введем в рассмотрение аналитическую в  $G_z$  функцию

$$\chi = i \ln [(d\omega/dz)/v_2] = \theta + iS, \quad (1)$$

где  $\theta$  — аргумент вектора скорости,  $S = \ln(v/v_2)$ .

В случае малых  $h$  (рис. 1, *a*) на отдельных участках  $\Gamma_z$  имеют место следующие условия:

$$\varphi = -1, \theta = -\pi/2 \text{ на } AB; \varphi = 0, \theta = \pi/2 \text{ на } BC; \quad (2)$$

$$\psi = \psi_0, \theta = 0 \text{ на } CF; \psi = \psi_0, S = 0 \text{ на } FPDN; \quad (3)$$

$$\varphi = 0, \theta = -\pi/2 \text{ на } NQ; \psi = 0, \theta = -\pi/2 \text{ на } QA; \quad (4)$$

$\psi_0$  — неизвестное пока значение  $\psi$  на граничной линии тока  $CFPDN$ . Согласно этим условиям области  $G_z$  будут соответствовать области  $G_\omega$  и  $G_\chi$  в плоскостях  $\omega$  и  $\chi$ . Если в качестве вспомогательной области  $G_\zeta$  ввести полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ), в которой точкам  $B, A, Q, N, D, P, F, C$  границы  $\Gamma_z$  соответствуют точки  $\pm\infty, a, q, -1, d, p, f, 1$  оси  $\xi$ , то отображения области  $G_\zeta$  на  $G_\omega$  и  $G_\chi$  осуществляются функциями

$$\omega(\zeta) = i\pi^{-1} \int_a^{\zeta} (\tau - d) [(\tau^2 - 1)(\tau - q)(\tau - a)]^{-1/2} d\tau - 1, \quad (5)$$

$$\chi(\zeta) = i \int_f^{\zeta} (\tau - p) [(\tau - 1)\sqrt{(\tau + 1)(\tau - f)}]^{-1} d\tau, \quad (6)$$

а на область  $G_z$  (в силу (1)) — функцией

$$z(\zeta) = v_2^{-1} \int_a^{\zeta} \exp[i\chi(\zeta)] \omega'(\zeta) d\zeta; \quad (7)$$

неизвестные параметры  $a, q, d, p, f$  определяются из системы уравнений

$$\operatorname{res} \chi'_\zeta(1) = i/2, \quad \operatorname{res} z'_\zeta(1) = -h/\pi, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \omega(-1) = 0, \quad \operatorname{Re} z(-\infty) = l, \quad \operatorname{Im} z(q) = -1, \quad (9)$$

где  $\operatorname{res} F(\zeta_0) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} [F(\zeta)(\zeta - \zeta_0)]$  — вычет функции  $F(\zeta)$  в точке  $\zeta = \zeta_0$ .

Пусть теперь  $h \in (h_1, h_2)$  (сплошная кривая на рис. 1, б). Тогда на  $\Gamma_z$  имеют место условия (2), (4), первое из условий (3) и

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0, \quad S = 0 \text{ на } FG; \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = 0 \text{ на } GD; \\ \psi &= \psi_0, \quad \theta = -\pi \text{ на } DK; \quad \psi = \psi_0, \quad S = 0 \text{ на } KN. \end{aligned} \quad (10)$$

Функция  $z(\zeta)$  записывается в виде (7), где согласно указанным условиям

$$\chi(\zeta) = i \int_f^{\zeta} \frac{(\tau - m)(\tau - e)(\tau - p) d\tau}{(\tau - d)(\tau - 1)\sqrt{(\tau + 1)(\tau - k)(\tau - g)(\tau - f)}},$$

а функция  $\omega(\zeta)$  остается прежней (см. (5)). Неизвестные параметры  $a, q, m, k, d, g, e, p, f$  отыскиваются из уравнений (8), (9) и условий

$$\operatorname{res} \chi'_\zeta(f) = i, \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} \chi(-1) = 0, \quad \operatorname{Re} \chi(g) = 0, \quad \operatorname{Im} z(g) = \operatorname{Im} z(f).$$

В случае  $h \in [h_2, 1)$  на  $\Gamma_z$  выполняются условия (2), (4), (10) и первое из условий (3), согласно которым функции  $\omega(\zeta)$  и  $\chi(\zeta)$  имеют соответственно вид (5) и

$$\chi(\zeta) = i \int_k^{\zeta} \frac{(\tau - m)(\tau - g) d\tau}{(\tau - d)(\tau - 1)\sqrt{(\tau + 1)(\tau - k)}} - \pi.$$

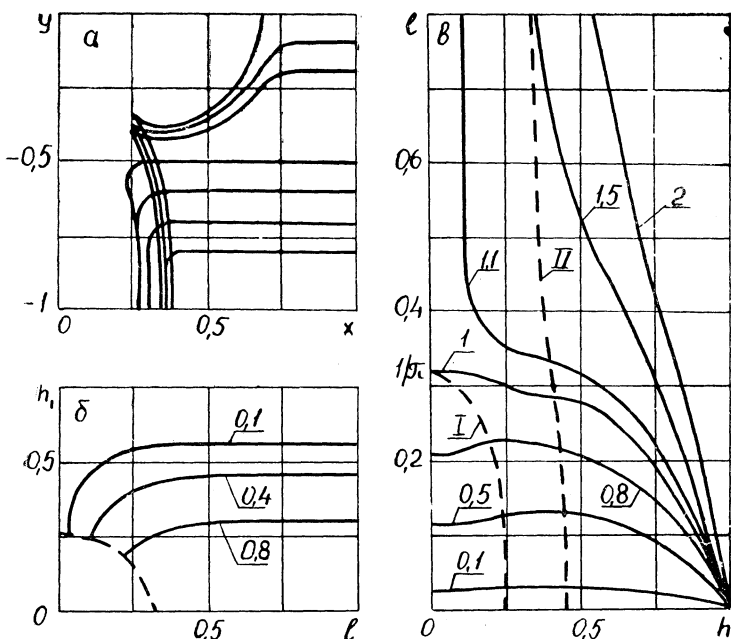


Рис. 2.

Решение отыскивается по формуле (7). Для нахождения неизвестных параметров  $a$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $d$ ,  $g$  имеется система уравнений (8), (9), (11).

На рис. 2, *a* приведены результаты расчетов по первой и третьей схемам пробойн для  $l=0,2$ ,  $v_2=0,4$  и различных значений  $h$  (форма пробойны для  $h=0$  построена по формулам работы [2], где получено решение задачи о пробивании плоским поверхностным зарядом однородной преграды). Из сопоставления результатов можно сделать следующие выводы о влиянии  $h$  на ширину пробойны по нижней поверхности (обозначим ее через  $R_1$ ).

При  $h \in (0, h_1]$  возрастание  $h$  ведет к убыванию  $R_1$ , однако ее величина мало зависит от  $h$  и поэтому при  $h \ll h_1$  для приближенного определения  $R_1$  можно пользоваться формулами работы [2] (зависимости  $h_1 = h_1(l)$  для различных  $v_2$  приведены на рис. 2, *б*). При  $h \in [h_2, 1)$  величина  $R_1$  возрастает с ростом  $h$ .

Рассмотрим теперь предельные случаи. Пробой преграды будет отсутствовать, если точки  $Q$  и  $N$  совпадут, т. е. когда  $q = -1$ . При этом из первого из уравнений (9), которое можно записать в виде

$$d = \int_{-1}^1 \tau [(1 - \tau^2)(\tau - q)(\tau - a)]^{-1/2} d\tau /$$

$$\int_{-1}^1 [(1 - \tau^2)(\tau - q)(\tau - a)]^{-1/2} q \tau,$$

следует  $d = -1$ . Тогда

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{\pi} \int_a^{\zeta} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-1)(\tau-a)}} - 1 = -\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{1-\zeta}{1-a}}.$$

Отсюда с учетом (6) и (7) нетрудно получить, что при  $h \in (0, h_1]$  в предельном случае область  $G_z$  будет иметь вид, показанный на рис. 1, *a* штриховой линией. Границами областей  $G_z$  в предельных случаях для второй и третьей схем пробоя будут соответственно кривые  $ABCFPEGD''A$  и  $ABC'G'D''A$  (рис. 1, *б*).

Таким образом, предельным случаем рассматриваемой задачи будет задача о взрыве в среде, состоящей из двух слоев (верхний слой толщины  $h$ , а нижний — неограниченной глубины).

Получим теперь условие пробивания. Для этого остановимся на первой схеме пробоя (рис. 1, *a*). В общем случае этой схемы на участке  $ND$  выполняется неравенство  $-\pi/2 \leq \theta \leq \theta(d) < 0$ . Тогда из (7) вытекают оценки  $\varphi_1 \sin \theta(d) \leq v_2(y_1 + 1) \leq -\varphi_1$ , где  $\varphi_1$  и  $y_1$  — значения  $\varphi$  и  $y$  в точке  $D$ . Так как в предельном случае  $q = d = -1$ , то согласно (6) имеем  $\theta(d) = -\pi/2$ , то есть

$$y_1 + 1 = -\varphi_1/v_2. \quad (12)$$

Можно показать, что условие (12) также имеет место и в предельных случаях остальных двух схем пробоя.

Таким образом, если из решения задачи о взрыве в двухслойном полупространстве отыскать зависимости  $y_1 = y_1(h, l, v_2)$  и  $\varphi_1 = \varphi_1(h, l, v_2)$  и подставить их в (12), то получим предельные значения  $l = l(h, v_2)$ , начиная с которых не будет пробоя преграды, то есть найдем условия пробивания.

На рис. 2, *в* изображены зависимости  $l = l(h)$  при различных  $v_2$ . Если значения  $h, l, v_2$  таковы, что точка в плоскости  $h, l$  лежит ниже линии, соответствующей данному значению  $v_2$ , то пробоя преграды не будет. Если, кроме того, указанная точка расположена между осью  $h = 0$  и штриховой линией 1, выброс будет происходить по первой схеме предельного случая; когда точка лежит между линиями I и II — по второй схеме, а когда между линиями II и  $h = 1$  — по третьей. Следует отметить, что кривые, соответствующие  $v_2 > 1$ , имеют вертикальные асимптоты  $h = 1 - 1/v_2$ , т. е. при  $v_2 > 1$  и  $h < 1 - 1/v_2$  пробоя преграды отсутствует. При  $v_2 < 1$  зависимости  $l = l(h)$  имеют максимум при  $h \in (0, 1)$ , т. е. при  $v_2 < 1$  найдутся такие значения  $l$  и  $v_2$ , для которых происходит пробивание однородной преграды, однако при появлении тонкого жидкого слоя пробоя нет; если же толщину слоя увеличить, то опять будет иметь место пробой.

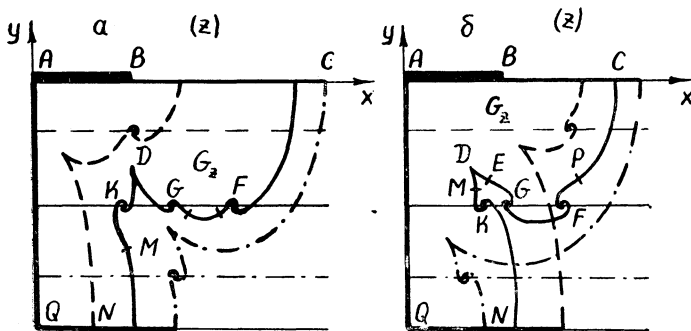


Рис. 3.

3. Рассмотрим теперь **общий случай** ( $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ ). В зависимости от значений  $l, h, v_1$  и  $v_2$  возможны шесть схем пробоин в преграде. Схемы пробоин для  $v_1 < v_2$  приведены на рис. 3, а, а для  $v_1 > v_2$  — на рис. 3, б (при их построении использован второй вариант твердотелочной модели взрыва в слоистой среде, согласно которому скорость на границе при переходе из одного слоя в другой меняется скачкообразно, а сама граница закручивается по логарифмической спирали [7, 9]).

Как видно из рис. 3, наиболее общей является вторая схема пробоины ( $h \in (h_1, h_2)$ ); сплошные кривые на рис. 3). Поэтому выпишем сначала решение задачи для этой схемы.

На границе области  $G_z$  функции  $w(z)$  и  $\chi(z)$  удовлетворяют граничным условиям (2), (4) и

$$\psi = \psi_0, S = S_1 \text{ на } CF; \psi = \psi_0, S = 0 \text{ на } FG;$$

$$\psi = \psi_0, S = S_1 \text{ на } GDK; \psi = \psi_0, S = 0 \text{ на } KN,$$

где  $S_1 = \ln(v_1/v_2)$ . Согласно этим условиям область  $G_w$  останется прежней и функция  $w(\zeta)$  определится формулой (5). Если так же построить область  $G_\chi$ , то полуплоскость  $G_\zeta$  отобразится на  $G_\chi$  функцией

$$\chi(\zeta) = i \int_{-1}^{\zeta} \frac{(\tau - m)(\tau - p)(\tau - e) d\tau}{(\tau - k)(\tau - g)(\tau - f) \sqrt{\tau^2 - 1}} - \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Искомые участки границы  $\Gamma_z$  построим по формуле (7), неизвестные параметры  $a, q, m, k, d, g, p, e, f$  определим из системы уравнений, в которую входят уравнения (9) и условия

$$\operatorname{Im} z(k) = -h, \operatorname{res} \chi'_\zeta(k) = -S_1/\pi, \quad (14)$$

$$\operatorname{Im} z(g) = -h, \operatorname{res} \chi'_\zeta(g) = S_1/\pi, \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} z(f) = -h, \operatorname{res} \chi'_\zeta(f) = -S_1/\pi. \quad (16)$$

Для остальных схем пробоины решение задачи также имеет вид (5), (7), (13). Отличие заключается в том, что для первой схемы пробоины следует положить  $g = e$ ,  $k = t$  и исключить из системы уравнений условия (14) и (15), а для третьей схемы положить  $g = e$ ,  $f = p$  и исключить условия (15), (16).

На рис. 4 приведены результаты двух серий числовых расчетов. В первой серии расчетов при фиксированных значениях  $l$ ,  $h$  и  $v_2$  ( $l = 0,2$ ,  $h = 0,5$ ,  $v_2 = 0,1$ ) варьировалась величина  $v_1$  (кривой 1 соответствует  $v_1 = 0,1$ , кривой 2 —  $v_1 = 0,2$ , кривой 3 —  $v_1 = 0,3$ ). Во второй серии расчетов при фиксированных  $l$ ,  $h$  и  $v_1$  ( $l = 0,2$ ,  $h = 0,7$ ,  $v_1 = 0,1$ ) варьировалась величина  $v_2$  (кривой 6 соответствует  $v_2 = 0,1$ , кривой 4 —  $v_2 = 0,2$ , кривой 5 —  $v_2 = 0,3$ ). Следует отметить, что кривые 1 и 6 совпадают, так как в обоих случаях  $l = 0,2$ ,  $v_2 = v_1 = 0,1$ ; кривые 1 и 6 построены по формулы работы [2].

Из анализа приведенных результатов можно сделать следующие выводы о влиянии прочности слоев преграды на размеры пробоины. При увеличении прочности верхнего слоя ширина пробоины по верхней свободной поверхности (обозначим ее  $R_0$ ) убывает, а величина  $R_1$  (в рамках проведенных расчетов) практически не меняется; точка  $D$  разветвления граничной линии тока поднимается, приближаясь при этом к оси симметрии. При увеличении прочности нижнего слоя величина  $R_0$  возрастает, а  $R_1$  убывает; точка  $D$  опускается, приближаясь к оси симметрии.

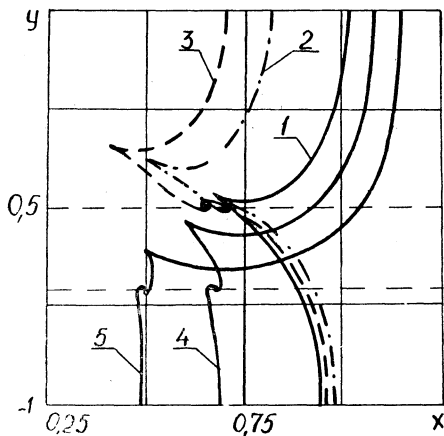


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М. О взрыве на поверхности пластинки.— ПМТФ, 1962, № 3, с. 40—43.
2. Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А. Решение некоторых задач теории взрыва в импульсно-гидродинамической постановке.— В кн.: Тр. семинара по крайевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977, вып. 14, с. 98—109.
3. Рубиновский А. В. О взаимодействии зарядов на поверхности преграды в струйной гидродинамической модели.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 6, с. 160—164.
4. Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Рубиновский А. В., Фищенко П. А. О двух импульсно-гидродинамических моделях взрыва на выброс.— Казань, 1983.— 24 с.— Рукопись представлена Казан. ун-том. Деп. в ВИНТИ 4 мая 1983, № 2403-83.



5. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Импульсно-гидродинамические модели и их место в исследовании взрыва на выброс.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1984, № 5, с. 3—9.

6. Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела.— Новосибирск: Наука, СО, 1977.—264 с.

7. Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О форме воронки выброса при взрыве шнурового заряда в двухслойной среде.— ПМТФ, 1973, № 2, с. 143—146.

8. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Определение выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда в двухслойной среде.— ПМТФ, 1978, № 2, с. 109—114.

9. Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Об импульсно-гидродинамических моделях взрыва на выброс в слоистых средах.— В кн.: Тр. семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979, вып. 16, с. 81—88.

*Доложено на семинаре 27 января 1981 г.*