Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. С. Благовещенский, К. К. Лаврентьев, Рассеяние нестационарных волн на одномерном препятствии,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1976, том 62, 48–51

https://www.mathnet.ru/znsl2035

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
19 мая 2025 г., 05:51:32

Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К.

РАССЕЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ОДНОМЕРНОМ ПРЕПЯТСТВИИ

I. В настоящей статье рассматривается вопрос о построении решения следующей задачи. Пусть A_h – замыкание оператора $\widetilde{A}_h$, определенного на функциях $u(\rho, z, \varphi)$ из $L^2(R^3)$, таких, что 1) u имеет квадратично суммируемые вторые обобщенные производные в любой области $\Omega_\varepsilon \subset R^3$ вида $\rho > \varepsilon$, 2) при $\rho \to 0$ u допускает представление

$$u = a(z)\ln\rho + h(z)\,a(z) + o(1)\ , \tag{1}$$

Здесь ρ, φ, z – цилиндрические координаты в R^3, $h(z)$ – фиксированная вещественная [*] функция ограниченная вместе со своей первой производной, $a(z)$ такова, что ее преобразование Фурье квадратично суммируемо с весом $1+\kappa^2\ln^2(1+\kappa^2)$. Оператор $\widetilde{A}_h$ задается при $\rho \neq 0$ равенством $\widetilde{A}_h u = -\Delta u$. Известно, что A_h – самосопряжен и полуограничен снизу. Рассмотрим задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = -A_h u\ ,\\ &u\big|_{t=0} = 0,\quad u_t\big|_{t=0} = f \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Из свойств оператора A_h следует, что решение задачи (2) существует и единственно. Наша цель – указать метод построения разрешающего оператора для задачи (2) и исследовать его свойства. Будет, в частности, доказано, что в данной задаче имеет место конечная скорость распространения возмущений, равная единице. Последнее утверждение не является тривиальным, т.к. вообще говоря в похожих задачах встречаются случаи, когда в самом препятствии могут распространяться волны со скоростью, превышающей скорость распространения волн в окружающей среде, или даже с бесконечной скоростью.

II. Ядро $V(M, M_0, t)$ разрешающего оператора будем искать в виде $V = E + V_0$, где E – фундаментальное решение волнового уравнения $E_{tt} = \Delta E + \delta(M-M_0)\delta(t)$, $E\big|_{t<0} = 0$. Тогда V_0 – решение задачи:

---

[*] Для наших последующих рассмотрений вещественность $h(z)$ несущественна.

$$
\left.\begin{aligned}
&V_{0tt} = \Delta V_0 , \quad \rho > 0 , \\
&V_0\big|_{t<0} = 0 , \\
&V_0\big|_{\rho\to 0} = a(z,t)\ln\rho + h(z)a(z,t) - \frac{1}{2\pi}\,\delta\left(t^2-(z-z_0)^2-\rho_0^2\right)+O(1)
\end{aligned}\right\} . \tag{3}
$$

В (3) ρ_0 , φ_0 , z_0 – цилиндрические координаты точки M_0 . Легко видеть, в силу осевой симметрии задачи, что V_0 не зависит от φ и φ_0 . Полагаем в дальнейшем $z_0 = 0$. Задача отыскания функции V_0 в существенном сводится к нахождению $a(z,t)$. Нетрудно показать, что, если $a(z,t)$ найдено, то V_0 по ней восстанавливается в квадратурах:

$$
V_0 = -\iint\limits_{0<\tau<t} \delta\left((t-\tau)^2-(z-\xi)^2-\rho^2\right) a(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau . \tag{4}
$$

III. Поэтому в дальнейшем мы будем заниматься нахождением функции $a(z,t)$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$
\left.\begin{aligned}
&W_{tt} = \Delta W , \quad \rho > 0, \\
&W\big|_{t<0} = 0, \\
&W\big|_{\rho\to 0} = a(z,t)\ln\rho + \nu a(z,t) - \mathcal{F} + O(1)
\end{aligned}\right\} , \tag{5}
$$

в (5) ν – комплексная постоянная, причем $|\operatorname{Im}\nu| > \frac{\pi}{2}$, $\mathcal{F}(z,t)$ – известная функция. Для W справедливо представление (4). Переходя в нем к преобразованию Фурье по z и t, получим, что

$$
\widetilde{W} = \widetilde{a}(\kappa,s)\, Z_0\left(\sqrt{s^2-\kappa^2}\,\rho\right) . \tag{6}
$$

Здесь κ и s двойственные переменные к z и t , соответственно, Z_0 – цилиндрическая функция, равная:

$$
Z_0 = \begin{cases}
-\frac{\pi i}{2} H_0^1\left(\sqrt{s^2-\kappa^2}\,\rho\right), & s > |\kappa|, \\
-K_0\left(\sqrt{\kappa^2-s^2}\,\rho\right) , & |s| < |\kappa|, \\
\frac{\pi i}{2} H_0^2\left(\sqrt{s^2-\kappa^2}\,\rho\right) , & s < -|\kappa| .
\end{cases}
$$

Подставляя в формулу (6) разложение Z_0 в окрестности $\rho = 0$, получим

$$
\widetilde{W}\big|_{\rho\to 0} = \widetilde{a}(\kappa,s)\left[\ln\rho + \frac{1}{2}\ln(\kappa^2-s^2) - \ln 2 + C + o(1)\right] . \tag{7}
$$

Здесь под $\ln(\kappa^2-s^2)$ понимается ветвь логарифма, аналитическая по s в верхней полуплоскости, причем $\ln(\kappa^2-s^2)$ вещественен при

$s \in (-|\kappa|, |\kappa|)$, C - постоянная Эйлера. Сравнивая (7) с граничным условием в задаче (5), получаем

$$\tilde{a} = \frac{2\tilde{\mathcal{F}}}{\nu_1 - \ln(\kappa^2 - s^2)} = \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\mathcal{F}},$$

где $\tilde{\mathcal{F}}$ - преобразование Фурье от $\mathcal{F}$, $\nu_1 = 2\nu - 2C - 2\ln 2$, $\tilde{\mathcal{D}} = 2(\nu_1 - \ln(\kappa^2 - s^2))^{-1}$.

Переходя к обратному преобразованию Фурье, получим

$$a = \mathcal{D} * \mathcal{F}. \tag{8}$$

Здесь $\mathcal{D}$ - функция, обладающая следующими свойствами:

1) $\mathcal{D} \neq 0$ лишь при $t \geq |z|$

2) $\mathcal{D}$ при $t \geq |z|$ есть функция от $t^2 - z^2$, представимая в виде:

$$\mathcal{D}(t^2-z^2) = \frac{4}{t^2-z^2}\int_0^\infty\int_0^\infty d\xi\, d\eta\, e^{-\xi-\eta}\left(\nu_1 + \ln\frac{4\xi\eta}{t^2-z^2}\right)^{-2}\left[\left(\nu_1+\ln\frac{4\xi\eta}{t^2-z^2}\right)^2 + 4\pi^2\right]^{-1}, \tag{9}$$

3) из формулы (9) легко найти особенности функции $\mathcal{D}$ при $t \to |z| + 0$:

$$\mathcal{D} = 4\cdot(t^2-z^2)^{-1}\left[\ln^{-4}(t^2-z^2) + O(|\ln^{-5}(t^2-z^2)|)\right]. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, в частности, локальная суммируемость функции $\mathcal{D}$. Можно также показать, что асимптотику (10) можно дифференцировать.

IV. Вернемся к задаче (3). Подставляя в формулу (8) $\mathcal{F} = \frac{1}{2\pi}\delta(t^2 - z^2 - \rho_0^2) - h(z)\, a(z,t)$, получим интегральное уравнение для функции $a(z,t)$:

$$a(z,t) = -\iint\limits_{0<\tau<t,\ |z-\zeta|<t-\tau} \mathcal{D}((t-\tau)^2 - (z-\zeta)^2)\, h(\zeta)\, a(\zeta,\tau)\, d\zeta\, d\tau + g(z,t), \tag{11}$$

где $g(z,t) = 0$ при $t < \sqrt{z^2 + \rho_0^2}$ и

$$g(z,t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{0<\tau<t,\ |z-\zeta|<t-\tau} \mathcal{D}((t-\tau)^2 - (z-\zeta)^2)\,\delta(\tau^2 - \zeta^2 - \rho_0^2)\, d\zeta\, d\tau,$$

или, после преобразований,

$$g(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{(\sqrt{t^2-z^2}-\rho_0)^2} \frac{\mathcal{D}(\ell)\, d\ell}{\sqrt{(t^2-z^2+\rho_0^2-\ell)^2 - 4\rho_0^2(t^2-z^2)}}. \tag{12}$$

Нетрудно вычислить особенность функции g при $\sqrt{t^2-z^2} \to \rho_0 + 0$:

$$g = -\frac{2}{3\pi}(t^2-z^2-\rho_0^2)^{-1}\left[\ln^{-3}(t^2-z^2-\rho_0^2) + O(\ln^{-4}(t^2-z^2-\rho_0^2))\right].$$

Тем самым уравнение (11) является вольтерровским интегральным уравнением второго рода с локально суммируемыми ядром и свободным членом. Можно показать, что его решение существует, единственно и может быть найдено методом последовательных приближений. При этом особенность функции $a(z,t)$ совпадает в главном члене с особенностью $q(z,t)$. Поскольку $q(z,t)=0$ при $t<\sqrt{z^2+\rho_0^2}$, то и $a(z,t)=0$ при тех же z и t. Заметим, что построенная по $a(z,t)$ функция V_0 имеет смысл волны, рассеянной препятствием, сосредоточенным на оси z, при падении на него волны, порожденной точечным источником. Очевидно, что $V_0=0$ при $t<\sqrt{z^2+(\rho+\rho_0)^2}$, при $t \to \sqrt{z^2+(\rho+\rho_0)^2}+0$ V_0 имеет особенность:

$$V_0=-\frac{1}{6\pi\sqrt{\rho\rho_0[t^2-z^2-(\rho+\rho_0)^2]}\,\ln^2[t^2-z^2-(\rho+\rho_0)^2]}\,(1+o(1)) .$$

B l a g o v e s h e n s k y A.S., L a v r e n t j e v K.K.

Scattering of nonstationary waves on a onedimensional obstacle.

In this work the authors study the threedimensional wave equation with a boundary condition on an axis.