Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ж.-Л. Вердье, Независимость от l характеристического полинома эндоморфизма Фробениуса в l-адических когомологиях (по работе Делиня),
Математика, 1974, том 18, выпуск 2, 150–161

https://www.mathnet.ru/mat720

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.86
17 января 2026 г., 16:21:59

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ l ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ЭНДОМОРФИЗМА ФРОБЕНИУСА В l-АДИЧЕСКИХ КОГОМОЛОГИЯХ (ПО РАБОТЕ ДЕЛИНЯ)[1]

Ж.-Л. Вердье

1. Результаты

Пусть X — алгебраическое многообразие над конечным полем $\mathbf{F}_q$ из q элементов, $\overline{\mathbf{F}}_q$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbf{F}_q$ и $\overline{X}$ многообразие над полем $\overline{\mathbf{F}}_q$, получаемое из X при расширении поля скаляров. Тогда для каждого простого числа l, не делящего q, существует теория когомологий $H^*(X, Q_l)$ [2]) со значениями в $\mathbf{Q}_l$-векторных пространствах [13]. $\overline{\mathbf{F}}_q$-эндоморфизм Фробениуса F_q; $\overline{X} \to \overline{X}$ действует в конечномерных векторных пространствах $H^r(\overline{X}, \mathbf{Q}_l)$. Характеристические полиномы этих эндоморфизмов (от переменной t) будут обозначаться

$$\det(1 - tF_q;\ H_l^r(\overline{X})). \tag{1.1}$$

Эти полиномы имеют целые l-адические коэффициенты. Так как эндоморфизм Фробениуса индуцирует автоморфизм групп когомологий с коэффициентами в $\mathbf{Z}_l$, то корни этих полиномов в алгебраическом замыкании поля $\mathbf{Q}_l$ являются единицами.

В случае когда схема X гладкая и собственная, имеет место равенство формальных степенных рядов от переменной t с коэффициентами в $\mathbf{Q}_l$:

$$\zeta(X, t) = \prod_r \det(1 - tF_q;\ H_l^r(\overline{X}))^{(-1)^{r+1}},$$

где

$$\zeta(X, t) = \prod_x (1 - t^{\deg(x)})^{(-1)},$$

где x обозначает замкнутую точку схемы X (см. [7]). Следовательно, коэффициенты этих формальных рядов лежат в $\mathbf{Z}$.

Существуют следующие гипотезы (см. [19]).

$W1$) Коэффициенты полиномов $\det(1 - tF_q;\ H_l^r(\overline{X}))$ являются целыми числами не зависящими от l.

$W2$) Корни полинома $\det(1 - tF_q;\ H_l^r(\overline{X}))$ в поле $\mathbf{C}$ равны по норме $q^{-r/2}$.

Теорема А (П. Делинь). *Пусть X — гладкое проективное многообразие над полем $\mathbf{F}_q$ характеристики $\neq 2$, которое поднимается в характеристику 0. Тогда коэффициенты полиномов* $\det(1 - tF_q;\ H_l(\overline{X}))$ *являются целыми числами, не зависящими от l.*

Мы говорим, что собственная $\mathbf{F}_q$-схема X поднимается в характеристику 0, если существует дискретно нормированное кольцо A неравной характеристики с полем вычетов F_q и такая собственная плоская A-схема Z над Spec A, что слой схемы Z над замкнутой точкой

---

[1]) Verdier J.-L., Independence par rapport à l des polynômes caractéristiques des endomorphismes des Frobenius dans les cohomologies l-adiques, Séminaire Bourbaki, № 423, 1972/73.

[2]) Через Q_l обозначено поле l-адических чисел.

Spec A изоморфен X. Если X — гладкая схема, то Z — гладкая схема над Spec A; если X — проективная схема, то Z — проективная A-схема.

2. Геометрия пучков

Пусть k — поле и $X \overset{i}{\hookrightarrow} P^N$ — гладкое, замкнутое связное подмногообразие в N-мерном проективном пространстве над полем k. Множество гиперплоскостей в пространстве P^N параметризуется проективным пространством $\check{P}^N$. Для каждой гиперплоскости $s \in \check{P}^N$ положим $Y_s = X \cap s$. Подмножество $\check{X} = \{s \in \check{P}^N \mid Y_s$ особое многообразие$\} \subset \check{P}^N$ называется многообразием, двойственным к X. Пучком гиперплоских сечений многообразия X, или просто пучком, называется прямая $P^1 \subset \check{P}^N$ (т. е. замкнутая точка грассманова многообразия $\mathrm{Gr}(1\check{P}^N)$, такая, что множество $S = P^1 \cap \check{X}$ конечно и для каждой точки $s \in S$ многообразие Y_s имеет лишь одну (изолированную) особую точку. Пучком гиперплоскостей степени d мы назовем пучок, связанный с d-й степенью вложения i. Мы скажем, что пучок является Лефшецевским, если для любой точки $s \in S$ единственная особая точка многообразия Y_s является обычной квадратичной особой точкой [4]. Мы скажем, что вложение i: $X \to P^N$ лефшецевское, если существует лефшецевский пучок гиперплоских сечений.

Предложение 2.1. *Пусть i: $X \to P^N$ — вложение.*

а) *Его квадрат является лефшецевским вложением.*

б) *Множество лефшецевских пучков открыто в множестве замкнутых точек схемы $Gr(1, P^N)$.*

в) *Пусть Y_0 — гладкое гиперплоское сечение многообразия X.*

Обозначим через $\mathrm{Gr}(1, \check{P}^N)_{Y_0} \subset \mathrm{Gr}(1, \check{P}^N)$ подмногообразие, состоящее из прямых, содержащих Y_0. Тогда множество пучков Лефшеца, содержащих Y_0, открыто в $\mathrm{Gr}(1, \check{P}^N)_{Y_0}$ и не пусто, если i: $X \to P^N$ — лефшецевское вложение.

д) *Если вложение i: $X \to P^N$ лефшецевское, то прямая в $\check{P}^N$ определяет лефшецевский пучок в том и только в том случае, когда она находится в общем положении с многообразием X.*

Доказательство предложения 2.1 см. в [8].

3. Когомологии гиперплоских сечений

3.1. Легкая теорема Лефшеца. Пусть *k — алгебраически замкнутое поле, $X \overset{i}{\to} P^N$ — гладкое замкнутое связное $(n+1)$-мерное подмногообразие в N-мерном проективном пространстве над полем k и Y — гладкое гиперплоское сечение многообразия X. Тогда для каждого простого числа l, не равного характеристике поля k, гомоморфизм ограничения*

$$H^r(X, \mathbf{Q}_l) \to H^r(Y, \mathbf{Q}_l)$$

является изоморфизмом при $i<n$ и вложением при $i=n$ (см. [9 и 16] для случая l-адических когомологий и [2] для случая трансцендентных «обычных» когомологий).

3.2. Сложная теорема Лефшеца. *Пусть X — проективное $(n+1)$-мерное многообразие над алгебраически замкнутым*

полем k. Пусть $u \in H^2(X, \mathbf{Q}_l[1])$, где l — простое число, не равное характеристике поля k, класс Чженя расслоения Θ_X (1) и $L: H^*(X, \mathbf{Q}_l) \to H^{*+2}(X, \mathbf{Q}_l[1])$ — оператор умножения на u. Обозначим через (LV) *следующее свойство*

(LV) *Для каждого числа r, $0 \leqslant r \leqslant n$, отображение*

$$L^{n-r+1}: H^r(X, \mathbf{Q}_l) \to H^{2n+2-r}(X, \mathbf{Q}_l[n-r+1])$$

является изоморфизмом.

В случае когда $k = C$ и X — гладкое многообразие, обычные когомологии с коэффициентами в поле $\mathbf{Q}$ обладают свойством (LV) (см. [18]; при доказательстве используется теория келеровых многообразий). Из теоремы сравнения (см. [13]) вытекает, что свойство (LV) имеет место в случае, когда k — произвольное поле характеристики нуль и X — гладкое многообразие. Из теоремы специализации (см. [13]) следует, что свойство (LV) имеет место для поля k произвольной характеристики, если X — гладкое многообразие, поднимаемое в характеристику нуль.

Пусть теперь X — гладкое связное $(n+1)$-мерное проективное многообразие, поднимаемое в характеристику нуль. Тогда многообразие X обладает свойством (LV). Поэтому имеют место функциональные уравнения

3.2.1. $\det(1 - tF_q; H_l^{2n+2-r}(\overline{X})) = \det(1 - q^{n+1-r}tF_q; H_l^r(\overline{X}))$ для $0 \leqslant r \leqslant n$.

4. Исчезающие когомологии

Пусть k — алгебраически замкнутое поле, $\overline{X} \overset{i}{\hookrightarrow} P^N$ — $(n+1)$-мерное гладкое, замкнутое связное подмногообразие проективного пространства над полем $\overline{k}$, поднимаемое в характеристику ноль, $\overline{Y}$ — его гладкое гиперплоское сечение. Внешнее произведение

$$H^n(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l) \times H^n(\overline{Y}, Q_l) \to H^{2n}(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l)$$

индуцирует на образе $\operatorname{Im}(H^n(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) \to H^n(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l)$ невырожденную билинейную форму (доказательство этого факта, использующее (LV) для X и Y, см. в [9]). Поэтому имеет место разложение в прямую сумму

$$H^n(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l) = \operatorname{Im}(H^n(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) \to H^n(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l)) \oplus E_l^n.$$

Подпространство $E_l^n \hookrightarrow H^n(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l)$ называется пространством исчезающих когомологий.

Пусть теперь X $(n+1)$-мерное замкнутое гладкое связное подмногообразие в проективном пространстве P^N над полем k; $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание поля k и $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$. Пусть $(Y_s)_{s \in P^1}$ — пучок, рациональный над k, $S \subset P^1$ — множество исключительных значений пучка. Для каждой геометрической точки $\overline{s}$ многообразия $P^1 - S$ (со значениями в $\overline{k}$) $Y_{\overline{s}}$ является гладким сечением многообразия $\overline{X}$ и отображение $\overline{s} \to H^n(Y_{\overline{s}}, \mathbf{Q}_l)$ является локальной системой в смысле этальной топологии над $P^1 - S$. Зафиксируем геометрическую точку $\overline{s}_0$ в $P^1 - S$. Локальная система определяет действие группы $\hat{\Pi}_1(P_1 - S, \overline{s}_0)$ в век-

торном пространстве $H^n(Y_{\bar{s}_0}, \mathbf{Q}_l)$, называемое глобальной монодромией.

Имеет место точная последовательность

$$0 \to \hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}}, \bar{s}_0) \to \hat{\Pi}_1(P_1 - S, \bar{s}_0) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to 0,$$

где $\hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}})$ (или кратно $\hat{\Pi}_1$) является геометрической фундаментальной группой, соответствующей расширению поля скаляров до $\bar{k}$. Ограничение глобальной монодромии на $\hat{\Pi}_1$ называется глобальной геометрической монодромией.

Локальную систему $\bar{s} \to H^n(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)$ можно отождествить с подсистемой локальной системы $s \to H^n(Y_{\bar{s}}, Q_l)$ (см. (3.1)). Действие группы $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_0)$ на $H^n(\bar{X}, \mathbf{Q}_l) \subset H^n(Y_{\bar{s}_0}, Q_l)$ пропускается через $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ и совпадает с естественным действием группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ в пространстве $H^n(\bar{X}, \mathbf{Q}_l)$.

В случае когда многообразие X поднимается в характеристику нуль, разложение $H^n(Y_{\bar{s}_0}, \mathbf{Q}_l) = \mathrm{Im}(H^n(\bar{X}, Q_l) \to H^n(Y_{\bar{s}_0}, Q_l)) \oplus E^n_l$ инвариантно относительно действия группы монодромии.

Предложение 4.2. *Если* $\mathrm{car}(k) \neq 2$, *многообразие X поднимается в характеристику нуль и $(Y_s)_{s \in P_1}$ — пучок Лефшеца, то пространство $H^n(X, \mathbf{Q}_l)$ совпадает с подпространством в $H^n(Y_{s_0}, Q_l)$, состоящим из точек, инвариантных относительно глобальной геометрической монодромии.*

Доказательство см. в [9].

Рассмотрим теперь ограничение представления монодромии на подпространстве исчезающих когомологий. Обозначим через $\mathrm{Sim}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l)$ (соответственно $\mathrm{Aut}(E^n_l(Q_l))$ группу автоморфизмов пространства E^n_l, сохраняющих с точностью до множителя (соответственно сохраняющих) билинейную форму на пространстве E^n_l, индуцированную произведением в когомологиях. Существуют алгебраические Q_l-группы $\mathrm{Sim}(E^n_l)$ и $\mathrm{Aut}(E^n_l)$, такие, что группы $\mathrm{Sim}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l)$ и $\mathrm{Aut}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l)$ изоморфны $\mathbf{Q}_l$-точкам соответствующих алгебраических групп. Существует точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Aut}(E^n) \to \mathrm{Sim}(E^n) \to G_m \to 0,$$

индуцирующая точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Aut}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l) \to \mathrm{Sim}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l) \to \mathbf{Q}^*_l.$$

Обозначим через $\chi\colon \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathbf{Q}^*_l$ характер, задающий действие группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ на $\mathbf{Q}_l$ [1]. Элементы монодромии при действии на E^n_l лежат в группе $\mathrm{Sim}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l)$ и имеет место следующая коммутативная диаграмма:

4.3.
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{\prod}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}}, \bar{s}_0) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\rho}"] & \hat{\prod}_1(P^1 - S, \bar{s}_0) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \arrow[r] \arrow[d, "\chi^{-n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l) \arrow[r] & \mathrm{Sim}(E^n_l)(\mathbf{Q}_l) \arrow[r] & \mathbf{Q}^*_l &
\end{tikzcd}$$

где ρ (соответственно $\bar{\rho}$) означает представление монодромии (соответственно геометрической монодромии).

Теорема B. *Предположим, что* car $(k) \neq 2$ *и что многообразие* X *поднимается в характеристику нуль. Тогда существует такое число* $d_0 > 0$, *что для любого простого числа* l, *не делящего* car (k), *целого числа* $d \geqslant d_0$ *и любого пучка Лефшеца степени* d *на* X, *образ морфизма* $\bar{\rho}$ *в диаграмме* (4.3) *плотен относительно топологии Зарисского в группе* Aut (E_l^n).

В случае когда n — нечетное число, можно положить $d_0 = 1$ и теорема B в этом случае была доказана Кажданом и Маргулисом. Теорема B для четного n принадлежит В. Делиню. Доказательство этой теоремы будет приведено в п. 6.

5. Теорема B $\Rightarrow$ Теорема A

5.1. Пусть i: $X \hookrightarrow P^N$ — $(n+1)$-мерное замкнутое связное гладкое подмногообразие в проективном пространстве над конечным полем F_q характеристики $\neq 2$, которое поднимается в характеристику нуль. Заменяя вложение i на кратное, можно считать, что i является вложением Лефшеца (2.1) и что целое число d_0 в теореме B равно 1. Мы будем доказывать теорему A индукцией по размерности многообразия X. В случае когда эта размерность равна нулю, утверждение теоремы A очевидно. Итак, мы можем считать, что утверждение теоремы A справедливо для всех гладких проективных F_q-многообразий Y, поднимаемых в характеристику нуль размерности $\leqslant n$.

5.2. Покажем сперва, что достаточно доказать теорему A в случае, когда вложение $i: X \hookrightarrow P^N$ обладает пучком Лефшеца, определенным над F_q, имеющим гладкое сечение, определенное над F_q. Действительно, из предложения (2.1) следует существование такого целого числа m_0, что для любого целого числа $m \geqslant m_0$ существует рациональный пучок Лефшеца над полем F_{q^n}, имеющий гладкое сечение, определенное над полем F_{q^m}. Если бы теорема была доказана в случае выполнения этого дополнительного условия, то мы знали бы, что для всех целых чисел $m \geqslant m_0$ и r полином $\det(1 - tF_q^m, H^r(\bar{X}))$ имеет целые коэффициенты, не зависящие от l. Из этого результата легко следует справедливость теоремы A для многообразия X.

5.3. Итак, пусть $(Y_s)_{s \in P^1}$ — пучок Лефшеца, определенный над полем F_q, $s_0 \in P^1 - S$ — точка, такая, что $\deg(s_0) = 1$. Обозначим через $\bar{s}_0$ геометрическую точку над s_0 со значениями в поле F_0. Из легкой теоремы Лефшеца (3.1) следует существование изоморфизмов, совместимых с действием эндоморфизма Фробениуса

$$H^r(\bar{X}, \mathbf{Q}_l) \simeq H^r(Y_{\bar{s}_0}, \mathbf{Q}_l), \quad r < n.$$

Из равенства (3.2.1) и индукционного предположения вытекает, что полиномы $\det(1 - tF_q, H_l(\bar{X}))$ имеют целые коэффициенты, не зависящие от l при всех $r \neq n$, $n+1$, $n+2$.

5.4. Для доказательства теоремы A достаточно проверить, что полиномы $\det(1 - tF_q; H_l^n(\bar{X}))$ имеют целые коэффициенты, не зависящие от l. Действительно, тогда из равенства 3.2.1 будет следовать, что полиномы $\det(1 - tF_q, H_l^{n+2}(\bar{X}))$ имеют целые коэффициенты, не зависящие от l. Используя равенство (1.2) и тот факт, что функция $\zeta(X, t)$

имеет целые, не зависящие от l коэффициенты, мы найдем, что и полиномы $\det(1-tF_q;\ H^{n+1}(\overline{X}))$ имеют целые не зависящие от l коэффициенты.

5.5. Для каждой точки $s\in P^1-S$ сечение $Y_{\bar{s}}$ определяет гладкое сечение Y_s многообразия $Xs=X\otimes_{F_q}\varkappa(s)$, определенное над полем вычетов $\varkappa(s)$ точки s. Обозначим через F_s эндоморфизм Фробениуса относительно поля $\varkappa(s)$. Из разложения (4.0) вытекает равенство (5.5.1):

$$\det(1-tF_s;\ H_l^n(\overline{Y}_s))=\det(1-tF_q^{\deg(s)};\ H_l^n(\overline{X}))\det(1-tF_s,E_{ls}^n).$$

Второй сомножитель в правой части можно интерпретировать следующим образом. Для каждой точки $s\in P^1-S$ гомоморфизм

$$\mathrm{Gal}(\overline{E}_q(\varkappa(s)))\to\hat{\Pi}_1(P^1-S,\bar{s}_0)$$

определен с точностью до сопряженности (в группе $\hat{\Pi}_1(P^1-S,\bar{s}_0)$). Обозначим образ Фробениуса F_s при этом гомоморфизме тоже через F_s. Он определен с точностью до сопряженности в группе $\hat{\Pi}_1(P^1-S,\bar{s}_0)$. Имеет место равенство $\det(1-tF_s;\ E_{l,s}^n)=\det(1-t\rho(F_s);\ E_l^n)$, где ρ: $\hat{\Pi}_1(P^1-S,\ \bar{s}_0)\to\mathrm{Sim}(E_l^n)(\mathbf{Q}_l)$ — представление монодромии.

Предложение 5.6. *Пусть*

$$P(t)=\prod(1-\alpha_i t)\quad и\quad \mathbf{Q}(t)=\prod_j(1-\beta_j t)$$

два полинома, причем α_i и β_j являются единицами в алгебраическом расширении $\mathbf{Q}_l'$ поля $\mathbf{Q}_l$. Для каждой замкнутой точки $s\in P^1-S$ положим

$$P^{\deg(s)}(t)=\prod_i(1-\alpha_i^{\deg(s)}t),\quad Q^{\deg(s)}(t)=\prod_j(1-\beta_j^{\deg(s)}t).$$

Если для каждой замкнутой точки $s\in P^1-S$ полином $P^{\deg(s)}(t)$ делит полином $Q^{\deg(s)}(t)\cdot\det(1-t\rho(F_s);\ E_l^n)$, то полином $P(t)$ делит $Q(t)$.

5.7. Утверждение. *Теорема* B$\Rightarrow$*Теорема* A *вытекает из предложения* 5.6.

Действительно, из предложения 5.6 вытекает, что полином $\det(1-tF_q;\ H_l^n(\overline{X}))$ является наименьшим общим кратным всех полиномов $P(t)=\prod_i(1-\alpha_i t)$, α_i — единицы в алгебраическом замыкании поля $\mathbf{Q}_l$, такие, что для каждой точки $s\in P^1-S$ полином $P^{\deg(s)}(t)$ делит характеристический полином $\det(1-tF_sH_l^n(\overline{Y}_s))$. Так как, согласно индукционному предположению, полиномы $\det(1-tF_s;\ H_l^n(\overline{Y}_s))$ имеют целые коэффициенты, не зависящие от l, то и $\det(1-tF_q;\ H_l^n(\overline{X}_s))$ будет иметь целые коэффициенты, не зависящие от l.

5.8. Доказательство предложения 5.6. Индукцией по степени полинома P легко свести предложение к случаю, когда $P(t)=(1-\alpha t)$. Предположим, что полином P не делит Q, т. е. $\alpha\neq\beta$, при

всех j. Так как α по условию l-адическая единица, то существует единственный непрерывный характер $\sigma \to \alpha^\sigma$ группы $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_0)$ в $\mathbf{Q}_l'^*$, такой, что для любой точки $s \in P^1 - S$ имеет место равенство

$$\alpha^{F_s} = \alpha^{\deg(s)},$$

где, как и раньше, через F_s обозначается Фробениус.

Геометрическая монодромия $\hat{\Pi}_1$ лежит в ядре этого характера. Так как $\alpha \neq \beta_j$ при всех j, то множество U таких элементов

$$\sigma \in \hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_0),$$

что $\alpha^\sigma \neq \beta_l^\sigma$ при всех j открыто и инвариантно относительно геометрической монодромии $\hat{\Pi}_1$. Для каждой точки $s \in P^1 - S$, такой, что сопряженный класс F_s пересекается с U, число $\alpha^{\deg(s)}$ является корнем полинома $\det(1 - \rho(F_s)t;\ E_l^n)$. Из теоремы Чеботарева (см. [12]) следует, что элементы σ в U, лежащие в классах сопряженных элементов F_s для некоторых $s \in P^1 - S$, плотны в U. Следовательно, для каждого элемента $\sigma \in U$ число α^σ является корнем полинома $\det(1 - \rho(\sigma)t;\ E_l^n)$. Из этого следует, что для любого элемента $\sigma_0 \in U$ число α^{σ_0} является корнем полинома $\det(1 - \rho(\sigma_0)\rho(\tau);\ E_l^n)$ для любого элемента τ из геометрической фундаментальной группы. Из теоремы B следует, что образ ρ геометрической фундаментальной группы $\hat{\Pi}_1$ плотен в группе $\mathrm{Aut}(E_l^n)$ относительно топологии Зарисского. Поэтому число α^{σ_0} является корнем $\det(1 - \rho(\sigma_0)v;\ E_l^n)$ для любого $v \in \mathrm{Aut}(E_l^n)(\mathbf{Q}_l)$, что, очевидно, невозможно.

6. Доказательство предложения B

6.1. *Редукция к случаю характеристики нуль.* Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики $\neq 2$, A — полное дискретно нормированное кольцо с полем вычетов k и с полем частных K характеристики нуль. Пусть X — замкнутая связная $(n+1)$-мерная подсхема над $\mathrm{Spec}\, A$ схемы P_A^N, X_0 — специальный слой схемы X и $X_{\bar{n}}$ — ее общий слой над геометрической общей точкой схемы $\mathrm{Spec}(A)$. Пусть $(Y_s)_{s \in P^1(k)}$ — пучок Лефшеца на X_0. Тогда этот пучок можно поднять в характеристику нуль и рассматривать как пучок, параметризованный схемой P_A^1, причем его множество исключительных значений $S_A \subset P_A^1$ будет конечно и этально над $\mathrm{Spec}(A)$. Исчезающие когомологии этого пучка определят локальную систему на $P_A^1 - S_A$ (см. [13]). Можно показать, что представление монодромии группы $\hat{\Pi}_1(P_A^1 - S_A)$ в пространстве исчезающих когомологий является слабо разветвленным (см. [9]). Имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{\Pi}_1^{\mathrm{mr}}(P_k^1 - S_k) \\ & & \downarrow \\ \hat{\Pi}_1(P_{\bar{n}}^1 - S_{\bar{n}}) & \to & \hat{\Pi}_1^{\mathrm{mr}}(P_A^1 - S_A), \end{array}$$

в которой стрелки определены с точностью до внутреннего автоморфизма (связанного с выбором базисных точек), а индекс mr указывает на то, что рассматривается подгруппа фундаментальной группы, связанная только со слабым ветвлением. Из теоремы специализации (см. [17]) вытекает, что оба морфизма в этой диаграмме являются изоморфизмами. Поэтому образы в группе $\mathrm{Aut}(E^n{}_l)$ при представлениях монодромии, связанных с общим и специальным слоями, совпадают.

Таким образом, мы видим, что достаточно проверить теорему B в случае, когда $\mathrm{car}(k)=0$. Поэтому, согласно принципу Лефшеца, можно считать, что $k=\mathbf{C}$.

6.2. *Редукция к трансцендентным когомологиям.* Обозначим через $\Pi_1(P^1-S, s_0)$ обычную топологическую группу гомотопий петель, через i: $\Pi_1(P^1-S, s_0)\to\hat{\Pi}_1(P^1-S, s_0)$ — канонический гомоморфизм группы в свое проконечное пополнение, через E^n — пространство исчезающих когомологий с коэффициентами в $\mathbf{Q}$ и через

$$\rho_t\colon\quad \Pi_1(P^1-S, s_0)\to \mathrm{Aut}(E^n)(\mathbf{Q})$$

— трансцендентное представление монодромии. Из теоремы сравнения (см. [13]) вытекает существование изоморфизма $E^n\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_l\simeq E^n_l$, совместимого с представлениями монодромии.

Обозначим через $M(E^n)$ замыкание относительно топологии Зарисского образа $\rho_t\left(\Pi_1(P^1-S, s_0)\right)$ в алгебраической группе $\mathrm{Aut}(E_n)$, через $\mathrm{Der}(E^n)$ — алгебру Ли группы $\mathrm{Aut}(E^n)$ и через $\mathscr{M}(E^n)\subset\mathrm{Der}(E^n)$ — подалгебру, соответствующую подгруппе $M(E^n)$. Так как операция „замыкание относительно топологии Зарисского" коммутирует с расширением поля скаляров, то для доказательства теоремы B достаточно проверить, что $M(E^n)=\mathrm{Aut}(E^n)$.

6.3. *Формула Пикара—Лефшеца.* Пусть $S=s_1,\ldots,s_m$ — исключительные значения пучка Лефшеца $(Y_s)_{s\in P^1}$. Зафиксируем петли σ_j, порождающие группу $\Pi_1(P^1-S, s_0)$ и такие, что петля σ_j обходит точку s_j, $1\leqslant j\leqslant m$. Если перейти к вложению $X\hookrightarrow P^N$, кратному исходному, то, как можно показать, существуют такие элементы $\delta_j\in E^n$, $1\leqslant j\leqslant m$, что для всех $x\in E^n$ имеют место равенства

$$\rho_t(\sigma_j)(x)=x-(\delta_j\cup x)\delta_j, \tag{6.3.1}$$

причем $(\delta_j\cup\delta_j)=2$, если n — четное число.

Элементы δ_j определены однозначно, с точностью до изменения знака, равенствами 6.3.1, и они порождают пространство исчезающих когомологий. Они сопряжены между собой относительно монодромии (см. [6] для случая трансцендентных когомологий и [9] для случая этальных когомологий). Из равенств 6.3.1 следует, в частности, что при четных n группа $M(E^n)$ порождается отражениями. Поэтому для доказательства теоремы B достаточно проверить равенство $M(E^n)=\mathrm{Der}(E^n)$.

6.4. *Полупростота.* Из формул Пикара — Лефшеца и того факта, что исчезающие циклы сопряжены между собой и порождают пространство E^n, сразу следует, что представление геометрической монодромии в пространстве E^n абсолютно неприводимо.

Предложение 6.4.1. а) *Если n — нечетное число, то алгебра $\mathcal{M}(E^n)\otimes \mathbf{C}$ проста и ее представление в пространстве E^n неприводимо.*

б) *Если n — четное число, то имеет место одна из следующих возможностей:*

1) *алгебра $\mathcal{M}(E^n)$ полупроста, $E^n\otimes\mathbf{C}\simeq V^k$, где V это неприводимый $\mathcal{M}(E^n)\otimes\mathbf{C}$-модуль;*

2) *алгебра $\mathcal{M}(E^n)$ абелева и E^n является полупростым $\mathcal{M}(E^n)$-модулем.*

Доказательство. Предположим сначала, что число n нечетно. Из формулы Пикара — Лефшеца следует, что алгебраическая группа $M(E^n)$ порождается унипотентными элементами, следовательно, связана. Поэтому представление алгебры Ли $M(E^n)$ в пространстве E^n абсолютно неприводимо. Поэтому центр алгебры $M(E^n)$ должен действовать в E^n умножением на скаляры. Так как он должен сохранять кососимметрическую невырожденную форму на E^n, то центр равен $\{0\}$. Утверждение а) доказано.

Пусть теперь n — четное число. Обозначим через $M^0(E^n)$ связную компоненту алгебраической группы $M(E^n)$. Так как представление группы $M(E^n)$ в пространстве E^n неприводимо, то унипотентный радикал группы $M^0(E^n)$ тривиален и, следовательно, группа $M^0(E^n)$ редуктивна. Пусть $E^n\otimes\mathbf{C}=\bigoplus_\alpha V_\alpha^{k(\alpha)}$ — разложение представления группы $M^0(E^n)(\mathbf{C})$ в пространстве $E^n\otimes\mathbf{C}$ на представления, кратные неприводимым. Факторгруппа $M(E^n)/M^0(E^n)$ действует на множестве индексов α. Так как представление группы $M(E^n)$ неприводимо, то группа $M(E^n)/M^0(E^n)$ транзитивно действует на множестве индексов α и, кроме того, числа $k(\alpha)$ не зависят от α. Вспомним теперь, что группа $M(E^n)/M^0(E^n)$ порождается симметриями относительно гиперплоскостей. Поэтому имеет место одна из двух возможностей. Либо множество индексов α состоит из одного элемента, либо $\dim(V_\alpha)=1$ для всех α. Во втором случае алгебра $M(E^n)$ абелева. В первом случае $E^n\otimes\mathbf{C}\simeq V^k$. Поэтому центр группы $M^0(E^n)(\mathbf{C})$ действует скалярно. Так как он сохраняет билинейную невырожденную форму, то он состоит не более чем из двух элементов. Утверждение б) доказано.

6.5. *Одна лемма из теории алгебр Ли.*

Лемма 6.5.1. *Пусть w: $\mathcal{L}\to gl(V)$ — точное неприводимое представление комплексной полупростой алгебры Ли. Пусть $U\in\mathcal{L}$.*

а) *Если $w(U)^2=0$ и $\dim \operatorname{Im} w(U)=1$, то имеет место один из следующих трех случаев:*

1) *$\mathcal{L}\simeq sl$ и w — стандартное представление.*

2) *$\mathcal{L}\simeq sl$ и w — представление, контрградиентное стандартному.*

3) *$\mathcal{L}\simeq sp$ и w — стандартное представление.*

б) *Если существует невырожденная квадратичная $M(E^n)$-инвариантная форма на пространстве V, $(V)^2=0$ и $\dim \operatorname{In} w(U)=2$, то имеет место один из следующих двух случаев:*

1) *$\mathcal{L}=\mathrm{so}$ и w — стандартное представление.*

2) *$\mathcal{L}=g_2$ и w — представление в пространстве чисел Кэли.*

Доказательство этой леммы легко следует из рассмотрения таблиц в [14].

6.6. *Окончание доказательства теоремы* B *для нечетного числа n.* Пусть δ_j — исчезающий цикл, соответствующий петле σ_j (см. п. 6.3). Положим $U=\rho_t(\sigma_j)-\mathrm{Id}$. Тогда $U^2=0$ и $\dim \operatorname{Im} V=1$. Из предложения

6.4.1 следует, что применима лемма 6.5.1 и, следовательно, имеет место один из случаев a_1), a_2) или a_3). Так как на пространстве E^n существует невырожденная $M(E^n)$-инвариантная кососимметрическая форма, то имеет место случай a_3). Теорема B для нечетных чисел n доказана.

6.7. *Доказательство для четного n: промежуточный результат.* Допустим сперва справедливость следующего утверждения. Мы считаем, что n — четное число:

Лемма 6.7.1. *При достаточно большой кратности вложения* $X \hookrightarrow P^N$ *существует элемент* $\sigma \in \Pi_1(P^1 - S, s_0)$, *такой, что* $(\rho_t(\sigma) - \mathrm{Id})^2 = 0$ *и* $\dim \mathrm{Im}(\rho_t(\sigma) - \mathrm{Id}) = 2$.

Покажем, как вывести теорему B из леммы 6.7.1. Положим $U = \rho_t(\sigma) - \mathrm{Id}$. Так как $U^2 = 0$, то $U \in \mathscr{M}(E^n)$. Так как алгебра $\mathscr{M}(E^n)$ полупроста, то она не может быть коммутативна (так как в этом случае элемент U лежал бы в нильпотентном радикале алгебры Ли $\mathscr{M}(E')$). Поэтому, согласно предложению 6.4.1, $E^n \otimes \mathbf{C} = V^k$. Из равенства $\dim \mathrm{Im}\, U = 2$ следует, что $k = 1$ или 2.

Предположим, что $k = 2$. Невырожденная квадратичная форма на пространстве E^n индуцирует $\mathscr{M}(E^n)$-инвариантную квадратичную форму на пространстве V, которая тождественно равна нулю и вследствие неприводимости V невырождена. Как следует из леммы 6.5.1, имеет место равенство $\mathscr{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} = spV$ или $sl(V)$, и, следовательно, на V не существует ненулевой невырожденной симметрической $M(E^n)$-инвариантной формы. Поэтому подпространство $V \subset E^n$ изотропно. Так как представление группы $M(E^n)$ в пространстве E^n неприводимо, то существует элемент $s \in M(E^n)/M^0(E^n)$, такой, что $sV \cap V = 0$. Квадратичная форма $(x, y) \to x \cup y$ на E^n индуцирует невырожденную симметрическую форму на V по формуле $b(x, y) = x \cup sy$.

Форма $b(x, y)$ индуцирует изоморфизм представления алгебры $M(E^n)$ в подпространстве $sV \subset E^n \otimes \mathbf{C}$ с представлением, контрградиентным к V. Так как $E^n \otimes \mathbf{C} \simeq V^2$, то мы находим, что представление алгебры $\mathscr{M}(E^n)$ в пространстве V изоморфно контрградиентному. Поэтому невозможно равенство $\mathscr{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} = sl(V)$ при $\dim V > 2$. Следовательно (см. лемму 6.5.1), имеет место равенство $\mathscr{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} \simeq spV$. Так как каждый автоморфизм группы внутренний, то группа $M(E^n)(\mathbf{C})$ является факторгруппой прямого произведения $Z \times sp(V)$, где Z — конечная группа, изоморфная централизатору группы $sp(V)$ в $M(E^n)(\mathbf{C})$. Неприводимое представление $M(E^n) \to \mathrm{Aut}(E^n)$ индуцирует представление группы $Z \to sp(V)$, которое имеет вид $L \otimes V$, где L — неприводимое двумерное представление группы Z.

На пространстве $E^n \simeq L \otimes V$ существует единственная с точностью до множителя симметрическая билинейная инвариантная форма. Так как на пространстве V существует (по определению) $sp(V)$-инвариантная кососимметрическая форма, то на пространстве L существует билинейная кососимметрическая Z-инвариантная форма. Из этого следует, что элементы группы $Z \times sp(V)$ действуют на пространстве $E^n \otimes \mathbf{C}$ унимодулярными преобразованиями. Но это противоречит тому, что группа $M(E^n)/M^0(E^n)$ непуста и порождается симметриями относительно гиперплоскостей.

Следовательно, $k = 1$. Предположим, что $M(E^n) \otimes \mathbf{C} = g_2$ и E^n — ее представление в числах Кэли. Тогда группа G_2 действует транзитивно на векторах единичной длины. Так как группа $M(E^n)(\mathbf{C})$ содержит симметрии, то она сдоржит все симметрии и, следовательно, совпадает со всей ортогональной группой. Противоречие. Следовательно, $\mathscr{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} = \mathrm{so}(E^n \otimes \mathbf{C})$ и $M(E^n) = \mathrm{Aut}(E^n)$.

6.8. *Замена пучка.* Локальная система „исчезающих когомологий" на $P^1 - S$ является ограничением на $P^1 - S$ локальной системы исчезающих когомологий на $\check{P}^N - \check{X}$ (см. п. 2). Из теоремы Лефшеца (см. [10]) вытекает, что естественное отображение $\Pi_1(P^1 - S) - \Pi_1(\check{P}^N - \check{X})$ является эпиморфизмом. Поэтому для доказательства леммы 6.7.1 достаточно построить петлю в $\check{P}^N - \check{X}$, которая индуцирует отображение в пространстве E^n, удовлетворяющее требованиям леммы 6.7.1. Следовательно, мы можем рассматривать петли в пучках, которые не являются пучками Лефшеца.

6.9. *Локальная монодромия.* Пусть f: $\mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ — росток функции, голоморфной в окрестности точки 0 и такой, что $f(0) = 0$ и точка 0 является изолированной особой точкой функции f. Обозначим через B_ε шар в $\mathbf{C}^{n+1}$ с центром в 0 и маленьким радиусом ε. Если $\eta \neq 0$ — достаточно маленькое комплексное число, то отображение

$$\eta \to \tilde{H}^n(f^{-1}(\eta) \cap B_\varepsilon\, \mathbf{Q})$$

определяет локальную систему на диске с выколотой точкой и, следовательно, характеризуется автоморфизмом m_f векторного пространства E_f, который называется локальной монодромией.

Предложение 6.9.1. *Локальная монодромия зависит лишь от класса особенностей в* 0 *на многообразия* $f^{-1}(0)$.

Этот факт получается при изучении дискриминанта деформации особенности 0 на многообразии $f^{-1}(0)$.

Теорема 6.9.2. (А. Кампо) [1]. *Когда* $n = 1$ *и*, кроме того, $f = (Y^2 - X^5)(X^2 - Y^3)$, *то*

а) *характеристический полином* $\det(tm_f - 1;\ E_f)$ *равен*

$$(t-1)(t+1)^2\left[\frac{(t^5+1)}{t+1}\right]^2,$$

б) *минимальный полином* m_f *равен*

$$(t-1)(t+1)\left[\frac{(t^5+1)}{t+1}\right]^2.$$

В частности полином m_f^{10} *унипотентен и* $\operatorname{Im}(m_f^{10} - 1) = 1$.

Теорема 6.9.3. (Том — Себастиани) [15]. *Пусть* f: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ *и* g: $\mathbf{C}^p \to \mathbf{C}$ — *два ростка функций, голоморфных в* 0 *и таких, что* $f(0) = g(0) = 0$ *и* 0 *является изолированной особой точкой функции* f *и* g. *Тогда* $E_{f+g} = E_f \otimes E_g$ *и* $m_{f+g} = m_f \otimes m_g$.

Из этих двух теорем вытекает

Предложение 6.9.4. *Определим функцию* f: $\mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$, $n \geqslant 2$, *формулой*

$$f = x_0^3 + (x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_1^2) + \sum_3^n x_i^2.$$

Тогда

1) $\dim E_f = 22$;

2) *у автоморфизма* m_f *нет собственных значений, равных* 1;

3) $\dim \operatorname{Im}(m_f^{30} - \mathrm{Id}) = 2$, $(m_f^{30} - \mathrm{Id})^2 = 0$.

6.10. *Окончание доказательства.* Пусть Z — гладкое аналитическое многообразие, C — кривая, 0 — точка на C, $z_0 \in Z$, $f\colon Z \to C$ — голоморфное отображение, такое, что

а) f собственное отображение, гладкое вне точки z_0, и $f(z_0)=0$;

б) особенность многообразия $f^{-1}(0)$ в точке z аналитически изоморфна особенности, описанной в предложении 6.9.4.

Для $\eta \in \mathbf{C}$ положим $Y_\eta = f^{-1}(\eta)$. Тогда имеет место точная последовательность, согласованная с действием группы монодромии около точки 0 (см. [11]):

$$0 \to H^n(Y_0) \to H^n(Y_\eta) \to E_f \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Y_0) \to H^{n+1}(Y_n) \to 0.$$

По определению монодромия действует тривиально на пространствах $H^n(Y_0)$ и $H^{n+1}(Y_0)$. Из предложений (6.9.4,2) и (6.9.1) вытекает существование изоморфизма $H^n(Y_\eta) \simeq H^n(Y_0) \oplus E_f$, согласованного с действием монодромии. Если обозначить через m_f автоморфизм монодромии на пространстве $H^n(Y_\eta)$, то

$$(m_f^{30} - \mathrm{Id})^2 = 0 \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Im}(m_f^{30} - \mathrm{Id}) = 2.$$

Для окончания доказательства леммы 6.7.1 достаточно, ввиду (6.8), построить пучок гиперповерхностей степени d, имеющий при некотором значении параметра особенность, аналитически изоморфную особенности, описанной в предложении 6.9.4. Это можно сделать, потому что число d достаточно велико.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Campo N. A., Thèse, 1972/73, Orsay.
2. Andreotti A., Frankel T., In global analysis, Princeton Univ. Press, 1969.
3. Brieskorn E.,
4. Deligne P., SGA7, exp. XIII, Lecture Notes in Math. Springer — Verlag, a paraitre.
5. Deligne P., Hodge II, Publication in l'I.H.E.S., №
6. Fary I., Cohomologie des variétés algébriques, Annals of Maths, 65 (1957), 21—73.
7. Grothendieck A., Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sem. Bourbaki, № 279, 1964/65, Benjamin, New York.
8. Katz N., SGA 7, exp. XVII, Lecture Notes in Maths, Springer — Verlag, à paraitre.
9. Katz N., SGA 7, exp. XVIII, Lecture Notes in Maths, Springer — Verlag, à paraitre.
10. Lefschetz S., *L*'Analysis Situs et la Geometrie Algebrique, Gauthier — Villars, Paris.
11. Milnor J., Singular points of Complex Hypersurfaces, Annals of Maths, Studies № 61, Princeton Univ. Press.
12. Serre J.-P., Abelian *l*-adic Representations and Elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.
13. SGA-4, Tom 3, Théorie des topos et cohomologie étale des schemas, Lecture Notes in Maths № 305, Springer — Verlag.
14. Springer T. A.
15. Thom R., Sebastiane M., Inventiones.
16. Raynaud M., SGA 2, Exp. XIV Profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale, These, 1972.
17. Raynaud M., Theorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, These, 1972.
18. Weil A, Introduction à l'étude des variétés kähleriennes, Hermann, 1958.
19. Weil A., Number of solutions of equations, *Bulletin A. M. S.*, **55** (1949).