R. S. Yulmukhametov, Spectral synthesis in the kernel of a convolution operator in weighted spaces, *Algebra i Analiz*, 2009, Volume 21, Issue 2, 264–279

Алгебра и анализ
Том 21 (2009), №2

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Р. С. ЮЛМУХАМЕТОВ

В статье рассматриваются весовые пространства аналитических функций в выпуклой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^p$. Пусть $U = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в $D$, удовлетворяющих условию $u_n(z) \longrightarrow \infty$ при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$. Через $H(D, U)$ обозначим пространство функций $f \in H(D)$, удовлетворяющих условию: для каждого $n \in \mathbb{N}$ $|f(z)| \exp(-u_n(z)) \longrightarrow 0$, когда $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$. Пространство $H(D, U)$ наделяется локально выпуклой топологией с помощью полунорм $p_n(f) = \sup\limits_{z \in D} |f(z)| \exp(-u_n(z))$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что любой функционал $S \in H^*(D)$ является линейным непрерывным функционалом на $H(D, U)$ и порождённый им оператор свёртки $M_S : f \longrightarrow S_w(f(z + w))$ действует на пространстве $H(D, U)$. Все элементарные решения уравнения $M_S[f] = 0$ $(*)$, т.е. решения вида $z^\alpha e^{<a,z>}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^p$, $a \in \mathbb{C}^p$, лежат в $H(D, U)$. В работе доказано, что система элементарных решений $E(S)$ полна в пространстве решений уравнения $(*)$ из $H(D, U)$.

## Введение

Пусть $D$ — область в $\mathbb{C}^p$, $H(D)$ — пространство функций, голоморфных в области $D$. Через $H^*(D)$ обозначим сильно сопряжённое пространство к $H(D)$. По теореме Хана–Банаха о продолжении функционалов следует, что любой линейный непрерывный функционал $S \in H^*(D)$ продолжается до функционала на пространстве непрерывных функций $C(D)$ и представляется в виде

$$S(f) = \int\limits_D f \, d\mu, \quad f \in H(D), \tag{1}$$

где $\mu$ — мера на $D$ с компактным в $D$ носителем. В силу компактности носителя $\mu$ мы можем определить следующий оператор свёртки, порождаемый функционалом $S$: $M_S[f](\zeta) = S_z(f(z + \zeta))$, $f \in H(D)$. Значениями

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 06-01-00516-а.

оператора $M_S$ являются функции, определённые и голоморфные в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$. Через $E(S)$ обозначим множество „элементарных" решений однородного уравнения свёртки

$$M_S[f](\zeta) \equiv 0, \quad f \in H(D), \tag{2}$$

т.е. решений вида $f(z) = z^\alpha \exp < z, \xi >$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\alpha_i \geqslant 0$ — целые неотрицательные числа и $< z, \xi >= \sum\limits_{i=1}^{p} z_i \xi_i$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_p^{\alpha_p}$, причём $|\alpha|$ меньше кратности корня $\xi$. Напомним, что если $\widehat{S}(\lambda) = S_z(\exp < \lambda, z >)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, — преобразование Лапласа функционала $S$ и функция $f(z) = z^\alpha \exp < z, \xi >$ является элементарным решением уравнения (2), то $\widehat{S}(\xi) = 0$. Через $W(D, S)$ обозначим пространство всех решений уравнения (2) и зададимся вопросом: является ли система $E(S)$ полной в пространстве всех решений $W(D, S)$. Если ответ положительный, то говорят, что подпространство $W(D, S)$ допускает спектральный синтез.

В одномерном случае для выпуклых областей $D$ положительный ответ получен в [2]. Для частных видов областей $D \subset \mathbb{C}^p$ полнота системы элементарных решений доказана в [3–5]. Спектральный синтез для произвольных выпуклых областей в многомерном пространстве анонсирован в [6].

В данной работе мы приводим версию доказательства теоремы о спектральном синтезе в $H(D)$, которая несколько отличается от доказательства, намеченного в работе [6]. Новая версия доказательства позволяет решить задачу спектрального синтеза в весовых пространствах голоморфных функций. Сначала введём эти пространства.

Пусть $D$ — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^p$ и $U = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в $D$, удовлетворяющих условию $u_n(z) \longrightarrow \infty$ при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$. Через $H(D, U)$ обозначим пространство функций $f \in H(D)$, удовлетворяющих условию: для каждого $n \in \mathbb{N}$ $|f(z)| \exp(-u_n(z)) \longrightarrow 0$, когда $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$. Пространство $H(D, U)$ наделяется локально выпуклой топологией с помощью полунорм $p_n(f) = \sup\limits_{z \in D} |f(z)| \exp(-u_n(z))$, $n = 1, 2, \dots$ Очевидно, что любой функционал $S \in H^*(D)$ является линейным непрерывным функционалом на $H(D, U)$ и порождённый им оператор свёртки $M_S$ действует на пространстве $H(D, U)$. Все элементарные решения уравнения (2) лежат в $H(D, U)$. Можно поставить вопрос: будет ли полной система $E(S)$ в пространстве решений уравнения (2) из $H(D, U)$. В данной работе будет получен положительный ответ на этот вопрос при некоторых условиях на весовые функции. Доказательство ведётся по обычной схеме с использованием преобразования Лапласа. Преобразованием Лапласа линейного непрерывного функционала $S \in H^*(D,U)$ называется функция $\widehat{S}(\lambda) = S_z(\exp < \lambda, z >)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Следующая теорема доказана в [8].

**Теорема A.** *Пусть* $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *— убывающая последовательность выпуклых функций в ограниченной выпуклой области* $D$ *и* $v_n(\lambda) = \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, \overline{z} > -u_n(z) :\ z \in D\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, $n \in \mathbb{N}$, *— сопряжённые по Юнгу к функциям* $u_n(z)$. *Предположим, что выполнены условия:*

1) *для любого номера* $n$ *найдётся число* $c_n$ *такое, что*

$$v_{n+1}(\lambda) \geqslant v_n(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|^2) + c_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p; \tag{3}$$

2) *для любого номера* $n$ $v_n \in C^2(\mathbb{C}^p)$ *и для некоторого* $b_n > 0$ *при всех* $y = (y_1, \ldots, y_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p}$ *выполняется оценка снизу*

$$\sum_{k,m=1}^{2p} \frac{\partial^2 v_n(\lambda)}{\partial x_k \partial x_m} y_k y_m \geqslant \frac{12p + b_n}{1 + |\lambda|^2} |y|^2, \quad \lambda = (x_1 + ix_2, \ldots, x_{2p-1} + ix_{2p}) \in \mathbb{C}^p.$$

*Через* $P(v_n)$ *обозначим пространство целых функций* $F$ *с нормой* $||F||_n = \sup\{|F(\lambda)| \exp(-v_n(\lambda)) :\ \lambda \in \mathbb{C}^p\}$, *а через* $P(D,U)$ *— объединение этих пространств с топологией индуктивного предела. При этих условиях преобразование Лапласа* $L :\ S \longmapsto \widehat{S}$ *устанавливает топологический изоморфизм сильно сопряжённого пространства* $H^*(D,U)$ *и пространства* $P(D,U)$.

Эта теорема без ограничений на квадратичную форму функций $v_n$ анонсирована в [7].

Для любого натурального $m$ положим

$$D'_m = \Big\{ z \in D :\ \mathrm{dist}(z, \partial D) > \frac{1}{m} \Big\}, \tag{4}$$

и пусть $D_m$, $D'_m \subset D_m \subset D'_{m+1}$ — последовательность выпуклых областей с дважды гладкой границей. Следуя [15], функции

$$u_m(z) = \begin{cases} 0, & z \in \overline{D}_m, \\ +\infty, & z \in D \setminus \overline{D}_m, \end{cases}$$

будем считать выпуклыми. Если $U = (u_m)_{m=1}^{\infty}$, то $H(D,U) = H(D)$. Известно [1], что преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(D)$ и $P(D)$, состоящим из целых функций $F$, которые удовлетворяют условию: найдется компакт $K$ в $D$ и постоянная $C$ такие, что $|F(\lambda)| \leqslant C \exp(h_K(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, где $h_K(\lambda) = \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, \overline{z} >:\ z \in K\}$ — опорная функция компакта $K$. Пространство $P(D)$ может быть описано следующим образом. Через $h_m$ обозначим опорную функцию компакта $\overline{D}_m$ и через $P(h_m)$ — банахово пространство целых функций с нормой $||F||_m = \sup\{|F(\lambda)| \exp(-h_m(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{C}^p\}$. Тогда пространство $P(D)$ является объединением всех $P(h_m)$ с топологией индуктивного предела. Кроме того, сопряжённые по Юнгу к функциям $u_m$ совпадают с опорными функциями $h_m$ и $P(D) = P(D,U)$. Таким образом, для рассматриваемой системы функций $u_m$ преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(D,U)$ и $P(D,U)$ [1].

**Теорема 1.** *Пусть $U = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в ограниченной выпуклой области $D$, и преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(D,U)$ и $P(D,U)$. Если функции $v_n$, сопряжённые по Юнгу с $u_n$, удовлетворяют условию* (3), *то для функционала $S \in H^*(D)$ любое решение уравнения свёртки* (2) *из пространства $H(D,U)$ приближается линейными комбинациями элементарных решений этого уравнения в топологии пространства $H(D,U)$.*

План данной работы следующий.

В §1 мы хорошо проработанными в работах предыдущих авторов методами сведём задачу о спектральном синтезе в ядре оператора свёртки в пространстве $H(D,U)$ к проблеме полноты полиномов в некоторых весовых пространствах целых функций.

В §2 мы рассмотрим проблему полноты полиномов в весовых пространствах целых функций независимым образом.

Наконец, в §3 на основе результатов первых двух параграфов докажем теорему 1.

## §1. Спектральный синтез и полнота полиномов

Пусть $U = \{u_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ — убывающая последовательность выпуклых функций в ограниченной выпуклой области $D$, для которой выполнены условия теоремы 1. Для множества $X$ в некотором линейно-топологическом пространстве через $X^\perp$ , как обычно, будем обозначать аннулятор $X$.

Возьмём функционал $S \in H^*(D)$, множество решений уравнения (2) в пространстве $H(D,U)$ обозначим через $W(D,U,S)$. По теореме Банаха наличие спектрального синтеза для $W(D,U,S)$ равносильно совпадению аннуляторов $E^\perp(S)$ и $W^\perp(D,U,S)$. Нам потребуются следующие свойства пространства $H(D,U)$.

**Лемма 1.** *В условиях теоремы* 1

1. *Пространство $H(D,U)$ — полное локально выпуклое рефлексивное пространство, т.е. $(H^*(D,U))^* = H(D,U)$.*

2. *В пространстве $H(D,U)$ операторы дифференцирования действуют непрерывно.*

3. *Пусть $J(D,U,S) = \{f \in P(D,U) :\ f/\widehat{S} \in H(\mathbb{C}^p)\}$. Тогда $L(E^{\perp}(S)) = J(D,U,S)$.*

4. *Пусть $I(D,U,S)$ — замыкание в пространстве $P(D,U)$ множества $I'(S) = \{f \in P(D,U) :\ f/\widehat{S}$ – полином$\}$. Тогда $L(W^{\perp}(D,U,S)) = I(S)$.*

5. *Элементарные решения полны в пространстве решений уравнения (2) в $H(D,U)$ тогда и только, когда $I(D,U,S) = J(D,U,S)$.*

**Доказательство.** Доказательство первого утверждения можно получить стандартными приемами на основе результатов из [9].

В силу условия (3) оператор умножения, например, на $\lambda_1$, действует непрерывно на пространстве $P(D,U)$. При изоморфизме, устанавливаемом преобразованием Лапласа, оператору умножения на $\lambda_1$ соответствует непрерывный оператор $A$ на $H^*(D,U)$ — оператор ,,сверточного умножения“ на функционал $\delta'$, определённый по правилу $\delta'(f) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(0)$, $f \in H(D,U)$. Сопряжённый оператор $A^*$ по п. 1 доказываемой теоремы непрерывно действует на пространстве $H(D,U)$, и нетрудно показать [14], что $A^*$ совпадает с оператором дифференцирования по переменной $\lambda_1$.

Утверждения п. 3 и 4 доказываются вполне аналогично доказательству соответствующих утверждений для пространства $H(D)$ в работе [10]. Необходимые факты — рефлексивность пространства $H(D,U)$ и его замкнутость относительно дифференцирования — мы уже доказали. Последнее утверждение — это следствие теоремы Банаха о полноте.

Последнее утверждение в этой лемме в более подробном изложении означает, что для наличия спектрального синтеза в ядре оператора свертки в пространстве $H(D,U)$ необходимо и достаточно, чтобы любая функция вида $f\widehat{S}$ из пространства $P(D,U)$ аппроксимировалась функциями вида $p\widehat{S}$, где $p$ — полиномы. Если учесть топологию пространства $P(D,U)$, то это условие можно сформулировать так: для любой функции $f\widehat{S} \in P(D,U)$ должны существовать номер $m \in \mathbb{N}$ и последовательность полиномов $p_n$ такие, что

$$|f(\lambda) - p_n(\lambda)| \leqslant \varepsilon_n \frac{e^{v_m(\lambda)}}{|\widehat{S}(\lambda)|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

где $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, при $n \longrightarrow \infty$. Таким образом, речь идет о полноте полиномов в некотором весовом пространстве целых функций. $\square$

## §2. Полнота полиномов в весовых пространствах целых функций

Для плюрисубгармонической (п.с.г.) функции $v$ на $\mathbb{C}^p$ через $P(v)$ будем обозначать пространство целых функций с нормой $||F||_{P(v)} := \sup_{\lambda\in\mathbb{C}^p}(|F(\lambda)|\ \exp(-v(\lambda)))$, а через $P_2(v)$ — гильбертово пространство целых функций $F$ с нормой $||F||^2_{P_2(v)} := \int_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)|^2 \exp(-2v(\lambda))dm(\lambda)$. Через $D(z,r)$ будем обозначать шар с центром в точке $z \in \mathbb{C}^p$ и радиуса $r$. В дальнейшем мы часто будем требовать для п.с.г. функций выполнения одного условия, которое сформулируем здесь: функция $\varphi(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}^p$, удовлетворяет условию $(R)$ с постоянными $B, s > 0$, если

$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\zeta)| \leqslant B, \quad \zeta \in D(\lambda, (1 + |\lambda|^2)^{-s}),\ \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{R}$$

Основной для этого параграфа является следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть $v(\lambda)$ — п.с.г. функция на всем $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию $(R)$. Предположим также, что существуют постоянные $\delta, \Delta > 0$ такие, что*

$$\delta(1 + |\lambda|) \leqslant v(\lambda) \leqslant \Delta(1 + |\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

*Тогда всякая функция из пространства $P(v)$ приближается полиномами в норме пространства $P(v + (ps + p + 1)\ln(1 + |\lambda|^2))$.*

Доказательство по существу основано на одной теореме из работы [11], лемме 12.2 из [10] и на теореме Л. Хёрмандера об $L_2$-оценках. Сначала сформулируем указанные теоремы в достаточной для данной ситуации форме.

**Теорема B** (см. [11]). *Пусть $\varphi(\lambda) = \sup^*\varphi_\alpha(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, где $\varphi_\alpha$ — фильтрующееся вправо семейство п.с.г. функций в $\mathbb{C}^p$. Тогда функции из пространства $P_2(\varphi)$ аппроксимируются функциями из $\bigcup\limits_\alpha P_2(\varphi_\alpha)$ по норме пространства $P_2(\varphi + \ln(1 + |\lambda|^2))$. В частности, если функции $\varphi_\alpha$ имеют логарифмический рост, т.е. $\varphi_\alpha(\lambda) = O(\ln|\lambda|)$, $\lambda \longrightarrow \infty$, то речь идёт об аппроксимации полиномами.*

**Лемма C** (см. [10, лемма 12.2]). *Пусть $\varphi$ — п.с.г. функция на $\mathbb{C}^p$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $f \in P(\varphi + \varepsilon|\lambda|)$ представляется в виде произведения функций $f_k \in P(\frac{1}{N}(\varphi + \varepsilon|\lambda|))$, $k = 1, 2, \ldots, N$, причём $\frac{1}{N}(\varphi(\lambda) + \varepsilon|\lambda|) \leqslant C + \varepsilon|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Тогда $f$ приближается полиномами в норме пространства $P(\varphi + 4\varepsilon|\lambda|)$.*

Отметим, что рассматриваемую задачу о спектральном синтезе мы сводим к вопросу о полноте полиномов в пространствах с равномерно весовыми топологиями, а намерены использовать теорему B и $L_2$-оценки

Л. Хёрмандера, в которых рассматриваются интегрально-весовые нормы. Поэтому сформулируем здесь утверждения, позволяющие переходить из равномерно-весовых норм к интегрально-весовым и наоборот.

**Лемма 2.** 1. *Пусть $\varphi$ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$ и $F \in P(\varphi)$. Тогда*

$$||F||_{P_2(\varphi+p\ln(1+|\lambda|^2))} \leqslant \sqrt{2S_p}||F||_{P(\varphi)}.$$

2. *Пусть $\varphi$ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию $(R)$ и $F \in P_2(\varphi)$. Тогда*

$$||F||_{P(\varphi+ps\ln(1+|\lambda|^2))} \leqslant \frac{e^B}{\sqrt{V}_p}||F||_{P_2(\varphi)}.$$

*Здесь $S_p$, $V_p$ обозначают объём единичной сферы и шара в $\mathbb{C}^p$.*

**Доказательство.** Утверждение п. 1 тривиально. Вторая оценка тоже простая и выводится из свойства субгармоничности функции $|F|^2$. □

**Лемма 3.** *Пусть $\varphi$ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию $(R)$. Тогда для любой точки $a \in \mathbb{C}^p$ существует целая функция $F_a$ такая, что $F_a(a) = \exp\ \varphi(a)$ и*

$$\int_{\mathbb{C}^p} |F_a(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)-(2sp+3p+1)\ln(1+|\lambda|^2)} dm(\lambda) \leqslant C_p,$$

*где $C_p = \frac{3^{2s+2}}{1+4s^2}(6e^{2B}\pi(1+4s^2))^p$.*

**Доказательство.** Применим метод математической индукции по размерности пространства. Пусть $p = 1$ и

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда } \ |t| \geqslant 1, \\ 1, & \text{когда } \ |t| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2(1-|t|), & \text{когда } \ \frac{1}{2} \leqslant |t| \leqslant 1, \end{cases}$$

тогда $|\partial\alpha(t)/\partial\bar{t}| \leqslant 1$. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — произвольная точка. Положим

$$g(z) = \frac{e^{\varphi(a)}}{(z-a)}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\alpha\left((z-a)(1+|a|^2)^s\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}u(z) = g(z). \tag{2.1}$$

По свойствам функции $\alpha(z)$ и по условию на функцию $\varphi(z)$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) \leqslant 4\pi e^{2B}(1+|a|^2)^{2s}.$$

Из простой оценки

$$\sup_{|z-\lambda|\leqslant 1}\frac{1+|z|^2}{1+|\lambda|^2}\leqslant\frac{1+(1+|\lambda|)^2}{1+|\lambda|^2}\leqslant\frac{3+2|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}\leqslant 3$$

следует

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|g(z)|^2e^{-2\varphi(z)-(2s+1)\ln(1+|z|^2)}dm(z)\leqslant 4\pi 3^{2s+1}e^{2B}(1+|a|^2)^{-1}.$$

По теореме Л. Хёрмандера уравнение (2.1) имеет решение $u$, удовлетворяющее оценке

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|u(z)|^2e^{-2\varphi(z)-(2s+3)\ln(1+|z|^2)}dm(z)\leqslant 2\pi 3^{2s+1}e^{2B}(1+|a|^2)^{-1}.$$

Поскольку $|z-a|^2\leqslant(1+|z|)^2(1+|a|)^2\leqslant 4(1+|a|^2)(1+|z|^2)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|z-a|^2|u(z)|^2e^{-2\varphi(z)-(2s+4)\ln(1+|z|^2)}dm(z)\leqslant 8\pi 3^{2s+1}e^{2B}.$$

Функция $F_a(z)=\alpha\left((z-a)(1+|a|^2)^s\right)\exp\ \varphi(a)-(z-a)u(z)$, $z\in\mathbb{C}$, в силу определения функции $u$ является целой функцией и $F_a(a)=\exp\varphi(a)$. Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|F_a(z)|^2e^{-2\varphi(z)-(2s+4)\ln(1+|z|^2)}dm(z)\leqslant 50\pi 3^{2s}e^{2B}.$$

Допустим, что утверждение леммы доказано для $\mathbb{C}^{p-1}$. Возьмём точку $a\in\mathbb{C}^p$. Не уменьшая общности, будем считать, что точка $a$ лежит на $(p-1)$-мерном подпространстве $\{z_1=0\}$. По допущению индукции существует целая функция $f$ от переменной $z'=(z_2,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^{p-1}$ со свойствами $f(a')=e^{\varphi(a')}$, $a'=(a_2,\dots,a_p)$,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{p-1}}|f(z)|^2e^{-2\varphi(z)-(2s(p-1)+3(p-1)+1)\ln(1+|z|^2)}dm(z)\leqslant C_{p-1}.$$

Выражение $\varphi(a')$ понимается как значение $\varphi$ в точке $(0,a')\in\mathbb{C}^p$. Пусть $g(z)=f(z)z_1^{-1}\overline{\partial}\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s)$, $z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{C}^p$, где функция $f$ рассматривается как функция на всём $\mathbb{C}^p$, зависящая только от $z'=(z_2,\dots,z_p)$, и функция $\alpha(w)$, $w\in\mathbb{C}$, определена как выше. Непосредственным вычислением получим оценку $|\overline{\partial}\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s)|^2\leqslant(1+4s^2)(1+|z'|^2)^{2s}$.

По свойствам функции $\alpha(w)$ имеем $|g(z)|^2 \leqslant 4|f(z')|^2(1+4s^2)(1+|z'|^2)^{4s}$, причём $g(z)=0$, если $|z_1| \geqslant (1+|z'|^2)^{-s}$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{C}^p} |g(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p-2)\ln(1+|z|^2)} dm(z)$$
$$\leqslant 4(1+4s^2) \int_{\mathbb{C}^{p-1}(z')} |f(z')|^2(1+|z'|^2)^{4s} e^{-2\varphi(z')-(2sp+3p-2)\ln(1+|z'|^2)}$$
$$\times \int_{|z_1|\leqslant(1+|z'|^2)^{-s}} e^{2(\varphi(z')-\varphi(z))+(2sp+3p-2)\ln\frac{1+|z'|^2}{1+|z|^2}}\, dm(z_1)\, dm(z').$$

Отсюда по условию (R) на функцию $\varphi$ получим

$$\int_{\mathbb{C}^p} |g(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p-2)\ln(1+|z|^2)}\, dm(z) \leqslant 4\pi(1+4s^2)e^{2B}C_{p-1}.$$

Рассмотрим теперь уравнение $\overline{\partial} u = g$. По теореме Л. Хёрмандера это уравнение имеет решение $u$, удовлетворяющее оценке

$$\int_{\mathbb{C}^p} |u(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p)\ln(1+|z|^2)} dm(z) \leqslant 2\pi(1+4s^2)e^{2B}C_{p-1}.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{C}^p} |z_1 u(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p+1)\ln(1+|z|^2)} dm(z) \leqslant 2\pi(1+4s^2)e^{2B}C_{p-1}. \tag{2.2}$$

Положим $F_a(z) = f(z')\alpha(z_1(1+|z'|^2)^s) - z_1 u(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$. По определению функции $u$ функция $F_a$ — целая и по допущению индукции $F_a(a) = \exp\varphi(a)$. Кроме того, по свойствам функции $\alpha$ имеем

$$\int_{\mathbb{C}^p} |f(z')|^2 \alpha(z_1(1+|z'|^2)^s) e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p+1)\ln(1+|z|^2)} dm(z) \leqslant \pi e^{2B}C_{p-1}.$$

Эта оценка вместе с (2.2) и неравенством треугольника для норм дает соотношение

$$\int_{\mathbb{C}^p} |F_a(z)|^2 e^{-2\varphi(z)-(2sp+3p+1)\ln(1+|z|^2)} dm(z) \leqslant e^{2B} 6\pi(1+4s^2)C_{p-1}.$$

Таким образом, можно взять $C_1 = 50\pi e^{2B}3^{2s}$, $C_p = 6\pi e^{2B}(1+4s^2)C_{p-1}$, $p>1$.

Лемма 3 доказана. □

**Следствие.** *Пусть $\varphi$ — п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию $(R)$. Тогда функция $F_a$ из леммы 3 удовлетворяет равномерной оценке*

$$|F_a(\lambda)|^2 \leqslant c_p e^{2\varphi(\lambda)+(3sp+3p+1)\ln(1+|\lambda|^2)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

*где* $c_p = \frac{e^{2B}3^{2s+2}}{V_p(1+4s^2)}(6\pi e^{2B}(1+4s^2))^p$.

**Доказательство.** Данное утверждение следует из п. 2 леммы 2. □

**Лемма 4.** *Пусть $\varphi$ — неотрицательная п.с.г. функция в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющая условию $(R)$ и такая, что $\varphi(\lambda) \leqslant \Delta(1+|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Тогда для любого $\sigma > 0$ функции из пространства $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$ приближаются полиномами в норме пространства $P(\varphi+9\sigma|\lambda|)$.*

**Доказательство.** Введём в рассмотрение функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}^p$

$$w(\lambda) = \sup{}^*\{u(\lambda) - \mathrm{psh}, u(z) = O(\ln|z|),\ u(z) \leqslant \varphi(z) + 8\sigma|z|,\ z \in \mathbb{C}^p\}.$$

Положим $N = [\Delta/\sigma] + 3$, где $[x]$ обозначает целую часть $x$. Тогда $(\Delta + 2\sigma)/N \leqslant \sigma$. Пусть $u(\lambda) = (\varphi(\lambda) + \sigma|\lambda|)/N$. Эта функция удовлетворяет условию (R) с константами $(B+\sigma)/N, s$. По утверждению следствия леммы 3 для любой точки $a \in \mathbb{C}^p$ существует функция $F_a$, равная $\exp((\varphi(a) + \sigma|a|)/N)$ в точке $a$ и удовлетворяющая оценке

$$|F_a(\lambda)| \leqslant c_p e^{\frac{1}{N}(\varphi(\lambda)+\sigma|\lambda|)+(3sp+3p+1)\ln(1+|\lambda|^2)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

где величина $c_p$ определяется как в следствии к лемме 3 и зависит только от размерности $p$ и чисел $B, s$, $\Delta, \sigma$. Оценку сверху для функции $F_a$ запишем в виде $|F_a(\lambda)| \leqslant c'_p \exp(\frac{1}{N}(\varphi(\lambda)+2\sigma|\lambda|))$, при этом постоянная $c'_p$ зависит лишь от $p, B, \Delta, s, \sigma$ и $N$. Функция $f_a = (F_a/c'_p)^N$ равна $(c'_p)^{-N}e^{\varphi(a)+\sigma|a|}$ в точке $a$ и удовлетворяет оценке $|f_a(\lambda)| \leqslant \exp(\varphi(\lambda) + 2\sigma|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. По выбору числа $N$ функции $f_a$ удовлетворяют условиям леммы C, где вместо $\varepsilon$ надо взять $2\sigma$. По утверждению этой леммы каждая функция $f_a$ приближается полиномами в норме пространства $P(\varphi + 8\sigma|\lambda|)$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $p_{a,\varepsilon}$ такой, что $|f_a(\lambda) - p_{a,\varepsilon}(\lambda)| \leqslant \varepsilon\exp(\varphi(\lambda)+8\sigma|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Тогда полином $q_{a,\varepsilon} = \frac{1}{1+\varepsilon}p_{a,\varepsilon}$ обладает свойствами $|q_{a,\varepsilon}(\lambda)| \leqslant \exp(\varphi(\lambda) + 8\sigma|\lambda|)$ для всех $\lambda$ и $|q_{a,\varepsilon}(a)| \geqslant ((c'_p)^{-N}\exp(\varphi(a) + \sigma|a|) - \varepsilon\exp(\varphi(a)+8\sigma|a|))/(1+\varepsilon)$. Из оценки сверху и из определения функции $w$ следует, что $w(\lambda) \geqslant \ln|q_{a,\varepsilon}(\lambda)|$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. В точке $a$ воспользуемся нижней оценкой для $q_{a,\varepsilon}(a)$, устремим затем $\varepsilon$ к нулю и получим нижнюю оценку для функции $w$, а именно $w(a) \geqslant \varphi(a) + \sigma|a| - N\ln c'_p$, $a \in \mathbb{C}^p$. Отсюда следует, что пространство $P(\varphi + \sigma|\lambda|)$ содержится в пространстве $P(w)$. По п. 1 леммы 2 имеем $P(w) \subset P_2(w + p\ln(1+|\lambda|^2))$. Функция $w + p\ln(1+|\lambda|^2)$ по определению функции $w$ является верхней огибающей семейства п.с.г. функций логарифмического роста.

По теореме B функции из пространства $P_2(w+p\ln(1+|\lambda|^2))$, значит, и функции из пространства $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P_2(w+(p+1)\ln(1+|\lambda|^2))$, тем более в норме пространства $P_2(\varphi+8\sigma|\lambda|)$. В п. 2 леммы 2 в качестве функции $\varphi$ можно взять функцию $\varphi+8\sigma|\lambda|$, потому что для этой функции условие (R) выполняется с константами $B+8\sigma, s$. С учётом утверждения п. 2 леммы 2 получим, что функции из $P(\varphi+\sigma|\lambda|)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(\varphi+8\sigma|\lambda|+ps\ln(1+|\lambda|^2))$, тем более в норме пространства $P(\varphi+9\sigma|\lambda|)$. Лемма 4 доказана. □

**Доказательство теоремы 2.** Пусть функция $v$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда функция $v_1(\lambda)=v(\lambda)+p\ln(1+|\lambda|^2)$ также удовлетворяет условиям теоремы 2 с постоянными $B+p\ln 3, s$ в условии (R) и $\Delta+p$ вместо $\Delta$. Для $\alpha\in(0;1)$ через $\varphi_\alpha$ обозначим функцию $(1-\alpha)v_1$. Применим к функции $\varphi_\alpha$ лемму 4 с $\sigma_\alpha=\frac{\alpha\delta}{10}$. Получим, что все функции из пространства $P(\varphi_\alpha+\sigma_\alpha|\lambda|)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(\varphi_\alpha+9\sigma_\alpha|\lambda|)$. Поскольку для всех $\lambda$ имеем $v_1(\lambda)\geqslant v(\lambda)\geqslant\delta(1+|\lambda|)\geqslant\delta|\lambda|$ и $\varphi_\alpha(\lambda)+9\sigma_\alpha|\lambda|+p\ln(1+|\lambda|^2)\leqslant v_1(\lambda)-\frac{\alpha\delta}{10}|\lambda|+p\ln(1+|\lambda|^2)\leqslant v_1(\lambda)+\mathrm{const}$, то в силу п. 1 леммы 2 получим, что функции из пространств $P(\varphi_\alpha+\sigma_\alpha|\lambda|)$ при любом $\alpha\in(0;1)$ приближаются полиномами в норме пространства $P_2(v_1)$. Функция $\varphi_\alpha+\sigma_\alpha|\lambda|$ удовлетворяет условию (R) с постоянными $(1-\alpha)(B+p\ln 3)\sigma_\alpha, s$. Из леммы 2 следует равенство множеств

$$\bigcup_{\alpha\in(0;1)} P(\varphi_\alpha+\sigma_\alpha|\lambda|))=\bigcup_{\alpha\in(0;1)} P_2(\varphi_\alpha+\sigma_\alpha|\lambda|).$$

Таким образом, функции из этих объединений аппроксимируются полиномами в норме пространства $P_2(v_1)$. Поскольку $\varphi_\alpha(\lambda)+\sigma_\alpha|\lambda|\leqslant v_1(\lambda)$ и $\lim_{\alpha\longrightarrow 0}(\varphi_\alpha(\lambda)+\sigma_\alpha|\lambda|)=v_1(\lambda)$ в каждой точке $\lambda\in\mathbb{C}^p$, то $\sup^*(\varphi_\alpha(\lambda)+\sigma_\alpha|\lambda|)=v_1(\lambda)$. Значит, по теореме B функции из пространства $P_2(v_1)$ приближаются функциями из $\bigcup_{\alpha\in(0;1)}P_2(\varphi_\alpha+\sigma_\alpha|\lambda|)$ в норме пространства $P_2(v_1+\ln(1+|\lambda|^2))$. Таким образом, функции из пространства $P_2(v_1)$ приближаются полиномами в норме пространства $P_2(v_1(\lambda)+\ln(1+|\lambda|^2))$. Снова по п. 1 леммы 2 получаем, что функции из $P(v)$ приближаются полиномами в норме пространства $P_2(v_1+\ln(1+|\lambda|^2))$. Поскольку функция $v_1(\lambda)+\ln(1+|\lambda|^2)=v(\lambda)+(p+1)\ln(1+|\lambda|^2)$ удовлетворяет условию (R), то из п. 2 леммы 2 вытекает, что функции из $P(v)$ приближаются полиномами в норме пространства $P(v+(ps+p+1)\ln(1+|\lambda|^2))$. Теорема 2 доказана. □

## §3. Доказательство теоремы 1

В §1 мы свели задачу спектрального синтеза в ядре оператора свертки $M_S$, где $S \in H^*(D)$, к вопросу о полноте полиномов в индуктивном пределе весовых пространств $P(v_m - \ln|\widehat{S}|)$. Сначала мы опишем эти пространства с помощью весов, более пригодных для применения теоремы 2. Сформулируем два простых утверждения.

**Лемма 5.** *Пусть функция $u$ — полунепрерывна снизу в $\overline{D}$ и $v(\lambda) = \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -u(z) : \ z \in D\}$ — сопряжённая по Юнгу функция. Тогда $v$ удовлетворяет условию Липшица $|v(\lambda_1) - v(\lambda_2)| \leqslant M(D)|\lambda_1 - \lambda_2|$, $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}^p$, где $M(D) = \max\{|z|, \ z \in \overline{D}\}$.*

Это утверждение следует непосредственно из определения сопряжённой по Юнгу функции.

**Лемма 6.** *Пусть $w, v$ — субгармонические функции в $\mathbb{R}^m$, причём $w(0) > -\infty$ и $v(x) + w(x) \leqslant C(1 + |x|)$, $w(x) \leqslant c(1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Тогда $v(x) \leqslant (4C + 2^{m+1}c)(1 + |x|) - 2^m w(0)$, $x \in \mathbb{R}^m$.*

**Доказательство.** Для двумерного пространства ($m = 2$) утверждение леммы вытекает из леммы в работе [13]. Для $m > 2$ доказательство аналогичное.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ введём следующие семейства функций

$$\mathrm{K}_m = \{t : \quad t - \text{п.с.г. в } \ \mathbb{C}^p, \quad t(\lambda) \leqslant v_m(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)|, \ \lambda \in \mathbb{C}^p\}.$$

В силу компактности определяющего множества функционала $S$ семейство $\mathrm{K}_m$ для достаточно больших $m$ непусто. Каждое из этих семейств локально ограничено сверху. В самом деле, возьмём бесконечно дифференцируюмую, неотрицательную функцию $\alpha$, зависящую только от $|z|$, равную нулю при $|z| > 1$ и с единичным полным интегралом. Для каждой локально-интегрируемой функции $f$ можно определить её регуляризации

$$f_\varepsilon(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} \frac{1}{\varepsilon^{2p}} \alpha\left(\frac{\zeta - z}{\varepsilon}\right) f(\zeta) dm(\zeta),$$

где $\varepsilon > 0$ и $dm(\zeta)$ — элемент объёма в $\mathbb{C}^p$. Известно [12], что регуляризации бесконечно дифференцируемы, и если $f$ (плюри)субгармонична, то при любом $\varepsilon > 0$ функция $f_\varepsilon$ (плюри)субгармонична и $f_\varepsilon(z) \geqslant f(z)$. Возьмём $\varepsilon = 1$. Регуляризация $(v_m - \ln|\widehat{S}|)_\varepsilon$ как непрерывная функция ограничена на компактах. По свойствам регуляризаций п.с.г. функций для любой функции $t \in \mathrm{K}_m$ и при всех $\lambda$ имеем $t(\lambda) \leqslant t_\varepsilon(\lambda) \leqslant (v_m - \ln|\widehat{S}|)_\varepsilon(\lambda)$. Таким образом, верхняя огибающая $V_m(\lambda) = \sup^*\{t(\lambda) : \quad t \in \mathrm{K}_m\}$ является п.с.г. функцией. Если $F$ — целая и для всех $\lambda \in \mathbb{C}^p$ $\ln|F(\lambda)| \leqslant v_m(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)|$, то $\ln|F| \in \mathrm{K}_m$. По определению $V_m$ получим $\ln|F(\lambda)| \leqslant V_m(\lambda)$ для всех $\lambda$, значит,

$$\sup_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)| e^{-V_m(\lambda)} = \sup_{\mathbb{C}^p} |F(\lambda)| \frac{|\widehat{S}(\lambda)|}{e^{v_m(\lambda)}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{3.1}$$

$\square$

**Лемма 7.** *Пусть $S$ — функционал, имеющий представление* (1), *$u$ — полунепрерывная снизу функция в $D$, ограниченная сверху на некотором $D_m$* (см. (4)), *содержащем носитель меры $\mu$. Положим $v(\lambda) = \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -u(z) : \ z \in D\}$,*

$$\mathrm{K} = \{t : \quad t - \textit{п.с.г. в } \mathbb{C}^p, \quad t(\lambda) \leqslant v(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)|, \ \lambda \in \mathbb{C}^p\},$$

$$V(\lambda) = \sup{}^*\{t(\lambda) : \quad t \in \mathrm{K}\}, \quad w(z) = \int_{\mathbb{C}^p} \alpha(\zeta - z) V(\zeta) dm(\zeta).$$

*Тогда имеют место соотношения*

1. $V(\lambda) \leqslant w(\lambda) \leqslant V(\lambda) + M(D)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, $M(D) = \sup\{|z| : \ z \in D\}$.

2. *Существует постоянная $B$, зависящая только от области $D$, функционала $S$ и функции $u$, такая, что выполняется оценка $|\mathrm{grad}\, w(\lambda)| \leqslant B\sqrt{|\lambda|^2 + 1}$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$.*

**Доказательство.** Левое неравенство в п. 1 — непосредственное следствие свойств регуляризации п.с.г. функций. Далее по определению функции $V$ имеем

$$w(z) \leqslant \int_{\mathbb{C}^p} \alpha(\zeta - z)(v(\zeta) - \ln|\widehat{S}(\zeta)|) \ dm(\zeta).$$

Функция $\ln|\widehat{S}(\zeta)|$ субгармонична, а функция $v$ липшицева (см. лемму 5), поэтому

$$w(z) \leqslant v(z) + M(D) - \ln|\widehat{S}(z)|.$$

Это значит, что функция $w(z) - M(D)$ принадлежит классу K, из чего следует правое неравенство в первом утверждении.

Оценим теперь градиент функции $w$. Пусть $M = \sup|\mathrm{grad}\ \alpha(z)|$. Тогда

$$|\mathrm{grad}\ \ w(\lambda)| \leqslant M \int_{D(\lambda,1)} |V(z)|\, dm(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p,$$

и нам необходимо оценить интеграл от функции $|V|$ по шару $D(\lambda, 1)$ в $\mathbb{C}^p$. Для этого применим лемму 6 к функциям $V, \ln|\widehat{S}|$. По условию леммы функционал $S$ имеет представление (1) и $\mathrm{supp}\,(\mu) \subset D_m$, поэтому

$$|\widehat{S}(\lambda)| \leqslant |\mu|(D)\ \exp \sup_{z\in D_m} \mathrm{Re} < \lambda, z > = |\mu|(D)e^{h_m(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{3.2}$$

Следовательно,

$$\ln|\widehat{S}(\lambda)| \leqslant \ln|\mu|(D) + M(D)|\lambda| \leqslant (\ln^+|\mu|(D) + M(D))(|\lambda|+1), \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{3.3}$$

Если $\inf\{u(z) : z \in D\} = u_0$, то по определению функции $V$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}^p$

$$V(\lambda) + \ln|\widehat{S}(\lambda)| \leqslant v(\lambda) \leqslant \sup_{z\in D} \mathrm{Re} < \lambda, z > -u_0 \leqslant (M(D)+u_0^-)(|\lambda|+1). \tag{3.4}$$

Пока предположим, что $\widehat{S}(0) \neq 0$. Из (3.3), (3.4) видно, что для функций $V$ и $\ln|\widehat{S}|$ условия леммы 6 выполнены и тем самым найдётся постоянная $A$, зависящая от области $D$, функционала $S$ и функции $u$ такая, что $V(\lambda) \leqslant A(|\lambda|+1)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Если же $\widehat{S}(0) = 0$, то возьмём точку $\lambda_0$, $|\lambda_0| < 1$, такую, что $\widehat{S}(\lambda_0) \neq 0$. Затем проведём оценки функций $V(\lambda+\lambda_0) + \ln|\widehat{S}(\lambda+\lambda_0)|$, $\ln|\widehat{S}(\lambda+\lambda_0)|$ и получим оценку функции $V(\lambda+\lambda_0)$.

Оценим функцию $V$ снизу. Пусть $\sup\{u(z) : z \in D_m\} = M'$, тогда $v(\lambda) \geqslant \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -u(z) : z \in D_m\} \geqslant h_m(\lambda) - M'$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Учитывая (3.2), имеем $V(\lambda) \geqslant -M' - \ln|\mu|(D)$. Итак, существует постоянная $B'$ такая, что $|V(\lambda)| \leqslant B'(|\lambda|+1)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$.

Лемма 7 доказана. □

**Доказательство.** На основе лемм 5–7 можем доказать теорему 1. В §1 проблему спектрального синтеза в ядре оператора $M_S$ свели к проблеме полноты полиномов в индуктивном пределе пространств $P(v_k - \ln|\widehat{S}|)$, а равенство (3.1) показывает, что нам достаточно показать полноту полиномов в индуктивном пределе пространств $P(V_k)$. Положим $w_k(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}^p} \alpha(\zeta-\lambda)V_k(\zeta)dm(\zeta)$. Из первого утверждения леммы 7 следует, что пространства $P(w_k)$ и $P(V_k)$ совпадают и нам достаточно доказать полноту полиномов в индуктивном пределе пространств $P(w_k)$.

Покажем, что каждая из функций $w_k$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Функции $w_k$ по второму утверждению леммы 7 удовлетворяют условию $(R)$ с некоторой постоянной $B$ и $s = \frac{1}{2}$. Получим нижнюю оценку для каждой функции $w_k$. Функционал $S$ по предположению имеет представление (1). Пусть $m$ — наименьшее натуральное число, для которого $\mathrm{supp}\mu \subset D_m$ (см. (4)), возьмём произвольный номер $k > m$ и положим $r_k = \sup\{u_k(z) : z \in D_k\}$. Для сопряжённых по Юнгу выполняется оценка $v_k(\lambda) \geqslant \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -r_k : z \in D_k\} = h_k(\lambda) - r_k$. Отсюда и из (3.4) следует, что

$$\frac{e^{v_k(\lambda)}}{|\widehat{S}(\lambda)|} \geqslant \frac{1}{|\mu|(D)e^{r_k}} e^{h_k(\lambda)-h_m(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^p. \tag{3.5}$$

Поскольку для любого номера $s$ верно включение $D_s + D(0, \frac{1}{s(s+1)}) \subset D_{s+1}$, то $h_{s+1}(\lambda) \geqslant h_s(\lambda) + \frac{1}{s(s+1)}|\lambda|$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Таким образом, из (3.5) следует оценка $v_k(\lambda) - \ln|\widehat{S}(\lambda)| \geqslant -\ln|\mu|(D) - r_k + |\lambda|/(m(m+1))$. Так как в правой части стоит п.с.г. функция, то $V_k(\lambda) \geqslant -\ln|\mu|(D) - r_k + |\lambda|/(m(m+1))$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$, и по лемме 7 (п. 1) такое же соотношение верно для регуляризаций $w_k(\lambda) \geqslant -\ln|\mu|(D) - r_k + |\lambda|/(m(m+1))$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Осталось получить верхние оценки для функций $w_k$. Пусть $b_k = \inf\{u_k(z) : z \in D\}$. Тогда $v_k(\lambda) \leqslant \sup\{\mathrm{Re} < \lambda, z > -b_k : z \in D\} \leqslant M(D)|\lambda| - b_k \leqslant (M(D) + |b_k|)(|\lambda| + 1)$, поэтому $V_k(\lambda) + \ln|\widehat{S}(\lambda)| \leqslant v_k(\lambda) \leqslant (M(D) + |b_k|)(|\lambda| + 1)$. Пока предположим, что $\widehat{S}(0) \neq 0$. Применим лемму 6 к функциям $V_k$ и $\ln|\widehat{S}|$. Учитывая (3.2) и последнюю оценку, получим, что функция $\exp V_k$ имеет конечный тип при первом порядке. По лемме 7 регуляризация $w_k$ допускает оценку $w_k(\lambda) \leqslant \Delta(|\lambda| + 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}^p$. Если $\widehat{S}(0) = 0$, то возьмём точку $\lambda_0$, $|\lambda_0| < 1$, $\widehat{S}(\lambda_0) \neq 0$, и применим лемму 6 к функциям $V_k(\lambda + \lambda_0)$ и $\ln|\widehat{S}(\lambda + \lambda_0)|$. Таким образом, каждая функция $w_k$, $k > m$, удовлетворяет условиям теоремы 2 с $s = \frac{1}{2}$ и с некоторыми $B, \Delta, \delta$. По этой теореме функции из пространства $P(w_k)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(w_k + (2p+1)\ln(1 + |\lambda|^2))$. Тогда по условию (3) функции из пространства $P(w_k)$ аппроксимируются полиномами в норме пространства $P(w_{k+2p+1})$. Значит, полиномы полны в индуктивном пределе $P(D, U)$.

Теорема 1 доказана. □

## Список литературы


[1] Ehrenpreis L., *Fourier analysis in several complex variables*, Pure Appl. Math., vol. 17, Wiley-Intersci. Publ., New York etc., 1970.

[2] Красичков-Терновский И. Ф., *Однородное уравнение типа свёртки на выпуклых областях*, Докл. АН СССР **197** (1971), №1, 29–31.

[3] Malgrange B., *Existence et approximation des solutions des équations dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (1955–1956), 271–355.

[4] Ehrenpreis L., *Mean periodic function*, Amer. J. Math. **77** (1955), 293–328.

[5] Напалков В. В., *Уравнения свёртки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.

[6] Юлмухаметов Р. С., *Однородные уравнения свёртки*, Докл. АН СССР **316** (1991), №2, 312–315.

[7] Епифанов О. В., *Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста*, Докл. АН СССР **319** (1991), №6, 1297–1300.

[8] Абузярова Н. Ф., Юлмухаметов Р. С., *Сопряжённые пространства к весовым пространствам аналитических функций*, Сиб. мат. ж. **42** (2001), №1, 3–17.

[9] Гротендик А. О., *О пространствах (F) и (DF)*, Математика. Период. сб. пер. ин. ст. **2** (1958), №3, 81–127.

[10] Кривошеев А. С., Напалков В. В., *Комплексный анализ и операторы свертки*, Успехи мат. наук **47** (1992), №6, 3–58.

[11] Sibony N., *Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d'holomorphie de* $\mathbb{C}^n$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26** (1976), no. 2, 77–99.

[12] Ронкин Л. И., *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, М., 1971.

[13] Красичков-Терновский И. Ф., *Оценка субгармонической разности субгармонических функций.* I, Мат. сб. **102(144)** (1977), №2, 216–247.

[14] Хёрмандер Л., *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.

[15] Рокафеллар Р., *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

*E-mail:* Yulmukhametov@mail.ru

Поступило 2 апреля 2007 г.