A. V. Shutov, On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations, *Chebyshevskii Sb.*, 2024, Volume 25, Issue 5, 195–215

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-195-215

Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа

А. В. Шутов

Шутов Антон Владимирович — доктор физико-математических наук, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

А. О. Гельфонд доказал, что при условии взаимной простоты $b-1$ и d суммы цифр разложений натуральных чисел в b-ичную систему счисления равномерно распределены по арифметическим прогрессиям с разностью d. Также он получил степенную оценку остаточного члена в данной задаче.

Мы рассматриваем аналог задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа натуральных чисел в виде суммы чисел Фибоначчи. Показано, что в данном случае также имеет место равномерная распределенность сумм цифр по арифметическим прогрессиям. Более того, в случае, когда разность арифметической прогрессии d равняется 2, ранее было доказано, что остаточный член задачи является логарифмическим. В настоящей работе показано, что при $d \geq 3$ остаточный член задачи является степенным и найдена неулучшаемая по порядку оценка для него.

В основе доказательства лежит детальное изучение остаточного члена в точках, равных числам Фибоначчи. Показано, что остаточный член в произвольной точке может быть оценен через значения остаточного члена в числах Фибоначчи. Для последних удается получить линейное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами, и, более того, точную формулу в терминах некоторых определителей Вандермонда, связанных с корнями характеристического многочлена.

Кроме того, достаточно неожиданно линейное рекуррентное соотношение для остаточного члена в точках, равных числам Фибоначчи, оказывается связанным с некоторыми комбинаторными треугольниками, аналогичными треугольнику Паскаля.

Ключевые слова: задача Гельфонда, суммы цифр, числа Фибоначчи, представление Цекендорфа, треугольник Паскаля.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
Шутов, А.В. Об аналоге задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 195–215.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-195-215

On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations

A. V. Shutov

Shutov Anton Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

A.O. Gelfond proved that if $b-1$ and d are coprime, the sums of digits of the b-ary expressions of natural numbers are uniformly distributed over arithmetic progressions with difference d. He also obtained a power estimate for the remainder term in this problem.

We consider an analogue of Gelfond's problem for Zeckendorf representations of naturals as a sum of Fibonacci numbers. It is shown that in this case we again have the uniform distribution of the sums of digits over arithmetic progressions.

Moreover, in the case when the difference of the arithmetic progression d is equal to 2, it was previously proved that the remainder term of the problem is logarithmic. In the present paper, it is shown that for $d \geq 3$ the remainder term of the problem is a power and an unimprovable in order estimate for it is found.

The proof is based on the detailed study of the remainder term at the Fibonacci numbers. It is shown that the remainder term at an arbitrary point can be estimated through the values of the remainder term in points equal to Fibonacci numbers. For them, it is possible to obtain a linear recurrence relation with constant coefficients, and, moreover, and an exact formula in terms of some Vandermonde determinants connected with the roots of the characteristic polynomial.

Moreover, quite surprisingly, the linear recurrence relation for the remainder term at the Fibonacci points turns out to be connected with some combinatorial triangles, similar to Pascal's triangle.

Keywords: Gelfond problem, sum of digits, Fibonacci numbers, Zeckendorf representation, Pascal triangle.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Shutov, A.V. 2024, "On some analogue of the Gelfond problem for Zeckendorf representations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 195–215.

1. Введение

Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{b(n)} n_k(n) b^k,$$

где $n_k(n) \in \{0, 1 \ldots, b-1\}$, $b(n) = \max\{k : b^k \leq n\}$ – разложение n в b-ичной системе счисления. Пусть также

$$s_b(n) = \sum_{k=0}^{b(n)} n_k(n)$$

– сумма цифр b-ичного разложения n. Рассмотрим величину $N_{d,a}^{(b)}(X)$ – количество натуральных чисел n, меньших X, для которых $s_b(n) \equiv a \pmod{d}$.

А.О. Гельфонд показал [1], что при условии взаимной простоты d и $b-1$ существует постоянная $\mu < 1$ (зависящая от b) такая, что

$$N_{d,a}^{(b)}(X) = \frac{X}{d} + O(n^{\mu}).$$

В случае, когда d – простое, аналогичный результат чуть ранее был получен в [2]. Данный результат означает равномерную распределенность сумм цифр b-ичных разложений натуральных чисел по арифметическим прогрессиям с разностью d (взаимно простой с $b-1$).

Одним из возможных направлений для обобщения данного результата стало рассмотрение его аналогов для других представлений натуральных чисел. Наиболее известное из таких представлений связано с числами Фибоначчи.

Как известно, последовательность Фибоначчи задается линейным рекуррентным соотношением

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

и начальными условиями

$$F_1 = F_2 = 1.$$

В этом случае каждое натуральное число имеет единственное представление

$$n = \sum_{k=2}^{f(n)} f_k(n) F_k, \tag{1}$$

где $f_k(n) \in \{0,1\}$, $f_k(n) f_{k+1}(n) = 0$ и

$$f(n) = \max\{k : F_k \leq n\}.$$

Данное представление может быть получено при помощи жадного алгоритма. Разложение (1) традиционно называется представлением Цекендорфа, в честь работы [3], хотя это разложение (как и существенно более общие) возникало еще в работе [4].

Пусть теперь

$$s_F(n) = \sum_{k=2}^{f(n)} f_k(N)$$

– сумм цифр представления Цекендорфа натурального числа n. Положим

$$N_{d,a}(X) = \sharp\{n \in \mathbb{N} : n < X, s_F(n) \equiv a \pmod{d}\}.$$

Задачу изучения данной величины можно считать аналогом задачи Гельфонда для представлений Цекендорфа.

В случае $d = 2$ и $a \in \{0,1\}$ асимптотика

$$N_{2,a}(X) = \frac{X}{2} + O(\log X) \tag{2}$$

по всей видимости является фольклорной. В любом случае она немедленно следует из результатов работы [5], где также был доказан гауссов закон для остаточного члена данной асимптотики и найдено среднее значение этого остатка. Кроме того, в данной работе были получены глубокие результаты о суммах вида $\sum\limits_{n<X, n\equiv i \pmod{q}} (-1)^{s_F(n)}$ (связанные с аналогом

задачи Гельфонда по модулю 2 для арифметических прогрессий), в частности, было продемонстрировано фрактальное поведение таких сумм при $q=3$. Простое доказательство формулы (2) можно найти в [6].

В случае $d=2$ также изучалось поведение $s_F(n) \bmod 2$ по некоторым подпоследовательностям последовательности натуральных чисел [7], [8], а также совместное распределение $s_F(n) \bmod 2$ и $s_F(n+k) \bmod 2$ [6], [9], [10].

В случае произвольного $d \geq 3$ из результатов работ [11]–[13] вытекает асимптотика

$$N_{d,a}(X) \sim \frac{X}{d}.$$

Метод данных работ не позволял дать какой-либо оценки остаточного члена данной формулы. Позднее Тусвальднер и Ламбергер [14] получили степенную оценку остаточного члена. Точнее, ими было показано, что существует значение $\mu_d < 1$, такое, что

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu_d}).$$

Использованный в данной работе метод в принципе позволял найти некоторое значение константы μ_d, однако алгоритм для этого вычисления был очень сложен и конкретные значения констант так и не были найдены. Также не было понятно, являются ли найденные оценки остаточного члена оптимальными.

В работе [15] было показано, что как минимум при $d=3$ и $a=0$ действительно должна иметь место степенная оценка остаточного члена. Более точно, был получен следующий результат.

Пусть λ – максимум модулей корней уравнения $x^4-2x^3+2x^2-x+1=0$, $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mu=\log_\tau \lambda$. Тогда

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{|N_{3,0}(X)-\frac{X}{3}|}{X^{\mu}} > 0.$$

В данной работе мы, используя метод, отличный от [14], даем оптимальную оценку остаточного члена в проблеме Гельфонда для представления Цекендорфа.

Пусть

$$\mu_d = \log_\tau \left| \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}} \right|. \tag{3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого $d \geq 3$ и любого $a \in \{0,1,\ldots,d-1\}$ имеет место асимптотическая формула*

$$N_{d,a}(X) = \frac{X}{d} + O(X^{\mu_d}). \tag{4}$$

Замечание 8. *Постоянная в $O(X^{\mu_d})$ в формуле (4) зависит от d.*

Теорема 2. *Для любого $d \geq 3$ и любого $a \in \{0,1,\ldots,d-1\}$*

$$\limsup_{X\to\infty} \frac{|N_{d,a}(X)-\frac{X}{d}|}{X^{\mu_d}} > 0. \tag{5}$$

Теорема 2 фактически означает, что оценка остаточного члена в теореме 1 не может быть улучшена.

2. Простейшие результаты об остаточном члене

В первую очередь заметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 без ограничения общности можно считать, что X – натуральное число и $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Также всюду далее мы предполагаем, что $d \geq 3$.

Пусть

$$\varepsilon_{d,a}(N) = \begin{cases} 1, & s_F(N) \equiv a \pmod d \\ -\frac{1}{d-1}, & s_F(N) \not\equiv a \pmod d \end{cases}.$$

Тогда справедлива явная формула для $N^{(\alpha)}_{d,a}(X)$:

$$N_{d,a}(X) = \frac{d-1}{d} \sum_{N=0}^{X-1} \left(\varepsilon_{d,a}(N) + \frac{1}{d-1} \right).$$

Поэтому для остаточного члена

$$r_{d,a}(X) = N_{d,a}(X) - \frac{X}{d}$$

справедлива явная формула

$$r_{d,a}(X) = \frac{d-1}{d} S_{d,a}(X), \tag{6}$$

где

$$S_{d,a}(X) = \sum_{N=0}^{X-1} \varepsilon_{d,a}(N).$$

Следовательно, задача изучения остаточного члена в проблеме Гельфонда для разложений Цекендорфа эквивалентна изучению сумм $S_{d,a}(X)$.

Величины $S_{d,a}(X)$ не являются независимыми.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\sum_{a=0}^{d-1} S_{d,a}(n) = 0.$$

Доказательство. Данное соотношение немедленно вытекает из определения $S_{d,a}(n)$ и равенства

$$\sum_{a=0}^{d-1} \varepsilon_{d,a}(N) = 0,$$

немедленно следующего из определения $\varepsilon_{d,a}(N)$.

Ключевым для дальнейшего будет изучение величин $S_{d,a}(X)$ в случае, когда X пробегает последовательность Фибоначчи. Рассмотрим величины

$$S^*_{d,a}(n) = S_{d,a}(F_n).$$

Утверждение леммы 1 немедленно переписывается в виде

$$\sum_{a=0}^{d-1} S^*_{d,a}(n) = 0 \tag{7}$$

Рекуррентное соотношение $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для чисел Фибоначчи приводит к рекуррентным соотношениям для $S^*_{d,a}(n)$ Для их формулировки введем обозначение

$$a \ominus l = (a-l) \bmod d,$$

то есть $a \ominus l$ – единственное целое число k такое, что $0 \leq k < d$ и $k \equiv a - l \pmod d$.

Лемма 2. *Для любого $a \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ имеет место рекуррентное соотношение*

$$S^*_{d,a}(n+1) = S^*_{d,a}(n) + S^*_{d,a\ominus 1}(n-1). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно определению,

$$S^*_{d,a}(n+1) = \sum_{N=0}^{F_{n+1}-1} \varepsilon_{d,a}(N).$$

Заметим, что при условии $F_n \le N < F_{n+1}$ в разложении (1) выполняются равенства $f_n(N) = 1$, $f_{n-1}(N) = 0$ и $f_k(N) = f_k(N - F_n)$ для $2 \le k \le n-2$. Поэтому $s_F(N) = s_F(n - F_n) + 1$ и $\varepsilon_{d,a}(N) = \varepsilon_{d,a\ominus 1}(N - F_n)$.

С учетом сказанного,

$$S^*_{d,a}(n+1) = \sum_{N=0}^{F_n-1} \varepsilon_{d,a}(N) + \sum_{N=F_n}^{F_{n+1}-1} \varepsilon_{d,a}(N) = S^*_{d,a}(n) + \sum_{N=0}^{F_{n-1}-1} \varepsilon_{d,a\ominus 1}(N) = S^*_{d,a}(n) + S^*_{d,a\ominus 1}(n-1).$$

Соотношения (7), (8) в совокупности представляют собой $d+1$ соотношение на d величин $S^*_{d,a}(n)$. Эти соотношения не являются независимыми и любое из d соотношений (8) может быть получено из (7) и оставшихся $d-1$ соотношений.

3. Рекуррентные соотношения для $S^*_{d,a}(n)$

В каждом из полученных нами соотношений (7), (8) одновременно присутствуют $S^*_{d,a}(n)$ с разными a. Наша следующая цель состоит в том, чтобы получить рекуррентное соотношение для $S^*_{d,a}(n)$, не включающее других значений a.

Вначале для каждого $l \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ выразим последовательность $S^*_{d,a\ominus l}(n)$ через элементы последовательности $S^*_{d,a}(n)$.

В первую очередь заметим, что (8) может быть переписано в виде

$$S^*_{d,a\ominus 1}(n) = S^*_{d,a}(n+2) - S^*_{d,a}(n+1). \tag{9}$$

Применяя (9) сначала для $a \ominus 1$, а затем для a, получаем

$$S^*_{d,a\ominus 2}(n) = S^*_{d,a\ominus 1}(n+2) - S^*_{d,a\ominus 1}(n+1) = S^*_{d,a}(n+4) - 2S^*_{d,a}(n+3) + S^*_{d,a}(n+2).$$

Продолжая этот процесс, получаем следующий результат.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$S^*_{d,a\ominus l}(n) = \sum_{t=0}^{l} b_{l,t} S^*_{d,a}(n+l+t), \tag{10}$$

где коэффициенты $b_{l,t}$ задаются рекуррентными соотношениями

$$b_{l+1,t} = b_{l,t-1} - b_{l,t} \tag{11}$$

и начальными условиями

$$\begin{gathered} b_{l,0} = (-1)^l, \\ b_{l,l} = 1 \end{gathered} \tag{12}$$

Доказательство. Соотношение (10) очевидно выполнено для $l = 0$, когда оно принимает вид $S^*_{d,a}(n) = S^*_{d,a}(n)$. Для $l = 1, 2$ данное соотношение доказано выше.

Покажем, что выполнимость (10) для всех a и некоторого l влечет его выполнимость для $l+1$. Действительно, по предположению индукции можно записать

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = \sum_{t=0}^{l} b_{l,t} S^*_{d,a\ominus 1}(n+l+t).$$

Воспользовавшись (9), находим

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = \sum_{t=0}^{l} b_{l,t}(S^*_{d,a}(n+l+t+2) - S^*_{d,a}(n+l+t+1)).$$

Далее, раскрывая скобки и делая замену в индексе суммирования, получим

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = \sum_{t=1}^{l+1} b_{l,t-1} S^*_{d,a}(n+l+1+t) - \sum_{t=0}^{l} b_{l,t} S^*_{d,a}(n+l+1+t).$$

Еще раз перегруппировав слагаемые, находим

$$S^*_{d,a\ominus(l+1)}(n) = b_{l,l} S^*_{d,a}(n+2(l+1)) + \sum_{t=1}^{l}(b_{l,t-1} - b_{l,t}) S^*_{d,a}(n+l+1+t) - b_{l,0} S^*_{d,a}(n+l+1).$$

Переписав (12) в виде

$$b_{l+1,l+1} = b_{l,l},$$
$$b_{l+1,0} = -b_{l,0}$$

и используя (11), получаем требуемый результат.

Коэффициенты $b_{l,t}$ удобно представлять в виде комбинаторного треугольника, аналогичного треугольнику Паскаля. Первые несколько строк данного треугольника выглядят следующим образом.

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
-1 & 1 & & & \\
1 & -2 & 1 & & \\
-1 & 3 & -3 & 1 & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1
\end{array}$$

Далее нам потребуются биномиальные коэффициенты $\binom{l}{t} = \frac{l!}{t!(l-t)!}$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$b_{l,t} = (-1)^{l+t}\binom{l}{t}. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим числа $b'_{l,t} = (-1)^{l+t}\binom{l}{t}$. Так как $\binom{l}{0} = \binom{l}{l} = 1$, имеем

$$b'_{l,0} = (-1)^l,$$
$$b'_{l,l} = 1.$$

Далее, из $\binom{l+1}{t} = \binom{l}{t-1} + \binom{l}{t}$, получаем

$$b'_{l+1,t} = b'_{l,t-1} - b'_{l,t}.$$

Таким образом, начальные условия и рекуррентные соотношения для $b_{l,t}$ и $b'_{l,t}$ совпадают, откуда и следует, что $b_{l,t} = b'_{l,t}$.

Таким образом, треугольник $(b_{l,t})$ является знакочередующимся вариантом треугольника Паскаля.

Теперь мы готовы получить рекуррентное соотношение для $S^*_{d,a}(n)$.

Лемма 5. *Имеет место линейное рекуррентное соотношение*

$$\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{t=0}^{l}(-1)^{l+t}\binom{l}{t}S^*_{d,a}(n+l+t) = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Для доказательства перепишем (7) в виде

$$\sum_{l=0}^{d-1} S^*_{d,a\ominus l}(n) = 0,$$

подставим туда выражения для $S^*_{d,a\ominus l}(n)$ из (10) и выразим $b_{l,t}$ по формуле (13).

Как известно, для понимания асимптотики последовательности, удовлетворяющей линейному рекуррентному соотношению, необходимо знать корни ее характеристического многочлена.

4. Характеристический многочлен и его корни

Пусть $P_d(x)$ – характеристический многочлен линейного рекуррентного соотношения (14). Этот многочлен имеет степень $2d-2$ и может быть записан в виде

$$P_d(x) = \sum_{r=0}^{2d-2} a_{d,r}x^r,$$

где

$$a_{d,r} = (-1)^r \sum_{\substack{0\le t\le l\le d-1,\\ l+t=r}} \binom{l}{t}.$$

Последнее соотношение может быть переписано в виде одинарной суммы

$$a_{d,r} = (-1)^r \sum_{t=\max(0,r-(d-1))}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \binom{r-t}{t}. \tag{15}$$

Из (15) и хорошо известного соотношения

$$\sum_{t=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \binom{r-t}{t} = \binom{r}{0} + \binom{r-l}{l} + \binom{r-2}{2} + \ldots = F_{l+1}$$

вытекает, что при $r \le d-1$ для коэффициентов характеристического многочлена $P_d(x)$ справедливо равенство

$$a_{d,r} = (-1)^r F_r.$$

Кроме того, из свойств биномиальных коэффициентов можно вывести, что при $d \le r \le 2d-3$ выполняются рекуррентные соотношения

$$a_{d,r} = a_{d-1,r-2} - a_{d-1,r-1}.$$

Также

$$a_{d,2d-2} = 1.$$

Из вышеизложенного вытекает, что коэффициенты $a_{d,r}$ допускают следующую комбинаторную интерпретацию. Определим комбинаторный треугольник (A_{dr}) рекуррентным соотношением

$$A_{d+1,r} = A_{d,r-1} + A_{d,r}$$

и начальными условиями

$$A_{d,0} = F_{d+1},$$

$$A_{d,d} = 1.$$

Первые 6 строк данного треугольника выглядят следующим образом.

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
2 & 2 & 1 & & & \\
3 & 4 & 3 & 1 & & \\
5 & 7 & 7 & 4 & 1 & \\
8 & 12 & 14 & 11 & 5 & 1
\end{array}$$

Данный треугольник изучался в [16]. Дополнительные ссылки можно найти также в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [17].

Рассмотрим также его знакочередующийся вариант $((-1)^{d+r}A_{dr})$.

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
-1 & 1 & & & & \\
2 & -2 & 1 & & & \\
-3 & 4 & -3 & 1 & & \\
5 & -7 & 7 & -4 & 1 & \\
-8 & 12 & -14 & 11 & -5 & 1
\end{array}$$

Тогда

$$a_{dr} = \begin{cases} (-1)^r A_{r,0}, & r \le d-1 \\ (-1)^{d+r} A_{d-1,r-(d-1)}, & d \le r \le 2d-2 \end{cases}.$$

Другими словами, коэффициенты a_{dr} образуют d-ый по счету угол в знакочередующемся комбинаторном треугольнике $((-1)^{d+r}A_{dr})$.

Предложенная комбинаторная интерпретация коэффициентов характеристического многочлена $P_d(x)$ очень красива, но не помогает вычислить его корни. Для вычисления его корней получим другое представление характеристического многочлена.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$P_d(x) = \frac{(-1)^{d+1}x^d(1-x)^d + 1}{x(1-x)+1}. \tag{16}$$

Доказательство. Запишем $P_d(x)$ в виде

$$P_d(x) = \sum_{r=0}^{2d-2} (-1)^r \sum_{\substack{0 \le t \le l \le d-1, \\ l+t=r}} \binom{l}{t} x^r.$$

Далее перейдем от суммирования по диагоналям треугольника $(b_{l,t})$ к суммированию по его строкам, сгруппировав члены с одинаковым l. Получим

$$P_d(x) = \sum_{l=0}^{d-1}\sum_{t=0}^{l}(-1)^{l+t}\binom{l}{t}x^{l+t}.$$

Вынося множитель за внутренний знак суммирования и используя бином Ньютона, получаем

$$P_d(x) = \sum_{l=0}^{d-1}(-1)^l x^l \sum_{t=0}^{l}(-1)^t\binom{l}{t}x^t = \sum_{l=0}^{d-1}(-1)^l x^l(1-x)^l.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$P_d(x) = \frac{(-1)^d x^d(1-x)^d - 1}{-x(1-x)-1}.$$

Умножая числитель и знаменатель на -1, получаем требуемый результат.

Равенство (16) позволяет найти все корни характеристического многочлена. Пусть $\zeta_d = \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}$ – образующая группы корней степени d из единицы.

Лемма 7. *Корни $P_d(x)$ есть*

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j},$$

$1 \le j \le d-1$.

Доказательство. Из (16) вытекает, что уравнение $P_d(x) = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} (-1)^{d+1}x^d(1-x)^d + 1 = 0 \\ x(1-x)+1 \neq 0 \end{cases}.$$

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right)^d = (-1)^d \\ x^2 - x - 1 \neq 0 \end{cases}. \tag{17}$$

При четном d первое уравнение из (17) приобретает вид

$$\left(\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2\right)^d = 1$$

и его корни есть

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\zeta_d^j},$$

$0 \le j \le d-1$. При этом при $j = \frac{d}{2}$ получаем $\zeta_d^j = -1$ и соответствующие корни $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, не удовлетворяют второму условию из (17) и должны быть исключены.

Таким образом, при четном d корни $P_d(x)$ есть

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\zeta_d^j},$$

$0 \le j \le d-1$, $j \neq \frac{d}{2}$. При этом при четном d и $0 \le j < \frac{d}{2}$ выполняется равенство

$$\zeta^{j+\frac{d}{2}} = -\zeta^j,$$

откуда следует, что

$$\left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \zeta_d^j}\right\}_{0 \le j \le d-1, j \ne \frac{d}{2}} = \left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j}\right\}_{1 \le j \le d-1}.$$

При нечетном d первое уравнение из (17) приобретает вид

$$\left(\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2\right)^d = -1$$

и его корни есть

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^j},$$

$0 \le j \le d-1$. При этом при $j = 0$ получаем $\zeta_d^j = 1$ и соответствующие корни $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ вновь не удовлетворяют второму условию из (17) и вновь должны быть исключены.

Рассмотрим несколько следствий о корнях характеристического многочлена.

Следствие 1. *При $d \ge 3$ $P_d(x)$ имеет хотя бы один корень, модуль которого больше 1.*

Доказательство. В силу теоремы Виета и формул для коэффициентов $P_d(x)$, произведение корней многочлена $P_d(x)$ равно единице. Поэтому достаточно показать, что $P_d(x)$ имеет хотя бы один корень, модуль которого отличен от 1.

При условии $|x| = 1$ из равенства $(-1)^{d+1} x^d (1-x)^d + 1 = 0$ вытекает, что $|1 - x| = 1$. Геометрически, решения системы

$$\begin{cases} |x| = 1 \\ |1 - x| = 1 \end{cases}$$

представляют собой точки комплексной плоскости, лежащие на пересечении двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках 0 и 1, то есть $x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, многочлен $P_d(x)$ имеет не более двух корней, модуль которых равен 1. Поскольку при $d \ge 3$ общее число корней $2d - 2 \ge 4$, это доказывает требуемое утверждение.

Замечание 9. *На самом деле легко увидеть, что $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ являются корнями $P_d(x)$ тогда и только тогда, когда d четное. В этом случае они соответствуют $j = 0$.*

Следствие 2. *Многочлен $P_d(x)$ не имеет кратных корней.*

Доказательство. Пусть имеется два равных корня. Тогда для некоторых $0 \le j_1 \ne j_2 \le$ $\le d - 1$ выполняется одно из равенств

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^{j_1}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^{j_2}}$$

или

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^{j_1}} = -\sqrt{\frac{1}{4} + \zeta_d^{j_2}}.$$

Возводя в квадрат, после преобразований получаем

$$\zeta_d^{j_1} = \zeta_d^{j_2},$$

что невозможно.

Следствие 3. *Все корни многочлена $P_d(x)$ комплексные. Кроме того, для каждого корня многочлена $P_d(x)$ существует еще ровно один корень, имеющий тот же модуль.*

Доказательство. Вначале покажем, что все корни многочлена $P_d(x)$ комплексные. Действительно, из выражения для корней, полученного в лемме 7, вытекает, что для того, чтобы корень мог быть действительным, требуется, чтобы $\frac{1}{2}+\zeta_d^j$ было положительным действительным числом. Однако, в этом случае соответствующий корень был бы равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, что противоречит второму условию в (17).

Пусть λ – некоторый комплексный корень $P_d(x)$. Тогда, поскольку все коэффициенты многочлена $P_d(x)$ действительные, его комплексно сопряженное $\overline{\lambda}$ имеет тот же модуль и также является корнем $P_d(x)$.

Остается доказать, для любого корня λ_1 у $P_d(x)$ может быть не более двух корней, модуль которых равен $|\lambda_1|$.

Если λ_1 и λ_2 – два корня $P_d(x)$, их условия $(-1)^{d+1}x^d(1-x)^d+1=0$ вытекает, что

$$\lambda_1^d(1-\lambda_1)^d=\lambda_2^d(1-\lambda_2)^d.$$

Поэтому условие

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|$$

влечет за собой равенство

$$|1-\lambda_1|=|1-\lambda_2|.$$

Поэтому, при фиксированном λ_1, λ_2 представляют собой точки на комплексной плоскости, являющиеся пересечением окружности с центром 0 и радиусом $|\lambda_1|$ и окружности с центром 1 и радиусом $|1-\lambda_2|$. Так как две окружности могут пересекаться не более, чем в двух точках, утверждение доказано.

Следствие 4. *Максимум модулей корней $P_d(x)$ равен*

$$\eta_d=\left|\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\cos\frac{2\pi}{d}+i\sin\frac{2\pi}{d}}\right|. \tag{18}$$

Кроме того

$$1<\eta_d<\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение следствия.

Для $\varphi\in[0;2\pi]$ определим функции $m^{\pm}(\varphi)$ равенствами

$$m^{\pm}(\varphi)=\left|\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right|.$$

Корни $P_d(x)$ соответствуют значениям $\varphi=\frac{2\pi j}{d}$, $1\le j\le d-1$. Непосредственно вычисление показывает, что функция $m^+(\varphi)$ строго убывает при $\varphi\in[0;\pi]$ и строго возрастает при $\varphi\in[\pi;2\pi]$. Соответственно максимум этой функции достигается в точках $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ и равен τ. Функция $m^-(\varphi)$ строго возрастает при $\varphi\in[0;\pi]$ и строго убывает при $\varphi\in[\pi;2\pi]$. Кроме того $m^+(\varphi)\ge m^-(\varphi)$, причем равенство достигается только при $\varphi=\pi$. Также имеется симметрия

$$m^{\pm}(2\pi-\varphi)=m^{\pm}(\varphi)$$

для $\varphi\in[0;\pi]$.

В силу сказанного, достаточно найти максимальный из корней вида $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}$ Для этого нужно найти значения $\varphi=\frac{2\pi j}{d}$, $1\le j\le d-1$, наиболее близкие к точкам $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ максимума функции $m^+(\varphi)$. Такими значениями будут $\varphi=\frac{2\pi}{d}$ и $\varphi=\frac{2(d-1)\pi}{d}$, соответствующие

$j = 1$ и $j = d-1$. В силу соотношения симметрии, значения $m^+(\varphi)$ в этих точках будут равны. Выбирая $\varphi = \frac{2\pi}{d}$, получаем, что максимум модулей корней многочлена $P_d(x)$ для нечетного d равен

$$m^+(\frac{2\pi}{d}) = \left|\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \cos\frac{2\pi}{d} + i\sin\frac{2\pi}{d}}\right| = \eta_d$$

Докажем теперь второе утверждение. Неравенство $\eta_d > 1$ вытекает из следствия 1. Обратное неравенство вытекает из того, что корни многочлена $P_d(x)$ не соответствуют точкам максимума функции $m^+(\varphi)$ и того, что максимальное значение этой функции равно τ.

5. Явная формула для $S^*_{d,a}(n)$

С учетом того, что, согласно следствию 2, характеристический многочлен $P_d(x)$ линейной рекуррентной последовательности $S^*_{d,a}(n)$ не имеет кратных корней, из общей теории линейных рекуррентных соотношений вытекает, что

$$S^*_{d,a}(n) = \sum_{m=1}^{2d-2} c_{d,a,m}\lambda_m^n, \tag{19}$$

где λ_m, $1 \le m \le 2d-2$ – корни характеристического многочлена, а $c_{d,a,m}$ – некоторые комплексные числа.

Далее мы будем считать, что корни $P_d(x)$ упорядочены так, что

$$\lambda_{2k} = \overline{\lambda}_{2k-1}$$

при $1 \le k \le d-1$, а также

$$|\lambda_m| > |\lambda_{m+2}|$$

при $1 \le m \le 2d-4$. Возможность такого упорядочения вытекает из следствия 3.

Из теоремы Виета для $P_d(x)$ получаем, что

$$\prod_{m=1}^{2d-2} \lambda_m = 1. \tag{20}$$

Кроме того, из следствия 4 имеем

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \eta_d$$

и

$$|\lambda_m| < \eta_d$$

при $3 \le m \le 2d-2$.

Ключевым результатом данного раздела является следующая лемма.

Лемма 8. *Все коэффициенты $c_{d,a,m}$ отличны от нуля.*

Доказательство. Подстановка (9) в (19) дает равенства

$$c_{d,a\ominus 1,m} = c_{d,a,m}\lambda_m(\lambda_m - 1). \tag{21}$$

Поскольку $\lambda_m \notin \{0, 1\}$, из (21) следует, что достаточно доказать лемму 8 только для одного значения a.

Мы будем доказывать лемму для $a = d-1$. Вычислим начальные значения $S^*_{d,d-1}(n)$.

Так как $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, получаем, что

$$S^*_{d,a}(1) = S^*_{d,a}(2) = S_{d,a}(1) = \varepsilon_{d,a}(0)$$

и

$$S^*_{d,a}(3) = S_{d,a}(2) = \varepsilon_{d,a}(0) + \varepsilon_{d,a}(1).$$

Поэтому

$$S^*_{d,a}(1) = S^*_{d,a}(2) = \begin{cases} 1, & a = 0 \\ -\frac{1}{d-1}, & a \neq 1 \end{cases}$$

и

$$S^*_{d,a}(3) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{d-1}, & a = 0, 1 \\ -\frac{2}{d-1}, & 2 \leq a \leq d-1 \end{cases}.$$

Последнее вычисление, разумеется, согласуется с (8). Пусть

$$\kappa_d(a) = \min\{n : S^*_{d,a}(n) \neq -\frac{F_n}{d-1}\}.$$

Проведенные вычисления показывают, что $\kappa_d(0) = 1$ и $\kappa_d(1) = 3$. Из (8) вытекает, что

$$\kappa_d(a+1) = \kappa_d(a) + 2.$$

Поэтому

$$\kappa_d(d-1) = 2d - 1.$$

Следовательно, при $1 \leq n \leq 2d - 2$

$$S^*_{d,d-1}(n) = -\frac{F_n}{d-1}.$$

Теперь мы можем переписать (18) в виде

$$\sum_{m=1}^{2d-2} c_{d,d-1,m} \lambda_m^n = -\frac{F_n}{d-1}$$

при $1 \leq n \leq 2d - 2$.

Полученные равенства можно рассматривать как систему из $2d - 2$ линейных уравнений с $2d - 2$ неизвестными $c_{d,d-1,m}$. Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{2d-2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-2} & \lambda_2^{2d-2} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-2} \end{vmatrix} = \prod_{m=1}^{2d-2} \lambda_m \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \lambda_2^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Применяя (20), получаем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \lambda_2^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель есть определитель Вандермонда, поэтому

$$\Delta = V(\lambda_1, \dots, \lambda_{2d-2}) = \prod_{1 \leq m_1 < m_2 \leq 2d-2} (\lambda_{m_2} - \lambda_{m_1}).$$

Из следствия 2 немедленно вытекает, что $\Delta \neq 0$.

Согласно правилу Крамера, можем записать

$$c_{d,d-1,m} = \frac{\Delta_m}{\Delta},$$

где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & -\frac{F_1}{d-1} & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_{m-1}^2 & -\frac{F_2}{d-1} & \lambda_{m+1}^2 & \dots & \lambda_{2d-2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-2} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-2} & -\frac{F_{2d-2}}{d-1} & \lambda_{m+1}^{2d-2} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-2} \end{vmatrix}.$$

Утверждение доказываемой леммы эквивалентно тому, что

$$\Delta_m \neq 0$$

при всех m. Преобразуем определитель Δ_m. Вначале заметим, что

$$\Delta_m = -\frac{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}\lambda_{m+1} \dots \lambda_{2d-2}}{d-1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & F_1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & F_2 & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & F_{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Применяя (20), находим

$$\Delta_m = -\frac{1}{\lambda_m(d-1)} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & F_1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & F_2 & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & F_{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix}.$$

Согласно формуле Бине

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - \widetilde{\tau}^n),$$

где

$$\widetilde{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta_m = -\frac{1}{\sqrt{5}\lambda_m(d-1)} \left(\tau \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & \tau & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & \tau^{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix} - \right.$$
$$\left. -\widetilde{\tau} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{m-1} & \widetilde{\tau} & \lambda_{m+1} & \dots & \lambda_{2d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{2d-3} & \dots & \lambda_{m-1}^{2d-3} & \widetilde{\tau}^{2d-2} & \lambda_{m+1}^{2d-3} & \dots & \lambda_{2d-2}^{2d-3} \end{vmatrix} \right).$$

Полученные определители вновь являются определителями Вандермонда, поэтому

$$\Delta_m = -\frac{\tau V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \tau, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2}) - \widetilde{\tau} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \widetilde{\tau}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2})}{\sqrt{5}\lambda_m(d-1)}$$

и нам остается доказать, что

$$\tau V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \tau, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2}) \neq \widetilde{\tau} V(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \widetilde{\tau}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{2d-2})$$

Применяя формулу для определителя Вандермонда и сокращая на произведения вида $\lambda_{m_1}-\lambda_{m_2}$, не содержащие τ и $\widetilde{\tau}$, получаем, что полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$\tau\prod_{\substack{1\le m'\le 2d-2,\\ m'\ne m}}(\lambda_{m'}-\tau)\ne\widetilde{\tau}\prod_{\substack{1\le m'\le 2d-2,\\ m'\ne m}}(\lambda_{m'}-\widetilde{\tau}). \tag{22}$$

Заметим, что все корни $\lambda_{m'}$, участвующие в (22), кроме одного, представлены парами вида

$$\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}.$$

При этом имеет место тождество

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}-\tau\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}-\tau\right)=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}-\widetilde{\tau}\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_d^j}-\widetilde{\tau}\right).$$

Данное равенство позволяет сократить в (22) все множители, кроме одного. В результате (22) приобретает вид

$$\tau(\lambda_{m^*}-\tau)\ne\widetilde{\tau}(\lambda_{m^*}-\widetilde{\tau})$$

для некоторого $m^*\ne m$, $1\le m^*\le 2d-2$.

Однако единственным корнем уравнения

$$\tau(x-\tau)=\widetilde{\tau}(x-\widetilde{\tau})$$

является $x=1$. Поскольку все корни $P_d(x)$ комплексные, 1 не является корнем $P_d(x)$, то есть $\lambda_{m^*}\ne 1$, что завершает доказательство леммы.

Отметим, что при доказательстве леммы 8 нами фактически доказано, что

$$c_{d,d-1,m}=-\frac{\tau V(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\tau,\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_{2d-2})-\widetilde{\tau}V(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\widetilde{\tau},\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_{2d-2})}{\sqrt{5}\lambda_m(d-1)V(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2d-2})}.$$

Используя (21), получаем

$$c_{d,(d-1)\ominus l,m}=-\frac{\tau V(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\tau,\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_{2d-2})-\widetilde{\tau}V(\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1},\widetilde{\tau},\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_{2d-2})}{\sqrt{5}(d-1)V(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2d-2})}\times$$
$$\times\lambda_m^{l-1}(\lambda_m-1)^l.$$

В сочетании с (19), это дает явную формулу для $S^*_{d,a}(n)$.

6. Доказательство теоремы 1

Нам нужно доказать формулу (4). Согласно (6), данная формула эквивалентна оценке

$$|S_{d,a}(X)|=O(X^{\mu_d}). \tag{23}$$

Вначале заметим, что из равенства (19) и неравенства треугольника вытекает, что существует $C>0$ (возможно, зависящее от d) такое, что

$$|S^*_{d,a}(n)|\le C\eta_d^n. \tag{24}$$

Далее оценим $S_{d,a}(X)$ в терминах $S^*_{d,a}(X)$. Пусть

$$f(X)=\max\{k:F_k\le X\}.$$

Тогда, рассуждая аналогично доказательству леммы 2, получаем

$$S_{d,a}(X)=\sum_{N=0}^{X-1}\varepsilon_{d,a}(N)=\sum_{N=0}^{F_{f(X)}-1}\varepsilon_{d,a}(N)+\sum_{N=F_{f(X)}}^{X-1}\varepsilon_{d,a}(N)=S^*_{d,a}(f(X))+\sum_{N=0}^{X-F_{f(X)}-1}\varepsilon_{d,a\ominus 1}(N)=$$

$$=S^*_{d,a}(f(X))+S_{d,a\ominus 1}(X-F_{f(X)}).$$

Следовательно, с учетом (24),

$$|S_{d,a}(X)|\leq C\eta_d^{f(X)}+|S_{d,a\ominus 1}(X-F_{f(X)})|.$$

Если представление Цекендорфа для X имеет вид

$$X=\sum_{k=2}^{f(X)}f_k(X)F_k,$$

то, применяя предыдущее неравенство не более $f(X)$ раз, получим

$$|S_{d,a}(X)|\leq C\sum_{k=2}^{f(X)}f_k(X)\eta_d^k.$$

Так как $f_k(X)\in\{0,1\}$, последняя оценка может быть переписана в виде

$$|S_{d,a}(X)|\leq C\sum_{k=2}^{f(X)}\eta_d^k.$$

Поскольку $\eta_d>1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$|S_{d,a}(X)|\leq C_1\eta_d^{f(X)}. \tag{25}$$

с некоторой постоянной $C_1>0$, возможно зависящей от d.

Известно [18], что

$$f(X)=[\log_\tau\sqrt{5}(X+\frac{1}{2})],$$

то есть

$$f(X)<\log_\tau(X+\frac{1}{2})+C_2$$

для некоторой положительной константы C_2. Подставляя полученное неравенство в (25), получаем

$$|S_{d,a}(X)|=O(X^{\log_\tau\eta_d}).$$

Для доказательства (22) остается сравнить (3) с (18) и убедится, что

$$\mu_d=\log_\tau\eta_d.$$

7. Доказательство теоремы 2

Нам нужно доказать формулу (5). Согласно (6), данная формула эквивалентна тому, что

$$\limsup_{X\to\infty}\frac{|S_{d,a}(X)|}{X^{\mu_d}}>0. \tag{26}$$

В качестве X будем выбирать числа Фибоначчи. Для доказательства (26) достаточно показать, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S_{d,a}(F_n)|}{F_n^{\mu_d}}>0.$$

Так как $S^*_{d,a}(n)=S_{d,a}(F_n)$, $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n-\widetilde{\tau}^n)$ и $\mu_d=\log_\tau\eta_d$, для доказательства (26) достаточно показать, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|S^*_{d,a}(n)|}{\eta_d^n}>0. \tag{27}$$

Перепишем (19) в виде

$$S^*_{d,a}(n)=c_{d,a,1}\lambda_1^n+c_{d,a,2}\overline{\lambda}_1^n+R^*_{d,a}(n),$$

где $|\lambda_1|=\eta_d$ и

$$R^*_{d,a}(n)=\sum_{m=3}^{2d-2}c_{d,a,m}\lambda_m^n=o(\eta_d^n).$$

В силу леммы 8 все $c_{d,a,m}$ отличны от нуля, поэтому выражение

$$c_{d,a,1}\lambda_1^n+c_{d,a,2}\overline{\lambda}_1^n$$

можно переписать в виде

$$c_{d,a,1}\lambda_1^n+c_{d,a,2}\overline{\lambda}_1^n=\eta_d^n(c_1'\cos n\psi+c_2'\sin n\psi)$$

для некоторого угла $\psi=\arg\lambda_1$ и действительных c_1', c_2' (зависящих от d и a) таких, что $(c_1')^2+(c_2')^2\neq 0$.

Следовательно

$$S^*_{d,a}(n)=\eta_d^n(c_1'\cos n\psi+c_2'\sin n\psi)+o(\eta_d^n)$$

и для доказательства (27) достаточно показать, что существует некоторое $c>0$ и бесконечная последовательность $\{n_k\}$ такие, что

$$c_1'\sin n_k\psi+c_2'\cos n_k\psi>c.$$

Последнее неравенство можно свести к неравенству

$$\sin(n_k\psi+\theta)>c'>0$$

с некоторым эффективно вычислимым θ или же к

$$\sin 2\pi\left\{\frac{n_k\psi+\theta}{2\pi}\right\}>c',$$

где фигурные скобки означают дробную часть числа.

Если $\frac{\psi}{2\pi}$ – иррационально, то последовательность $\{\frac{n\psi+\theta}{2\pi}\}$ равномерно распределена по модулю 1 и можно выбрать бесконечную последовательность $\{n_k\}$ для которой $\{\frac{n\psi+\theta}{2\pi}\}\in[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$ и которая дает нам требуемый результат с $c'=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Предположим теперь, что $\frac{\psi}{2\pi}=\frac{a}{b}$ – рационально. Так как λ_1 комплексно, $\psi=\arg\lambda_1$ не может принимать значения 0 и π. Следовательно, $b\geq 3$. При этом можно выбрать k_a, $0\leq k_a\leq b-1$ таким образом, что $\{\frac{k_a\psi+\theta}{2\pi}\}=\{\frac{k_a a}{b}+\theta\}\in(0;\pi)$. Выбирая $n_k=kb+k_a$, получаем требуемый результат с $c'=\sin\{\frac{k_a a}{b}+\theta\}$.

8. Заключение

В настоящей работе изучен аналог задачи Гельфонда о распределении сумм цифр по арифметическим прогрессиям в случае, когда b-ичные разложения натуральных чисел заменяются их разложениями Цекендорфа по последовательности Фибоначчи. Показано, что в этом случае, как и в классическом, также имеет место равномерность распределения сумм цифр по арифметическим прогрессиям.

В случае, когда разность прогрессии $d = 2$ ранее было известно, что оценка остаточного члена рассматриваемой задачи есть $O(\log n)$. Неулучшаемость этой оценки заявлена в [5].

В случае $d \geq 3$ в настоящей работе найдена постоянная μ_d такая, что для остаточного члена имеет место оценка $O(X^{\mu_d})$. Также показано, что найденная константа μ_d является оптимальной.

Разложение Цекендорфа имеет два естественных обобщения: разложения по линейным рекуррентным последовательностям с неубывающими коэффициентами (или с коэффициентами, удовлетворяющим так называемому условию Парри) и разложение Островского по знаменателям подходящих дробей. Представляется интересным получить точные оценки остатка для аналога проблемы Гельфонда для соответствующих разложений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Aithmetica. 1968. Vol. 13(3). P. 259-265.

2. Fine N. J. The distribution of the sum of digits $\pmod p$ // Bulletin of the American Mathematical Society. 1965. Vol. 71(4). P. 651-652.

3. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bull. Soc. R. Sci. Liege. 1972. Vol. 41. P. 179-182.

4. Ostrowski A. Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1922. Vol. 1. P. 77-98.

5. Drmota M., Ska0142ba M. The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function // Manuscripta Mathematica. 2000. Vol. 101. P. 361–383.

6. Shutov A. V. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci Quarterly. 2020. Vol. 58(3). P. 203-207.

7. Stoll T. Combinatorial constructions for the Zeckendorf sum of digits of polynomial values // The Ramanujan Journal. 2013. Vol. 32. P. 227-243.

8. Jamet D., Popoli P., Stoll T. Maximum order complexity of the sum of digits function in Zeckendorf base and polynomial subsequences // Cryptogr. Commun. 2021. Vol. 13. P. 791–814.

9. Шутов А. В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20(2). С. 271-275.

10. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23(2). С. 88-105.

11. Coquet J., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et independance statistique // Bull. Sci. Math., II. Ser. 1981. Vol. 105. P. 289-298.

12. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 // Annales de l'institut Fourier. 1981. Vol. 31(1). P. 1-15.

13. Coquet J., Rhin G., Toffin Ph. Fourier-Bohr Spectrum of Sequences Related to Continued Fractions // Journal of Number Theory. 1983. Vol.17(3). P. 327-336.

14. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematica Slovaca. 2003. Vol. 53(1). P. 1-20.

15. Жукова А. А., Шутов А. В. Об аналоге задачи Гельфонда для обобщенных разложений Цеккендорфа // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22(2). С. 104-120.

16. Chu H. V. Partial Sums of the Fibonacci Sequence // Fibonacci Quarterly. 2021. V. 59(2). P, 132-135.

17. OEIS Foundation Inc. Entry A105809 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org/A105809. 2024.

18. Хонсбергер Р. Математические изючинки. М.: Наука. 1992.

REFERENCES

1. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données (French)", *Acta Aithmetica*, vol. 13, no.3, pp. 259-265. (https://doi.org/10.4064/aa-13-3-259-265).

2. Fine, N. J. 1965, "The distribution of the sum of digits $\pmod p$", *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 71, no. 4, pp. 651-652.

3. Zeckendorf, E. 1972, "Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas (French)", *Bull. Soc. R. Sci. Liege*, vol. 41, pp. 179-182.

4. Ostrowski, A. 1922, "Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen (German)", *Abh. Math. Semin. Hamburg Univ.*, vol. 1, pp. 77-98. (https://doi.org/110.1007/BF02940581).

5. Drmota, M. & Ska0142 ba, M. 2000, "The Parity of the Zeckendorf Sum-of-Digits-Function", *Manuscripta Mathematica*, vol. 101, pp. 361–383. (https://doi.org/10.1007/s002290050221).

6. Shutov, A. V. 2020, "On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers", *Fibonacci Quarterly*, vol. 58, no. 3, pp. 203-207.

7. Stoll, T. 2013, "Combinatorial constructions for the Zeckendorf sum of digits of polynomial values", *The Ramanujan Journal*, vol. 32, pp. 227-243. (https://doi.org/10.1007/s11139-012-9422-6).

8. Jamet, D. & Popoli, P. & Stoll, T. 2021, "Maximum order complexity of the sum of digits function in Zeckendorf base and polynomial subsequences", *Cryptogr. Commun.*, vol. 13, pp 791–814. (https://doi.org/10.1007/s12095-021-00507-w).

9. Shutov, A. V. 2020, "On one sum associated with Fibonacci numeration system (Russian)", *Dal'nevost. Mat. Zh.*, vol. 20, no. 2, pp. 271-275. (https://doi.org/10.47910/FEMJ202028).

10. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2022, "An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system (Russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 88-105. (https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105).

11. Coquet, J., Toffin, Ph. 1981, "Représentations des entiers naturels et independance statistique (French)", *Bull. Sci. Math., II. Ser.*, vol. 105, pp. 289-298,

12. Coquet, J., Rhin, G., Toffin, Ph. 1981, "Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2 (French)", *Annales de l'institut Fourier*, vol. 31, no. 1, pp. 1-15. (https://doi.org/10.5802/aif.814).

13. Coquet, J., Rhin, G., Toffin, Ph. 1983, "Fourier-Bohr Spectrum of Sequences Related to Continued Fractions", *Journal of Number Theory*, vol. 17, no. 3, pp. 327-336. (https://doi.org/10.1016/0022-314x(83)90050-1).

14. Lamberger, M. & Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematica Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.

15. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2021, "On Gelfond-type problem for generalized Zeckendorf representations (Russian)", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 104-120.

16. Chu, H. V. 2021. "Partial Sums of the Fibonacci Sequence", *Fibonacci Quarterly*, vol. 59, no. 2, pp. 132-135.

17. OEIS Foundation Inc. 2024. "Entry A105809 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", *https://oeis.org/A105809.*

18. Honsberger, R. 1978, "Mathematicals morsels", *Mathematical Association of America.*

Получено: 28.08.2024
Принято в печать: 26.12.2024