S. V. Lapin, Dihedral modules with ∞-simplicial faces and dihedral homology of involutive A_∞-algebras over rings, *Algebra i Analiz*, 2021, Volume 33, Issue 3, 85–110

https://www.mathnet.ru/eng/aa1762

Алгебра и анализ
Том 33 (2021), №3

ДИЭДРАЛЬНЫЕ МОДУЛИ С ∞-СИМПЛИЦИАЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ И ДИЭДРАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ ИНВОЛЮТИВНЫХ A_∞-АЛГЕБР НАД КОЛЬЦАМИ.

© С. В. ЛАПИН

Диэдральные гомологии инволютивных ассоциативных алгебр над полями нулевой характеристики впервые были определены в [1] как гомологии комплекса коинвариантов действия группы диэдра на комплексе Хохшильда инволютивной ассоциативной алгебры. После этого в [2] была развита теория диэдральных симплициальных модулей, на основе которой в [2] была разработана теория диэдральных гомологий инволютивных ассоциативных алгебр над любыми коммутативными унитальными кольцами. В [2] также было показано, что над полями нулевой характеристики определения диэдральных гомологий из [1] и [2] эквивалентны. Стоит отметить, что в определении диэдральных гомологий инволютивных ассоциативных алгебр операторы вырождений диэдральных симплициальных модулей никак не используются, то есть определения диэдральных гомологий инволютивной унитальной ассоциативной алгебры и диэдральных гомологий инволютивной ассоциативной алгебры без единицы совпадают. Поэтому в основе определения диэдральных гомологий инволютивных ассоциативных алгебр лежит, на самом деле, понятие диэдрального модуля с симплициальными гранями. Операторы вырождений диэдрального симплициального модуля, определяемого инволютивной унитальной ассоциативной алгеброй, были использованы в [2] для построения длинной точной последовательности, связывающей диэдральные и рефлексивные гомологии этой алгебры. Разработанная в [2] теория диэдральных гомологий оказалась очень полезным инструментом исследования эрмитовой алгебраической K-теории инволютивных ассоциативных алгебр, а также исследования алгебраических и гомотопических свойств эрмитовой алгебраической K-теории топологических пространств (см., например, обзор [3]).

С другой стороны, в [4] над полями нулевой характеристики были определены диэдральные гомологии инволютивных A_∞-алгебр как гомологии

Ключевые слова: диэдральные гомологии, циклические гомологии, диэдральные модули с ∞-симплициальными гранями, циклические модули с ∞-симплициальными гранями, A_∞-алгебра, инволютивная A_∞-алгебра.

комплекса коинвариантов действия группы диэдра на комплексе Хохшильда инволютивной A_∞-алгебры. В связи с этим возникла важная и весьма интересная задача построения теории диэдральных гомологий инволютивных A_∞-алгебр над любыми коммутативными унитальными кольцами, частным случаем которой являлась бы теория диэдральных гомологий, развитая в [2]. Интерес к построению такой теории вызван, имея в виду связи между диэдральными гомологиями и эрмитовой алгебраической K-теорией, важным вопросом о возможности построения, подобно тому, как это сделано в [5], эрмитовой алгебраической K-теории инволютивных A_∞-алгебр. Кроме того, большой интерес к построению такой теории вызван еще потенциальной возможностью применения этой теории, подобно тому, как это сделано в [6], к изучению граф-комплексов Концевича и когомологий пространств модулей.

Настоящая работа посвящена решению указанной выше задачи, а именно, построению на основе комбинаторной техники диэдральных модулей с ∞-симплициальными гранями теории диэдральных гомологий инволютивных A_∞-алгебр над любыми коммутативными унитальными кольцами. Работа состоит из трех параграфов. В §1 на основе конструкции дифференциального модуля с ∞-симплициальными гранями [7–9] введены понятия диэдрального и рефлексивного модулей с ∞-симплициальными гранями. Далее даются определения диэдральных и рефлексивных гомологий соответственно диэдральных и рефлексивных модулей с ∞-симплициальными гранями. В §2 для каждой инволютивной A_∞-алгебры над любым коммутативным унитальным кольцом построен диэдральный модуль с ∞-симплициальными гранями (теорема 2.1). Далее даются определения диэдральных и рефлексивных гомологий инволютивной A_∞-алгебры над любым коммутативным унитальным кольцом, соответственно, как диэдральных и рефлексивных гомологий диэдрального модуля с ∞-симплициальными гранями, определяемого данной инволютивной A_∞-алгеброй. Показано, что над полями нулевой характеристики определения диэдральных гомологий инволютивной A_∞-алгебры, соответственно данные здесь и в [4], эквивалентны (следствие 2.1). В §3 введено понятие инволютивной гомотопически унитальной A_∞-алгебры, которое является инволютивным аналогом понятия гомотопически унитальной A_∞-алгебры [10] (см. также [9]). Далее построена длинная точная последовательность, связывающая диэдральные и рефлексивные гомологии инволютивных гомотопически унитальных A_∞-алгебр над любыми коммутативными унитальными кольцами (теорема 3.1). Эта точная последовательность обобщает на инволютивные гомотопически унитальные A_∞-алгебры длинную точную последовательность из [2], которая является эрмитовым аналогом точной последовательности Конна–Цыгана [11, 12] для циклических гомологий унитальных ассоциативных алгебр.

Все рассматриваемые в работе модули и отображения модулей являются, соответственно, K-модулями и K-линейными отображениями модулей, где K — любое коммутативное унитальное, то есть с единицей, кольцо.

§1. Диэдральные и рефлексивные модули с ∞-симплициальными гранями

Под биградуированным модулем далее будем понимать любой биградуированный модуль $X = \{X_{n,m}\}$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Под дифференциальным биградуированным модулем или, более кратко, дифференциальным модулем (X, d) далее будем понимать любой биградуированный модуль X, снабженный дифференциалом $d\colon X_{*,\bullet} \to X_{*,\bullet-1}$ бистепени $(0, -1)$.

Напомним, что дифференциальным модулем с симплициальными гранями называется дифференциальный модуль (X, d), рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей $\partial_i\colon X_{n,\bullet} \to X_{n-1,\bullet}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, которые являются отображениями дифференциальных модулей, то есть $d\partial_i = -\partial_i d$, и удовлетворяют симплициальным коммутационным соотношениям $\partial_i\partial_j = \partial_{j-1}\partial_i$, $i < j$. Отображения $\partial_i\colon X_{n,\bullet} \to X_{n-1,\bullet}$ называются симплициальными операторами граней или, более кратко, симплициальными гранями дифференциального модуля (X, d).

Напомним теперь понятие дифференциального модуля с ∞-симплициальными гранями [7] (см. также [8]), которое является гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциального модуля с симплициальными гранями.

Рассмотрим для любых дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) дифференциальный модуль

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}(X; Y) = \{\mathrm{Hom}(X; Y)_{n,m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z},\\ d\colon \mathrm{Hom}(X; Y)_{*,\bullet} \to \mathrm{Hom}(X; Y)_{*,\bullet-1}.\end{gathered}$$

Элементами модуля $\mathrm{Hom}(X; Y)_{n,m}$ являются любые отображения биградуированных модулей $f\colon X_{*,\bullet} \to Y_{*+n,\bullet+m}$ бистепени (n, m), и дифференциал

$$d\colon \mathrm{Hom}(X; Y)_{n,m} \to \mathrm{Hom}(X; Y)_{n,m-1}, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

задается на элементах $f \in \mathrm{Hom}(X; Y)_{n,m}$ следующей формулой:

$$d(f) = df + (-1)^{n+m+1} fd\colon X_{*,\bullet} \to Y_{*+n,\bullet+m-1}.$$

Пусть Σ_k — симметрическая группа перестановок множества из k элементов. Для произвольной перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ и любого набора целых неотрицательных чисел $(i_1, \dots, i_k)$, где $i_1 < \dots < i_k$, рассмотрим набор чисел $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$, где σ действует на набор $(i_1, \dots, i_k)$ обычным образом, то есть путем перестановки чисел из этого набора местами. Для указанного набора $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ определим набор чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, где $\widehat{\sigma(i_s)} = \sigma(i_s) - \alpha(\sigma(i_s))$, $1 \leqslant s \leqslant k$, и $\alpha(\sigma(i_s))$ — количество чисел из набора $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_s), \dots \sigma(i_k))$, стоящих справа от числа $\sigma(i_s)$, и меньших этого числа.

Дифференциальным модулем с ∞-симплициальными гранями или, более кратко, F_∞-модулем $(X, d, \widetilde{\partial})$ называется дифференциальный модуль (X, d), рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\dots,i_k)} \colon X_{n,\bullet} \to X_{n-k,\bullet+k-1}\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$d(\partial_{(i_1,\dots,i_k)}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)},\dots,\widehat{\sigma(i_m)})}\, \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})},\dots,\widehat{\sigma(i_k)})}, \tag{1.1}$$

где I_σ — множество всех разбиений набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$ на два таких набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})$ и $(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, $1 \leqslant m \leqslant k-1$, что выполнены условия $\widehat{\sigma(i_1)} < \dots < \widehat{\sigma(i_m)}$ и $\widehat{\sigma(i_{m+1})} < \dots < \widehat{\sigma(i_k)}$. Левая часть соотношений (1.1) вычисляется по формуле

$$d(\partial_{(i_1,\dots,i_k)}) = d\partial_{(i_1,\dots,i_k)} + \partial_{(i_1,\dots,i_k)} d,$$

где отображения $\partial_{(i_1,\dots,i_k)}$ рассматриваются как элементы

$$\partial_{(i_1,\dots,i_k)} \in \mathrm{Hom}(X; X)_{-k,k-1}$$

дифференциального модуля $(\mathrm{Hom}(X; X), d)$.

Например, при $k = 1, 2, 3$ соотношения (1.1) записываются, соответственно, в виде

$$d(\partial_{(i)}) = 0, \quad i \geqslant 0, \qquad d(\partial_{(i,j)}) = \partial_{(j-1)}\partial_{(i)} - \partial_{(i)}\partial_{(j)}, \quad i < j,$$
$$d(\partial_{(i_1,i_2,i_3)}) = -\partial_{(i_1)}\partial_{(i_2,i_3)} - \partial_{(i_1,i_2)}\partial_{(i_3)} - \partial_{(i_3-2)}\partial_{(i_1,i_2)}$$
$$- \partial_{(i_2-1,i_3-1)}\partial_{(i_1)} + \partial_{(i_2-1)}\partial_{(i_1,i_3)} + \partial_{(i_1,i_3-1)}\partial_{(i_2)}, \quad i_1 < i_2 < i_3.$$

Семейство отображений $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\dots,i_k)}\}$ называется F_∞-дифференциалом F_∞-модуля $(X, d, \widetilde{\partial})$. Отображения $\partial_{(i_1,\dots,i_k)}$ из F_∞-дифференциала F_∞-модуля $(X, d, \widetilde{\partial})$ называются ∞-симплициальными гранями этого F_∞-модуля.

Простыми примерами F_∞-модулей являются дифференциальные модули с симплициальными гранями. Действительно, если для произвольного дифференциального модуля с симплициальными гранями (X, d, ∂_i) определить F_∞-дифференциал $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\dots,i_k)}\}\colon X \to X$, полагая $\partial_{(i)} = \partial_i$, $i \geqslant 0$, и $\partial_{(i_1,\dots,i_k)} = 0$, $k > 1$, то, учитывая, что $d\partial_{(i)} = -\partial_{(i)}d$, то есть $d(\partial_{(i)}) = 0$, получим F_∞-модуль $(X, d, \widetilde{\partial})$.

Стоит отметить, что в работе [8] было разработано общее понятие дифференциального ∞-симплициального модуля, частью структуры которого является рассмотренное выше понятие F_∞-модуля.

Перейдем теперь к введению понятия диэдрального модуля с ∞-симплициальными гранями.

Диэдральным биградуированным модулем (X, t, r) будем называть любой биградуированный модуль X, рассматриваемый вместе с двумя семействами отображений модулей

$$t = \{t_n\colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}, \quad n \geqslant 0,$$

$$r = \{r_n\colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}, \quad n \geqslant 0,$$

для которых выполнены следующие условия:

$$t_n^{n+1} = 1_{X_{n,\bullet}}, \quad r_n^2 = 1_{X_{n,\bullet}}, \quad r_n t_n = t_n^{-1} r_n, \quad n \geqslant 0.$$

Другими словами, на градуированном модуле $X_{n,\bullet}$, $n \geqslant 0$, слева действует действует группа диэдра порядка $2(n+1)$ с образующими t_n и r_n.

Диэдральным дифференциальным модулем далее будем называть любую четвёрку (X, t, r, d), где (X, t, r) — диэдральный биградуированный модуль, (X, d) — дифференциальный модуль и, кроме того, для каждого $n \geqslant 0$ выполнены условия $dt_n = t_n d$ и $dr_n = r_n d$.

Напомним теперь, что в [2] было дано определение диэдрального симплициального модуля $(X, t, r, d, \partial_i, s_j)$. Если в этом определении "забыть" операторы вырождений s_j и соотношения, в которых они присутствуют, то получим определение диэдрального модуля с симплициальными гранями (X, t, r, d, ∂_i). Рассмотрим определение диэдрального модуля с симплициальными гранями более подробно.

Диэдральным модулем с симплициальными гранями называется диэдральный дифференциальный модуль (X, t, r, d), рассматриваемый вместе с семейством отображений $\partial_i\colon X_{n,\bullet} \to X_{n-1,\bullet}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, относительно которых тройка (X, d, ∂_i) является дифференциальным модулем (X, d) с симплициальными гранями ∂_i, которые для каждого $n \geqslant 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\partial_i t_n = t_{n-1}\partial_{i-1}, \quad 0 < i \leqslant n, \quad \partial_0 t_n = \partial_n, \quad \partial_i r_n = r_{n-1}\partial_{n-i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Отметим, что если в определении диэдрального модуля с симплициальными гранями забыть семейство автоморфизмов $r = \{r_n\colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}$ и соотношения, в которых они присутствуют, то получим определение циклического модуля с симплициальными гранями [13].

Определение 1.1. Диэдральным дифференциальным модулем с ∞-симплициальными гранями или, более кратко, DF_∞-модулем будем называть любую пятёрку $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$, где (X, t, r, d) — диэдральный дифференциальный модуль и $(X, d, \widetilde{\partial})$ – дифференциальный модуль с ∞-симплициальными гранями, которые связаны между собой следующими соотношениями:

$$\partial_{(i_1,\dots,i_k)} t_n = \begin{cases} t_{n-k}\partial_{(i_1-1,\dots,i_k-1)}, & i_1 > 0, \\ (-1)^{k-1}\partial_{(i_2-1,\dots,i_k-1,n)}, & i_1 = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\partial_{(i_1,\dots,i_k)} r_n = (-1)^{k(k-1)/2} r_{n-k}\partial_{(n-i_k,\dots,n-i_1)}. \tag{1.3}$$

Семейство отображений $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\dots,i_k)} \colon X_{n,\bullet} \to X_{n-k,\bullet+k-1}\}$ далее будем называть F_∞-дифференциалом DF_∞-модуля $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$. Отображения $\partial_{(i_1,\dots,i_k)}$ из F_∞-дифференциала DF_∞-модуля $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$ будем называть ∞-симплициальными гранями этого DF_∞-модуля.

Отметим, что если в определении 1.1 забыть семейство $r = \{r_n \colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}$ и соотношения (1.3), то получим определение циклического модуля с ∞-симплициальными гранями [15] или, более кратко, CF_∞-модуля. Таким образом, для каждого DF_∞-модуля $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$ всегда определен CF_∞-модуль $(X, t, d, \widetilde{\partial})$.

Простыми примерами DF_∞-модулей служат диэдральные модули с симплициальными гранями. Действительно, если для каждого диэдрального модуля с симплициальными гранями (X, t, r, d, ∂_i) определить F_∞-дифференциал $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\dots,i_k)}\}$, полагая $\partial_{(i)} = \partial_i$, $i \geqslant 0$, и $\partial_{(i_1,\dots,i_k)} = 0$, $k > 1$, то получим DF_∞-модуль $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$.

Проведем теперь подготовку к введению понятия диэдральных гомологий диэдрального модуля с ∞-симплициальными гранями.

Напомним [14], что D_∞-дифференциальным модулем или, более кратко, D_∞-модулем (X, d^i) называется биградуированный модуль X, рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей $\{d^i \colon X_{*,\bullet} \to X_{*-i,\bullet+i-1} \mid i \in \mathbb{Z},\ i \geqslant 0\}$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0, \quad k \geqslant 0.$$

D_∞-модуль (X, d^i) называется стабильным, если для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $k = k(x) \geqslant 0$, для которого выполнено условие

$d^i(x) = 0$, $i > k$. Любой стабильный D_∞-модуль (X, d^i) определяет цепной комплекс $(\overline{X}, \overline{d})$, который задается по формулам $\overline{X}_n = \bigoplus_{k=0}^n X_{k,n-k}$, $\overline{d} = \sum_{i=0}^n d^i \colon \overline{X}_n \to \overline{X}_{n-1}$, $n \geqslant 0$. Отображение $\overline{d} \colon \overline{X}_\bullet(X) \to \overline{X}_{\bullet-1}$ действительно является дифференциалом, поскольку из указанных выше соотношений следует равенство $\overline{d}\,\overline{d} = 0$.

В работе [7] было показано, что любой F_∞-модуль $(X, d, \widetilde{\partial})$ определяет последовательность стабильных D_∞-модулей (X, d_q^i), $q \geqslant 0$, задаваемых по следующим формулам:

$$d_q^k = \sum_{0 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n-q} (-1)^{i_1+\dots+i_k} \partial_{(i_1,\dots,i_k)} \colon X_{n,\bullet} \to X_{n-k,\bullet+k-1}, \quad k \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Напомним теперь конструкцию цепного бикомплекса [15], определяемого циклическим модулем с ∞-симплициальными гранями. Пусть задан любой CF_∞-модуль $(X, t, d, \widetilde{\partial})$. Рассмотрим для этого CF_∞-модуля два D_∞-модуля (X, d_0^i) и (X, d_1^i), определяемых при $q = 0, 1$ по формулам (1.4), и рассмотрим два семейства отображений

$$T_n = (-1)^n t_n \colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}, \quad n \geqslant 0,$$
$$N_n = 1 + T_n + T_n^2 + \dots + T_n^n \colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}, \quad n \geqslant 0.$$

Очевидно, что из условия $t_n^{n+1} = 1$, $n \geqslant 0$, следуют равенства

$$(1 - T_n)N_n = 0, \quad N_n(1 - T_n) = 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Более того, в [15] было показано, что указанные выше семейства

$$\{T_n \colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}, \quad \{N_n \colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\},$$
$$\{d_0^i \colon X_{*,\bullet} \to X_{*-i,\bullet+i-1}\}, \quad \{d_1^i \colon X_{*,\bullet} \to X_{*-i,\bullet+i-1}\}$$

связаны между собой следующими соотношениями:

$$d_0^i(1 - T_n) = (1 - T_{n-i})d_1^i, \quad d_1^i N_n = N_{n-i} d_0^i, \quad i \geqslant 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Рассмотрим для D_∞-модулей (X, d_0^i) и (X, d_1^i) цепные комплексы $(\overline{X}, b)$ и $(\overline{X}, b')$, где $b = \overline{d}_0 = (d_0^0 + d_0^1 + \dots + d_0^i + \dots)$ и $b' = \overline{d}_1 = (d_1^0 + d_1^1 + \dots + d_1^i + \dots)$. Кроме того, рассмотрим два семейства отображений

$$\overline{T}_n = \sum_{k=0}^n T_k \colon \overline{X}_n \to \overline{X}_n, \quad \overline{N}_n = \sum_{k=0}^n N_k \colon \overline{X}_n \to \overline{X}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Из (1.5) и (1.6) видно, что имеют место равенства

$$(1 - \overline{T}_n)\overline{N}_n = 0, \quad \overline{N}_n(1 - \overline{T}_n) = 0,$$
$$b(1 - \overline{T}_n) = (1 - \overline{T}_{n-1})b', \quad b'\overline{N}_n = \overline{N}_{n-1} b, \quad n \geqslant 0.$$

Эти равенства говорят о том, что для любого CF_∞-модуля $(X,t,d,\widetilde{\partial})$ определен цепной бикомплекс

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "-b'"'] & \vdots \arrow[d, "b"'] & \vdots \arrow[d, "-b'"'] & \\
\overline{X}_{n+1} \arrow[d, "b"'] & \overline{X}_{n+1} \arrow[l, "1-\overline{T}_{n+1}"'] \arrow[d, "-b'"'] & \overline{X}_{n+1} \arrow[l, "\overline{N}_{n+1}"'] \arrow[d, "b"'] & \overline{X}_{n+1} \arrow[l, "1-\overline{T}_{n+1}"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, "\overline{N}_{n+1}"'] \\
\overline{X}_{n} \arrow[d, "b"'] & \overline{X}_{n} \arrow[l, "1-\overline{T}_{n}"'] \arrow[d, "-b'"'] & \overline{X}_{n} \arrow[l, "\overline{N}_{n}"'] \arrow[d, "b"'] & \overline{X}_{n} \arrow[l, "1-\overline{T}_{n}"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, "\overline{N}_{n}"'] \\
\overline{X}_{n-1} \arrow[d, "b"'] & \overline{X}_{n-1} \arrow[l, "1-\overline{T}_{n-1}"'] \arrow[d, "-b'"'] & \overline{X}_{n-1} \arrow[l, "\overline{N}_{n-1}"'] \arrow[d, "b"'] & \overline{X}_{n-1} \arrow[l, "1-\overline{T}_{n-1}"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, "\overline{N}_{n-1}"'] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Этот цепной бикомплекс будем обозначать через

$$(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2),$$

где

$$C(\overline{X})_{n,m}=\overline{X}_n,\quad n\geqslant 0,\quad m\geqslant 0,$$

$$\delta_1\colon C(\overline{X})_{n,m}\to C(\overline{X})_{n-1,m},\quad \delta_2\colon C(\overline{X})_{n,m}\to C(\overline{X})_{n,m-1},$$

$$\delta_1=\begin{cases} b, & m\equiv 0 \bmod(2),\\ -b', & m\equiv 1 \bmod(2),\end{cases}\qquad \delta_2=\begin{cases} 1-\overline{T}_n, & m\equiv 1 \bmod(2),\\ \overline{N}_n, & m\equiv 0 \bmod(2).\end{cases}$$

Цепной комплекс, ассоциированный с цепным бикомплексом $(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2)$, будем обозначать через $(\mathrm{Tot}(C(\overline{X})),\delta)$, где $\delta=\delta_1+\delta_2$.

Циклическими гомологиями $HC(X)$ циклического модуля с ∞-симплициальными гранями $(X,t,d,\widetilde{\partial})$ называются [15] гомологии цепного комплекса $(\mathrm{Tot}(C(\overline{X})),\delta)$, ассоциированного с цепным бикомплексом

$$(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2).$$

Пусть теперь задан любой диэдральный модуль с ∞-симплициальными гранями $(X,t,r,d,\widetilde{\partial})$. Рассмотрим для этого DF_∞-модуля два указанных выше D_∞-модуля (X,d_0^i), (X,d_1^i) и семейство отображений

$$R_n=(-1)^{n(n+1)/2}r_n\colon X_{n,\bullet}\to X_{n,\bullet},\quad n\geqslant 0.$$

Без труда проверяется, что из условий $t_n^{n+1} = r_n^2 = 1$, $r_n t_n = t_n^{-1} r_n$, $n \geqslant 0$, следуют равенства

$$(1 - T_n)(R_n T_n) = -R_n(1 - T_n), \quad N_n R_n = (R_n T_n) N_n, \quad n \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Из соотношений (1.3) следует, что для любого набора $0 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$ имеет место равенство

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)} R_n = (-1)^{(n - i_k) + \dots + (n - i_1)} R_{n-k} \partial_{(n - i_k, \dots, n - i_1)}.$$

Из (1.2) и (1.3) получаем, что для любого набора $0 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n - 1$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(-1)^{i_1 + \dots + i_k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)} (R_n T_n)\\ &= (-1)^{(n - i_k - 1) + \dots + (n - i_1 - 1)} (R_{n-k} T_{n-k}) \partial_{(n - i_k - 1, \dots, n - i_1 - 1)}.\end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует, что для указанных выше семейств отображений модулей $\{d_0^i \colon X_{*,\bullet} \to X_{*-i, \bullet+i-1}\}$ и $\{d_1^i \colon X_{*,\bullet} \to X_{*-i, \bullet+i-1}\}$ имеют место соотношения

$$d_0^i R_n = R_{n-i} d_0^i, \quad d_1^i (R_n T_n) = (R_{n-i} T_{n-i}) d_1^i, \quad i \geqslant 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Рассмотрим для D_∞-модулей (X, d_0^i) и (X, d_1^i) цепные комплексы $(\overline{X}, b)$ и $(\overline{X}, b')$. Кроме того, рассмотрим семейство отображений

$$\overline{R}_n = \sum_{m=0}^{n} R_m \colon \overline{X}_n \to \overline{X}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Из формул (1.7) и (1.8) следует, что справедливы следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}(1 - \overline{T}_n)(\overline{R}_n \overline{T}_n) = -\overline{R}_n (1 - \overline{T}_n), \quad \overline{N}_n \overline{R}_n = (\overline{R}_n \overline{T}_n) \overline{N}_n, \quad n \geqslant 0,\\ b \overline{R}_n = \overline{R}_{n-1} b, \quad b' (\overline{R}_n \overline{T}_n) = (\overline{R}_{n-1} \overline{T}_{n-1}) b', \quad n \geqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Для DF_∞-модуля $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$ всегда определен CF_∞-модуль $(X, t, d, \widetilde{\partial})$, значит, для этого DF_∞-модуля всегда определен также цепной бикомплекс $(C(\overline{X}), \delta_1, \delta_2)$. Равенства (1.9) говорят о том, что на цепном бикомплексе $(C(\overline{X}), \delta_1, \delta_2)$ любого DF_∞-модуля $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$ действует группа $\mathbb{Z}_2 = \{1, \vartheta \mid \vartheta^2 = 1\}$ посредством автоморфизма порядка два

$$\vartheta \colon C(\overline{X})_{*,\bullet} \to C(\overline{X})_{*,\bullet},$$

который задается на произвольном элементе $x \in C(\overline{X})_{n,m}$ следующим правилом:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} (-1)^k \overline{R}_n(x), & m = 2k,\\ (-1)^{k+1} \overline{R}_n \overline{T}_n(x), & m = 2k + 1.\end{cases}$$

Определение 1.2. Диэдральными гомологиями $HD(X)$ диэдрального модуля с ∞-симплициальными гранями $(X,t,r,d,\widetilde{\partial})$ далее будем называть гипергомологии $H(\mathbb{Z}_2;(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2))$ группы $\mathbb{Z}_2$ с коэффициентами в $(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2)$ относительно указанного выше действия $\mathbb{Z}_2$ на цепном бикомплексе $(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2)$.

Гипергомологии $H(\mathbb{Z}_2;(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2))$ определяются как гомологии цепного комплекса, ассоциированного с цепным трикомплексом $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)\otimes_{K[\mathbb{Z}_2]} C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, где K — основное кольцо, $K[\mathbb{Z}_2]$ — групповое кольцо группы $\mathbb{Z}_2=\{1,\vartheta\,|\,\vartheta^2=1\}$, $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2),d)$ — любая проективная резольвента тривиального $K[\mathbb{Z}_2]$-модуля K и

$$\delta_3=(-1)^{n+m}d\otimes 1\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)_l\otimes_{K[\mathbb{Z}_2]} C(\overline{X})_{n,m}\to \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)_{l-1}\otimes_{K[\mathbb{Z}_2]} C(\overline{X})_{n,m}.$$

Если в качестве проективной резольвенты $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2),d)$ взять стандартную свободную резольвенту

$$(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_2),d)\colon K[\mathbb{Z}_2]\xleftarrow{1-\vartheta}K[\mathbb{Z}_2]\xleftarrow{1+\vartheta}K[\mathbb{Z}_2]\xleftarrow{1-\vartheta}K[\mathbb{Z}_2]\xleftarrow{1+\vartheta}\cdots,$$

то получим, что диэдральными гомологиями

$$HD(X)=H(\mathbb{Z}_2;(C(\overline{X}),\delta_1,\delta_2))$$

любого DF_∞-модуля $(X,t,r,d,\widetilde{\partial})$ являются гомологии цепного комплекса, ассоциированного с цепным трикомплексом

$$(D(\overline{X}),\delta_1,\delta_2,\delta_3),$$

где

$$D(\overline{X})_{n,m,l}=C(\overline{X})_{n,m}=\overline{X}_n,\quad n\geqslant 0,\quad m\geqslant 0,\quad l\geqslant 0,$$

дифференциалы δ_1 и δ_2 были определены выше, и дифференциал

$$\delta_3\colon D(\overline{X})_{n,m,l}\to D(\overline{X})_{n,m,l-1}$$

задается следующей формулой:

$$\delta_3=\begin{cases}(-1)^n(1+(-1)^l\overline{R}_n), & m\equiv 0\,\mathrm{mod}(4),\\ (-1)^{n+1}(1+(-1)^{l+1}\overline{R}_n\overline{T}_n), & m\equiv 1\,\mathrm{mod}(4),\\ (-1)^n(1+(-1)^{l+1}\overline{R}_n), & m\equiv 2\,\mathrm{mod}(4),\\ (-1)^{n+1}(1+(-1)^l\overline{R}_n\overline{T}_n), & m\equiv 3\,\mathrm{mod}(4).\end{cases}$$

Цепной комплекс, ассоциированный с цепным трикомплексом

$$(D(\overline{X}),\delta_1,\delta_2,\delta_3),$$

далее будем обозначать через $(\mathrm{Tot}(D(\overline{X})),\widehat{\delta})$, где $\widehat{\delta}=\delta_1+\delta_2+\delta_3$.

Отметим, что если DF_∞-модуль $(X,t,r,d,\widetilde{\partial})$ является диэдральным модулем с симплициальными гранями (X,t,r,d,∂_i), то цепной трикомплекс

$(D(\overline{X}), \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ становится цепным трикомплексом из работы [2] для вычисления диэдральных гомологий диэдрального модуля с симплициальными гранями (X, t, r, d, ∂_i).

Рассмотрим для любого диэдрального модуля с ∞-симплициальными гранями $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$ соответствующие ему цепные комплексы

$$(\overline{X}, b) \quad \text{и} \quad (\overline{X}, -b^{'}).$$

Из указанных выше равенств

$$b(1-\overline{T}_n) = (1-\overline{T}_{n-1})b^{'}, \quad b\overline{R}_n = \overline{R}_{n-1}b, \quad n \geqslant 0,$$

следует, что корректно определены цепные комплексы

$$(L(\overline{X}), b) \quad \text{и} \quad (M(\overline{X}), b),$$

где

$$L(\overline{X})_n = \overline{X}_n \big/ \bigl(\mathrm{Im}(1-\overline{T}_n)\bigr) \ \text{ и } M(\overline{X})_n = \overline{X}_n \big/ \bigl(\mathrm{Im}(1-\overline{T}_n) + \mathrm{Im}(1-\overline{R}_n)\bigr), \ n \geqslant 0.$$

В работе [15] показано, что над полями нулевой характеристики отображение цепных комплексов $g\colon (\mathrm{Tot}(C(\overline{X})), \delta) \to (L(\overline{X}), b)$, задаваемое на произвольном элементе $(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{Tot}(C(\overline{X}))_n$ формулой

$$g(x_0, \dots, x_n) = [x_n] = x_n + \mathrm{Im}(1-\overline{T}_n),$$

индуцирует изоморфизм в гомологиях. Первое и третье равенства из соотношений (1.9) говорят о том, что на цепном комплексе $(L(\overline{X}), b)$ корректно действует группа $\mathbb{Z}_2 = \{1, \vartheta \,|\, \vartheta^2 = 1\}$ посредством автоморфизма порядка два $\vartheta\colon L(\overline{X})_\bullet \to L(\overline{X})_\bullet$, задаваемого равенством $\vartheta(x) = \overline{R}_n(x)$, $x \in L(\overline{X})_n$, $n \geqslant 0$. Очевидно, что цепное отображение g является $\mathbb{Z}_2$-эквивариантным отображением и, следовательно, индуцирует соответствующее отображение гипергомологий группы $\mathbb{Z}_2$. Из этого легко получаем следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Диэдральные гомологии $HD(X)$ любого DF_∞-модуля*

$$(X, t, r, d, \widetilde{\partial}),$$

заданного над полем нулевой характеристики, изоморфны гомологиям цепного комплекса $(M(\overline{X}), b)$.

Перейдем теперь к введению понятия рефлексивного модуля с ∞-симплициальными гранями.

Рефлексивным биградуированным модулем (X, r) будем называть любой биградуированный модуль X рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей $r = \{r_n\colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}$, $n \geqslant 0$, для которого выполнено условие $r_n^2 = 1_{X_{n,\bullet}}$, $n \geqslant 0$. Другими словами, для каждого фиксированного $n \geqslant 0$ на градуированном модуле $X_{n,\bullet}$ слева действует действует группа $\mathbb{Z}_2$ с образующей r_n.

Рефлексивным дифференциальным модулем далее будем называть любую тройку (X, r, d), где (X, r) — рефлексивный биградуированный модуль, (X, d) — дифференциальный модуль и, кроме того, для каждого $n \geqslant 0$ выполнено условие $dr_n = r_n d$.

Напомним [2], что рефлексивным модулем с симплициальными гранями называется рефлексивный дифференциальный модуль (X, r, d), рассматриваемый вместе с семейством отображений $\partial_i\colon X_{n,\bullet} \to X_{n-1,\bullet}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, относительно которых тройка (X, d, ∂_i) является дифференциальным модулем с симплициальными гранями и, кроме того, для каждого $n \geqslant 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\partial_i r_n = r_{n-1}\partial_{n-i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Легко видеть, что каждый диэдральный модуль с симплициальными гранями, если забыть семейство автоморфизмов $t = \{t_n\colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}$ и соотношения, в которых они присутствуют, является рефлексивным модулем с симплициальными гранями.

Определение 1.3. Рефлексивным дифференциальным модулем с ∞-симплициальными гранями или, более кратко, RF_∞-модулем будем называть любую четвёрку $(X, r, d, \widetilde{\partial})$, где (X, r, d) — рефлексивный дифференциальный модуль и $(X, d, \widetilde{\partial})$ – дифференциальный модуль с ∞-симплициальными гранями, которые связаны между собой следующими соотношениями (1.3).

Семейство отображений $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\ldots,i_k)}\colon X_{n,\bullet} \to X_{n-k,\bullet+k-1}\}$ далее будем называть F_∞-дифференциалом RF_∞-модуля $(X, r, d, \widetilde{\partial})$. Отображения $\partial_{(i_1,\ldots,i_k)}$ из F_∞-дифференциала RF_∞-модуля $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$ будем называть ∞-симплициальными гранями этого RF_∞-модуля.

Очевидно, что любой DF_∞-модуль $(X, t, r, d, \widetilde{\partial})$, если забыть семейство автоморфизмов $t = \{t_n\colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}\}$ и соотношения, в которых они присутствуют, является RF_∞-модулем $(X, r, d, \widetilde{\partial})$.

Простыми примерами RF_∞-модулей служат рефлексивные модули с симплициальными гранями. Действительно, если для каждого рефлексивного модуля с симплициальными гранями (X, r, d, ∂_i) определить F_∞-дифференциал $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\ldots,i_k)}\}$, полагая $\partial_{(i)} = \partial_i$, $i \geqslant 0$, и $\partial_{(i_1,\ldots,i_k)} = 0$, $k > 1$, то получим RF_∞-модуль $(X, r, d, \widetilde{\partial})$.

Пусть теперь задан любой рефлексивный модуль с ∞-симплициальными гранями $(X, r, d, \widetilde{\partial})$. Рассмотрим для этого RF_∞-модуля указанный выше D_∞-модуль (X, d_0^i) и семейство отображений

$$R_n = (-1)^{n(n+1)/2} r_n \colon X_{n,\bullet} \to X_{n,\bullet}, \quad n \geqslant 0.$$

Из соотношений (1.3) следует, что для любого набора $0 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$ имеет место равенство

$$(-1)^{i_1+\dots+i_k} \partial_{(i_1,\dots,i_k)} R_n = (-1)^{(n-i_k)+\dots+(n-i_1)} R_{n-k} \partial_{(n-i_k,\dots,n-i_1)}.$$

Из этого равенства следует, что для указанного выше семейства отображений модулей $\{d_0^i \colon X_{*,\bullet} \to X_{*-i,\bullet+i-1}\}$ имеют место соотношения

$$d_0^i R_n = R_{n-i} d_0^i, \quad i \geqslant 0, \quad n \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Рассмотрим для D_∞-модуля (X, d_0^i) соответствующий ему цепной комплекс $(\overline{X}, b)$ и семейство отображений

$$\overline{R}_n = \sum_{m=0}^{n} R_m \colon \overline{X}_n \to \overline{X}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Из (1.10) следует, что $b\overline{R}_n = \overline{R}_{n-1} b$, $n \geqslant 0$. Это равенство говорит о том, что на цепном комплексе $(\overline{X}, b)$ любого RF_∞-модуля $(X, r, d, \widetilde{\partial})$ действует группа $\mathbb{Z}_2 = \{1, \vartheta \,|\, \vartheta^2 = 1\}$ посредством автоморфизма порядка два $\vartheta \colon \overline{X} \to \overline{X}$, который задается на произвольном элементе $x \in \overline{X}_n$ формулой $\vartheta(x) = \overline{R}_n(x)$.

Определение 1.4. Рефлексивными гомологиями $HR(X)$ рефлексивного модуля с ∞-симплициальными гранями $(X, r, d, \widetilde{\partial})$ далее будем называть гипергомологии $H(\mathbb{Z}_2; (\overline{X}, b))$ группы $\mathbb{Z}_2$ с коэффициентами в $(\overline{X}, b)$ относительно указанного выше действия $\mathbb{Z}_2$ на цепном комплексе $(\overline{X}, b)$.

Легко видеть, что если для вычисления гипергомологий $H(\mathbb{Z}_2; (\overline{X}, b))$ использовать стандартную свободную резольвенту $(\mathcal{S}(\mathbb{Z}_2), d)$, указанную выше, то получим, что рефлексивными гомологиями $HR(X) = H(\mathbb{Z}_2; (\overline{X}, b))$ любого RF_∞-модуля $(X, r, d, \widetilde{\partial})$ являются гомологии цепного комплекса, ассоциированного с цепным бикомплексом $(R(\overline{X}), b, D)$, для которого

$$R(\overline{X})_{n,m} = \overline{X}_n, \quad n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0,$$

дифференциал $D \colon R(\overline{X})_{n,m} \to R(\overline{X})_{n,m-1}$ задается формулой

$$D = (-1)^n (1 + (-1)^m \overline{R}_n),$$

и дифференциал $b\colon R(\overline{X})_{n,m} \to R(\overline{X})_{n-1,m}$ был определен выше. Цепной комплекс, ассоциированный с цепным бикомплексом $(R(\overline{X}), b, D)$, далее будем обозначать через $(\mathrm{Tot}(R(\overline{X})), \widehat{D})$, где $\widehat{D} = b + D$.

Отметим, что если RF_∞-модуль $(X, r, d, \widetilde{\partial})$ является рефлексивным модулем с симплициальными гранями (X, r, d, ∂_i), то цепной бикомплекс

$$(R(\overline{X}), b, D)$$

становится цепным бикомплексом из работы [2] для вычисления рефлексивных гомологий рефлексивного модуля с симплициальными гранями (X, r, d, ∂_i).

Рассмотрим для любого RF_∞-модуля $(X, r, d, \widetilde{\partial})$ соответствующий ему цепной комплекс $(\overline{X}, b)$. Из указанного выше равенства $b\overline{R}_n = \overline{R}_{n-1}b$, $n \geqslant 0$, следует, что корректно определен цепной комплекс $(N(\overline{X}), b)$, где $N(\overline{X})_n = \overline{X}_n \big/ \mathrm{Im}(1 - \overline{R}_n)$, $n \geqslant 0$. Следующее утверждение доказывается аналогично утверждению теоремы 1.1.

Теорема 1.2. *Рефлексивные гомологии $HR(X)$ любого RF_∞-модуля*

$$(X, r, d, \widetilde{\partial}),$$

заданного над полем нулевой характеристики, изоморфны гомологиям цепного комплекса $(N(\overline{X}), b)$.

§2. Диэдральные и рефлексивные гомологии инволютивных A_∞-алгебр

Напомним [16] (см. также [17]), что A_∞-алгеброй (A, d, π_n) называется дифференциальный модуль (A, d), $A = \{A_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, $d\colon A_\bullet \to A_{\bullet-1}$, рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\{\pi_n\colon (A^{\otimes(n+2)})_\bullet \to A_{\bullet+n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\},$$

удовлетворяющих для любых целых $n \geqslant 1$ следующим соотношениям:

$$d(\pi_{n-1}) = \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{m}(-1)^{t(n-m)+m+1}\pi_{m-1}(\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{t}\otimes\pi_{n-m-1}\otimes\underbrace{1\otimes\cdots\otimes 1}_{m-t}). \tag{2.1}$$

Напомним теперь понятие инволютивной A_∞-алгебры [4], которое обобщает понятие дифференциальной ассоциативной алгебры с инволюцией.

Определение 2.1. Инволютивной A_∞-алгеброй $(A, d, \pi_n, *)$ называется любая A_∞-алгебра (A, d, π_n), рассматриваемая вместе с автоморфизмом градуированных модулей $*: A_\bullet \to A_\bullet$ (обозначение $*(a) = a^*$, $a \in A$), который для любых элементов $a \in A$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in A$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a^{**} = a, \quad d(a^*) = d(a)^*,$$
$$\pi_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1})^* = (-1)^\varepsilon \pi_n(a_{n+1}^* \otimes a_n^* \otimes \cdots \otimes a_1^* \otimes a_0^*), \quad (2.2)$$
$$n \geqslant 0,$$

где

$$\varepsilon = (n(n+1)/2) + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n+1} |a_i||a_j|$$

и для элементов $a \in A_q$ используется запись $|a| = q$.

Рассмотрим для любой инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$ диэдральный дифференциальный модуль $({}^\varrho\mathcal{M}(A), t, r, d)$, где $\varrho = \pm 1$, задаваемый равенствами

$${}^\varrho\mathcal{M}(A) = \{{}^\varrho\mathcal{M}(A)_{n,m}\}, \quad {}^\varrho\mathcal{M}(A)_{n,m} = (A^{\otimes(n+1)})_m, \quad n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0,$$
$$t_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^{|a_n|(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|)} a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1},$$
$$r_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \varrho(-1)^{\sum_{0<i<j\leqslant n} |a_i||a_j|} a_0^* \otimes a_n^* \otimes a_{n-1}^* \cdots \otimes a_1^*,$$
$$d(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{|a_0| + \cdots + |a_{i-1}|} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes d(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n,$$

и определим семейство отображений

$$\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1,\ldots,i_k)} \colon \mathcal{M}(A)_{n,p} \to \mathcal{M}(A)_{n-k,p+k-1}\},$$

$0 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$, $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, полагая

$$\partial_{(i_1,\ldots,i_k)} = \begin{cases} (-1)^{k(p-1)} 1^{\otimes j} \otimes \pi_{k-1} \otimes 1^{\otimes(n-k-j)}, \text{ если } 0 \leqslant j \leqslant n-k \\ \text{и } (i_1, \ldots, i_k) = (j, j+1, \ldots, j+k-1); \\ (-1)^{q(k-1)} \partial_{(0,1,\ldots,k-1)} t_n^q, \text{ если } 1 \leqslant q \leqslant k \\ \text{и } (i_1, \ldots, i_k) = (0, 1, \ldots, k-q-1, n-q+1, n-q+2, \ldots, n); \\ 0, \quad \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. *Для любой инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$ указанная выше пятёрка $({}^\varrho\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$ является диэдральным модулем с ∞-симплициальными гранями.*

Доказательство. В работе [15] было показано, что четвёрка

$$({}^\varrho\mathcal{M}(A), t, d, \widetilde{\partial})$$

является циклическим модулем с ∞-симплициальными гранями. Поэтому требуется проверить, что для отображений $\partial_{(i_1,\dots,i_k)} \in \widetilde{\partial}$, задаваемых равенствами (2.3), выполнены условия (1.3). Рассмотрим несколько случаев.

1) пусть $(i_1,\dots,i_k) = (j, j+1,\dots, j+k-1)$, где $1 \leqslant j \leqslant n-k$. Тогда для любого элемента $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \in (A^{n+1})_p$, с одной стороны, имеем

$$\begin{aligned}\partial_{(j,j+1,\dots,j+k-1)} & r_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ & = \varrho(-1)^{\alpha+k(p-1)+\beta} a_0^* \otimes a_n^* \otimes \cdots \otimes a_{n-j+2}^* \\ & \otimes\ \pi_{k-1}(a_{n-j+1}^* \otimes \cdots \otimes a_{n-j-k+1}^*) \otimes a_{n-j-k}^* \otimes \cdots \otimes a_1^*,\end{aligned}$$

где $\alpha = \sum_{0<i<j\leqslant n} |a_i||a_j|$ и $\beta = (k-1)(|a_0| + |a_n| + \cdots + |a_{n-j+2}|)$. С другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned}(-1)^{k(k-1)/2} & r_{n-k}\partial_{(n-j-k+1,n-j-k+2,\dots,n-j)}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ & = \varrho(-1)^{(k(k-1)/2)+k(p-1)+\gamma+\delta+\mu} a_0^* \otimes a_n^* \otimes \cdots \otimes a_{n-j+2}^* \\ & \otimes\ \pi_{k-1}(a_{n-j+1}^* \otimes \cdots \otimes a_{n-j-k+1}^*) \otimes a_{n-j-k}^* \otimes \cdots \otimes a_1^*,\end{aligned}$$

где

$$\gamma = (k-1)(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-j-k}|)$$

и

$$\begin{aligned}\delta = \sum_{0<i<j\leqslant n} |a_i||a_j| - \sum_{n-j-k+1\leqslant s<t\leqslant n-j+1} |a_s||a_t| + (k-1)\big(|a_1| + \cdots + |a_{n-j-k}| \\ + |a_{n-j+2}| + \cdots + |a_n|\big),\end{aligned}$$

$$\mu = \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{n-j-k+1\leqslant s<t\leqslant n-j+1} |a_s||a_t|.$$

Так как $\alpha + \beta \equiv (k(k-1)/2) + \gamma + \delta + \mu \bmod(2)$, то получаем

$$\partial_{(j,j+1,\dots,j+k-1)} r_n = (-1)^{k(k-1)/2} r_{n-k}\partial_{(n-j-k+1,n-j-k+2,\dots,n-j)}.$$

2) пусть $(i_1,\dots,i_k) = (0, 1,\dots, k-1)$. Тогда для любого

$$a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \in (A^{n+1})_p,$$

с одной стороны, имеем

$$\begin{aligned}\partial_{(0,1,\dots,k-1)} & r_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ & = \varrho(-1)^{\alpha+k(p-1)} \pi_{k-1}(a_0^* \otimes a_n^* \otimes \cdots \otimes a_{n-k+1}^*) \otimes a_{n-k}^* \otimes \cdots \otimes a_1^*,\end{aligned}$$

где α такое же, как и в пункте 1). С другой стороны, так как второе равенство в (2.3) при $q = k$ становится равенством

$$\partial_{(n-k+1,n-k+2,\dots,n)} = \partial_{(0,1,\dots,k-1)} t_n^k,$$

то получаем

$$(-1)^{k(k-1)/2} r_{n-k} \partial_{(n-k+1,n-k+2,\dots,n)}(a_0 \otimes \dots \otimes a_n)$$
$$= \varrho(-1)^{(k(k-1)/2)+\nu+k(p-1)+\vartheta+\lambda} \pi_{k-1}(a_0^* \otimes a_n^* \otimes a_{n-k+1}^*) \otimes a_{n-k}^* \otimes \dots \otimes a_1^*,$$

где $\nu = (|a_{n-k+1}| + \dots + |a_n|)(|a_0| + \dots + |a_{n-k}|)$ и $\vartheta = \sum_{0<i<j\leqslant n-k} |a_i||a_j|$,

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{2} + \sum_{n-k+1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i||a_j| + (|a_{n-k+1}| + \dots + |a_n|)|a_0|.$$

Так как $(k(k-1)/2) + \nu + \vartheta + \lambda \equiv \alpha \bmod(2)$, то получаем

$$\partial_{(0,1,\dots,k-1)} r_n = (-1)^{k(k-1)/2} r_{n-k} \partial_{(n-k+1,n-k+2,\dots,n)}.$$

3) пусть $(i_1, \dots, i_k) = (0, 1, \dots, k-q-1, n-q+1, n-q+2, \dots, n)$ и $1 \leqslant q \leqslant k$. Так как по второму равенству в (2.3) имеем

$$\partial_{(0,1,\dots,k-q-1,n-q+1,n-q+2,\dots,n)} = (-1)^{q(k-1)} \partial_{(0,1,\dots,k-1)} t_n^q,$$

и так как $t_n^q r_n = r_n t_n^{-q} = r_n t_n^{n+1-q} = r_n t_n^{n-k+1} t_n^{k-q}$, то получаем

$$\partial_{(0,1,\dots,k-q-1,n-q+1,n-q+2,\dots,n)} r_n = (-1)^{q(k-1)+(k(k-1)/2)} r_{n-k} \partial_{(0,1,\dots,k-1)} t_n^{k-q}.$$

Так как по (2.3): $\partial_{(0,1,\dots,k-1)} t_n^{k-q} = (-1)^{(k-q)(k-1)} \partial_{(0,1,\dots,q-1,n-k+q+1,\dots,n)}$, и так как $q(k-1) + (k(k-1)/2) + (k-q)(k-1) \equiv (k(k-1)/2) \bmod(2)$, то получаем

$$\partial_{(0,1,\dots,k-q-1,n-q+1,n-q+2,\dots,n)} r_n = (-1)^{k(k-1)/2} r_{n-k} \partial_{(0,1,\dots,q-1,n-k+q+1,\dots,n)}.$$

Таким образом, для всех отображений $\partial_{(i_1,\dots,i_k)} \in \widetilde{\partial}$ условия (1.3) выполнены, и, следовательно, пятёрка $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$ является диэдральным модулем с ∞-симплициальными гранями. $\square$

Отметим, что если инволютивная A_∞-алгебра $(A, d, \pi_n, *)$ является инволютивной дифференциальной ассоциативной алгеброй $(A, d, \pi, *)$, где $\pi_0 = \pi$ и $\pi_n = 0$, $n > 0$, то DF_∞-модуль $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$ превращается в хорошо известный [2] диэдральный модуль с симплициальными гранями, определяемый инволютивной алгеброй $(A, d, \pi, *)$.

Определение 2.2. Диэдральными гомологиями ${}^{\varrho}HD(A)$ инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$ будем называть диэдральные гомологии

$$HD({}^{\varrho}\mathcal{M}(A))$$

диэдрального модуля с ∞-симплициальными гранями $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$.

То есть, диэдральными гомологиями ${}^{\varrho}HD(A)$ инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$ являются гомологии цепного комплекса

$$(\mathrm{Tot}(D(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widehat{\delta}),$$

ассоциированного с цепным трикомплексом $(D(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Отметим, что если инволютивная A_∞-алгебра $(A, d, \pi_n, *)$ является инволютивной дифференциальной ассоциативной алгеброй $(A, d, \pi, *)$, где $\pi_0 = \pi$ и $\pi_n = 0$, $n > 0$, то цепной трикомплекс $(D(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ становится цепным трикомплексом из работы [2] для инволютивной дифференциальной ассоциативной алгебры $(A, d, \pi, *)$.

Следующее утверждение является следствием теоремы 1.1, рассматриваемой для DF_∞-модуля $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$.

Следствие 2.1. *Диэдральные гомологии ${}^{\varrho}HD(A)$ любой инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$, заданной над полем нулевой характеристики, изоморфны гомологиям цепного комплекса $(M(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), b)$.*

Следствие 2.1 говорит о том, что над полями нулевой характеристики определение 2.2 и определение диэдральных гомологий инволютивных A_∞-алгебр из работы [4] эквивалентны.

Как было сказано выше, любой DF_∞-модуль можно рассматривать как RF_∞-модуль. Поэтому, для DF_∞-модуля $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$, задаваемого произвольной инволютивной A_∞-алгеброй $(A, d, \pi_n, *)$, всегда определен RF_∞-модуль $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), r, d, \widetilde{\partial})$.

Отметим, что если инволютивная A_∞-алгебра $(A, d, \pi_n, *)$ является инволютивной дифференциальной ассоциативной алгеброй $(A, d, \pi, *)$, где $\pi_0 = \pi$ и $\pi_n = 0$, $n > 0$, то RF_∞-модуль $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), r, d, \widetilde{\partial})$ превращается в хорошо известный [2] рефлексивный модуль с симплициальными гранями, определяемый инволютивной алгеброй $(A, d, \pi, *)$.

Определение 2.3. Рефлексивными гомологиями ${}^{\varrho}HR(A)$ инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$ будем называть рефлексивные гомологии

$$HR({}^{\varrho}\mathcal{M}(A))$$

рефлексивного модуля с ∞-симплициальными гранями $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), r, d, \widetilde{\partial})$.

Таким образом, рефлексивными гомологиями ${}^{\varrho}HR(A)$ инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$ являются гомологии цепного комплекса

$$(\mathrm{Tot}(R(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widehat{D}),$$

ассоциированного с цепным бикомплексом $(R(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), b, D)$.

Отметим, что если инволютивная A_∞-алгебра $(A, d, \pi_n, *)$ является инволютивной дифференциальной ассоциативной алгеброй $(A, d, \pi, *)$, где $\pi_0 = \pi$ и $\pi_n = 0$, $n > 0$, то цепной бикомплекс $(R(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), b, D)$ становится цепным бикомплексом из работы [2] для инволютивной дифференциальной ассоциативной алгебры $(A, d, \pi, *)$.

Следующее утверждение является следствием теоремы 1.2, рассматриваемой для RF_∞-модуля $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), r, d, \widetilde{\partial})$.

Следствие 2.2. *Рефлексивные гомологии ${}^{\varrho}HR(A)$ любой заданной над полем нулевой характеристики инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$, изоморфны гомологиям цепного комплекса $(N(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), b)$.*

§3. Точная последовательность для диэдральных и рефлексивных гомологий инволютивных гомотопически унитальных A_∞-алгебр

Для того, чтобы ввести понятие инволютивной гомотопически унитальной A_∞-алгебры, напомним сначала необходимые определения и конструкции, связанные с понятиями операды (несимметрической) и алгебры над операдой в категории дифференциальных модулей (см., например, [18]).

Дифференциальным семейством или, более кратко, семейством

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geqslant 0}$$

называется любое семейство дифференциальных модулей $(\mathcal{E}(j), d)$, $j \geqslant 0$. Морфизмом семейств $f\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ называется произвольное семейство отображений дифференциальных модулей $\alpha = \{\alpha(j)\colon (\mathcal{E}'(j), d) \to (\mathcal{E}''(j), d)\}_{j \geqslant 0}$. Для любых семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ рассмотрим семейство $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$, определяемое формулами

$$(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j) = \bigoplus_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k), \quad j \geqslant 0.$$

Ясно, что рассмотренное $\times$-произведение семейств ассоциативно, то есть для любых семейств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ имеется изоморфизм семейств

$$\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''.$$

Операдой $(\mathcal{E}, \gamma)$ (несимметрической) называется любое семейство $\mathcal{E}$, рассматриваемое вместе с морфизмом семейств $\gamma\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\gamma(\gamma \times 1) = \gamma(1 \times \gamma)$. Кроме того, имеется такой элемент $1 \in \mathcal{E}(1)_0$, что для каждого элемента $e_j \in \mathcal{E}(j)$, $j \geqslant 0$, выполнено условие $\gamma(1 \otimes e_j) = e_j$, и для любого элемента $e_j \in \mathcal{E}(j)$, $j \geqslant 1$, выполнено условие $\gamma(e_j \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) = e_j$. Элементы вида $\gamma(e_k \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k})$ далее будем записывать как $e_k(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k})$. Морфизмом операд $f\colon (\mathcal{E}', \gamma) \to (\mathcal{E}'', \gamma)$

называется морфизм семейств $f\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$, для которого выполнено условие $f\gamma = \gamma(f \times f)$.

Каноническим примером операды служит операда $(\mathcal{E}_X, \gamma)$, определяемая для любого дифференциального модуля (X, d) следующими формулами:

$$(\mathcal{E}_X(j), d) = (\mathrm{Hom}(X^{\otimes j}; X), d), \quad \gamma(f_k \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_k}) = f_k(f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_k}).$$

Алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \gamma)$ или, более кратко, $\mathcal{E}$-алгеброй (X, d, α) называется любой дифференциальный модуль (X, d), рассматриваемый вместе с фиксированным морфизмом операд $\alpha\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}_X$.

Важным примером операды является операда Сташеффа (A_∞, γ). Как градуированная операда (A_∞, γ) является свободной операдой с образующими $\pi_n \in A_\infty(n+2)_n$, $n \geqslant 0$, и дифференциал на образующих π_{n-1}, $n \geqslant 1$, задается формулой (2.1).

Легко видеть, что введение на дифференциальном модуле (A, d), где $A = \{A_n\}$, $n \geqslant 0$, $d\colon A_\bullet \to A_{\bullet-1}$, структуры алгебры (A, d, α) над операдой (A_∞, γ) эквивалентно заданию для (A, d) семейства отображений

$$\bigl\{\pi_n = \alpha(\pi_n)\colon (A^{\otimes(n+2)})_\bullet \to A_{\bullet+n}\bigr\}, \quad n \geqslant 0,$$

удовлетворяющих соотношениям (2.1), то есть эквивалентно заданию на (A, d) структуры A_∞-алгебры (A, d, π_n).

Напомним теперь, следуя [10] (см. также [9]), понятие гомотопически унитальной A_∞-алгебры. Для этого рассмотрим введенную в [10] операду $(A_\infty^{su} < u, h >, \gamma)$. Как градуированная операда $(A_\infty^{su} < u, h >, \gamma)$ является операдой с образующими

$$\pi_n \in (A_\infty^{su} {<} u, h {>})(n+2)_n, \quad n \geqslant 0, \quad 1^{su} \in (A_\infty^{su} {<} u, h {>})(0)_0,$$

$$u \in (A_\infty^{su} {<} u, h {>})(0)_0, \quad h \in (A_\infty^{su} {<} u, h {>})(0)_1,$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\pi_0(1^{su} \otimes 1) = 1, \quad \pi_0(1 \otimes 1^{su}) = 1, \quad \pi_n(1^{\otimes k} \otimes 1^{su} \otimes 1^{\otimes(n-k+1)}) = 0, \quad n > 0, \tag{3.1}$$

где $0 \leqslant k \leqslant n+1$, и дифференциал на указанных образующих задается формулами (2.1) и формулами

$$d(1^{su}) = 0, \quad d(u) = 0, \quad d(h) = u - 1^{su}. \tag{3.2}$$

В операде $(A_\infty^{su} {<} u, h {>}, \gamma)$ рассмотрим подоперамду (A_∞^{hu}, γ) с образующими

$$\tau_0^0 = u \in (A_\infty^{su} {<} u, h {>})(0)_0, \quad \tau_n^{\varnothing} = \pi_{n-1} \in (A_\infty^{su} {<} u, h {>})(n+1)_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

$$\tau_n^{j_q,\dots,j_1}$$

$$=\pi_{n-1}(\underbrace{\overbrace{\underbrace{1^{\otimes n_1}}_{j_1}\otimes h\otimes 1^{\otimes n_2}}^{j_2}\otimes h\otimes 1^{\otimes n_3}\dots\otimes 1^{n_k}\otimes h\otimes 1^{\otimes n_{k+1}}\otimes\dots\otimes 1^{\otimes n_q}}_{j_q}\otimes h\otimes 1^{\otimes n_{q+1}})$$

$$\in (A_\infty^{su}\langle u,h\rangle)(n-q+1)_{n+q-1},\quad n\geqslant 1,\quad q\geqslant 1,\quad n\geqslant j_q>\dots>j_1\geqslant 0,\quad n_s\geqslant 0,$$
$$1\leqslant s\leqslant q+1,\quad n_1+\ldots+n_{q+1}=n-q+1,\quad j_k=n_1+\ldots+n_k+k-1,\quad 1\leqslant k\leqslant q.$$

Для большей ясности стоит сказать, что число j_k, $1\leqslant k\leqslant q$, является количеством всех тензорных сомножителей, стоящих слева от сомножителя h, который встретился в k-й раз, если двигаться от начала тензорной батареи слева направо. Например, пользуясь этим правилом, имеем

$$\tau_4^{3,1}=\pi_3(1\otimes h\otimes 1\otimes h\otimes 1),\quad \tau_5^{5,1,0}=\pi_4(h\otimes h\otimes 1\otimes 1\otimes 1\otimes h).$$

Отметим, что в работе [10] для элемента $\tau_n^{j_q,\dots,j_1}$ используется обозначение $m_{n_1,n_2,\dots,n_{q+1}}$, где числа $n_1,\dots,n_{q+1}$ взяты из указанной выше формулы для $\tau_n^{j_q,\dots,j_1}$. Дифференциал на образующих $\tau_n^{j_q,\dots,j_1}$, $n\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $n+q\geqslant 1$, где $\tau_n^{j_q,\dots,j_1}=\tau_n^{\varnothing}=\pi_{n-1}$ при $q=0$, $n\geqslant 1$, полностью определяется формулами (2.1), (3.2) и соотношениями (3.1).

Алгебры (A,d,α) над операдой (A_∞^{hu},γ), то есть A_∞^{hu}-алгебры, называются гомотопически унитальными A_∞-алгебрами.

Легко видеть, что введение на дифференциальном модуле (A,d), где $A=\{A_n\}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 0$, $d\colon A_\bullet\to A_{\bullet-1}$, структуры A_∞^{hu}-алгебры (A,d,α) эквивалентно заданию для (A,d) семейства отображений

$$\{\alpha(\tau_n^{j_q,\dots,j_1})\colon (A^{\otimes(n-q+1)})_\bullet\to A_{\bullet+n+q-1}\mid n\in\mathbb{Z},\ n\geqslant 0,\ q\geqslant 0,\ n+q\geqslant 1\},$$

$$n-q+1\geqslant 0,\quad j_q,\dots,j_1\in\mathbb{Z},\quad n\geqslant j_q>\dots>j_1\geqslant 0,$$

удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$d(\alpha(\tau_n^{j_q,\dots,j_1}))=\alpha(d(\tau_n^{j_q,\dots,j_1})),\tag{3.3}$$

где $d(\alpha(\tau_n^{j_q,\dots,j_1}))=d\alpha(\tau_n^{j_q,\dots,j_1})+(-1)^{n+q}\alpha(\tau_n^{j_q,\dots,j_1})d$. Далее отображения $\alpha(\tau_n^{j_q,\dots,j_1})$ будем обозначать через $\tau_n^{j_q,\dots,j_1}$.

Отметим, что при $q=0$ соотношения (3.3), если $\alpha(\tau_n^{\varnothing})$, $n\geqslant 1$, обозначить через π_{n-1}, превращаются в соотношения (2.1). Таким образом, каждая A_∞^{hu}-алгебра $(A,d,\tau_n^{j_q,\dots,j_1})$ является A_∞-алгеброй (A,d,π_n). Далее для A_∞^{hu}-алгебр $(A,d,\tau_n^{j_q,\dots,j_1})$ будем использовать запись $(A,d,\pi_n,\tau_n^{j_q,\dots,j_1})$, где $\pi_n=\tau_{n+1}^{\varnothing}$, $n\geqslant 0$.

Отметим еще, что для любой A_∞^{hu}-алгебры $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1})$, как это следует из равенств (3.2) и (3.3), выполнены соотношения

$$d(\tau_0^0) = 0, \quad d(\tau_1^0) = \pi_0(\tau_0^0 \otimes 1) - 1, \quad d(\tau_1^1) = \pi_0(1 \otimes \tau_0^0) - 1,$$

которые говорят о том, что отображение $\tau_0^0 \colon K \to A$, точнее элемент $\tau_0^0(1) \in A_0$, является с точностью до гомотопий единицей дифференциальной гомотопически ассоциативной алгебры (A, d, π_0). Кроме того, в [15] было показано, что в явном виде соотношения (3.3) при $q = 1$ и $j_q = j_1 = n \geqslant 2$ записываются как следующие равенства:

$$\begin{aligned} d(\tau_n^n) = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^{t(n-m)+n} \tau_m^m (\underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{t} \otimes \pi_{n-m-1} \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{m-t-1}) \\ + \sum_{m=1}^{n} (-1)^{mn+1} \pi_{m-1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \tau_{n-m}^{n-m}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Введем теперь основное для последующих рассмотрений понятие инволютивной гомотопически унитальной A_∞-алгебры, которое обобщает понятие дифференциальной унитальной ассоциативной алгебры с инволюцией.

Определение 3.1. Инволютивной гомотопически унитальной A_∞-алгеброй или, более кратко, инволютивной A_∞^{hu}-алгеброй $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$ будем называть любую пятёрку $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$, для которой $(A, d, \pi_n, *)$ — инволютивная A_∞-алгебра, $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1})$ — гомотопически унитальная A_∞-алгебра и, кроме того, для любых элементов $a_0, \dots, a_{n-q} \in A$, $n \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\tau_n^{j_q,\dots,j_1}(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-q-1} \otimes a_{n-q})^* \\ &= (-1)^\varepsilon \tau_n^{n-j_1,\dots,n-j_q}(a_{n-q}^* \otimes a_{n-q-1}^* \otimes \dots \otimes a_1^* \otimes a_0^*), \quad n \geqslant j_q > \dots > j_1 \geqslant 0, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = (n(n-1)/2) + (q(q-1)/2) + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n-q} |a_i||a_j|$ и для элементов $a \in A_q$ так же, как и ранее, используется запись $|a| = q$.

Рассмотрим для каждой инволютивной A_∞^{hu}-алгебры $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$ семейство отображений $s^{k-1} \colon (A^{\otimes(n+1)})_p \to (A^{\otimes(n-k+2)})_{p+k}$, $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n+1$, определяемых формулами

$$\begin{gathered} s^{k-1} = (-1)^\varepsilon \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-k+1} \otimes \tau_k^k, \\ \varepsilon = (k-1)p + (n-k+1)k + \frac{k(k-1)}{2} + n + 1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Напомним теперь, что для DF_∞-модуля $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), t, r, d, \widetilde{\partial})$, задаваемого любой инволютивной A_∞^{hu}-алгеброй $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$, определен D_∞-модуль $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), d_1^i)$, задаваемый по формулам (1.4), в которых полагаем $q = 1$. Рассмотрим для стабильного D_∞-модуля $({}^{\varrho}\mathcal{M}(A), d_1^i)$ соответствующий ему цепной комплекс $(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}, b')$. В работе [15] при помощи соотношений (3.4) показано, что для отображения

$$s = (s^{-1} + s^0 + s^1 + \dots + s^i + \dots)\colon \overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}_\bullet \to \overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}_{\bullet+1} \tag{3.6}$$

выполнено условие $b's + sb' = 1_{\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}}$, которое означает, что s является стягивающей гомотопией для цепного комплекса $(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}, b')$.

Из (1.9) следует, что для любой инволютивной A_∞^{hu}-алгебры

$$(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$$

на цепном комплексе $(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}, b')$ действует группа $\mathbb{Z}_2 = \{1, \vartheta \,|\, \vartheta^2 = 1\}$ посредством автоморфизма порядка два

$$\vartheta\colon \overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)} \to \overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)},$$

$\vartheta(x) = \overline{R}_n\overline{T}_n(x)$. Рассмотрим цепной бикомплекс $(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), -b', D')$, для которого $Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n,m} = \overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}_n$, $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, и дифференциал

$$D'\colon Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n,m} \to Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n,m-1}$$

задается формулой $D' = (-1)^{n+1}(1 + (-1)^{m+1}\overline{R}_n\overline{T}_n)$. Цепной комплекс, ассоциированный с цепным бикомплексом $(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), -b', D')$, далее будем обозначать через $(\mathrm{Tot}(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widehat{D}')$, где $\widehat{D}' = -b + D'$. Если рассмотреть спектральную последовательность цепного бикомплекса $(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), -b', D')$ и воспользоваться стягиваемостью цепного комплекса $(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}, b')$, то получим, что $H_n(\mathrm{Tot}(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widehat{D}') = 0$ для всех $n \geqslant 0$.

Далее под диэдральными гомологиями ${}^{\varrho}HD(A)$ любой инволютивной A_∞^{hu}-алгебры $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$ будем понимать диэдральные гомологии ${}^{\varrho}HD(A)$ соответствующей ей инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$. Аналогично, под рефлексивными гомологиями ${}^{\varrho}HR(A)$ произвольной инволютивной A_∞^{hu}-алгебры $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$ далее будем понимать рефлексивные гомологии ${}^{\varrho}HR(A)$ соответствующей ей инволютивной A_∞-алгебры $(A, d, \pi_n, *)$.

Теперь, пользуясь ацикличностью цепного комплекса

$$(\mathrm{Tot}(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widehat{D}'),$$

установим связь между диэдральными гомологиями и рефлексивными гомологиями инволютивных гомотопически унитальных A_∞-алгебр.

Теорема 3.1. *Для любой инволютивной* A_∞^{hu}*-алгебры* $(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$ *имеет место длинная точная последовательность*

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\delta_*} {}^{\varrho}HR_n(A) \xrightarrow{i_*} {}^{\varrho}HD_n(A) \\ \xrightarrow{p_*} {}^{-\varrho}HD_{n-2}(A) \xrightarrow{\delta_*} {}^{\varrho}HR_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где отображения i_*, p_* *и* δ_* *определены ниже в доказательстве этой теоремы.*

Доказательство. Рассмотрим для цепного трикомплекса

$$(D(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \delta_1, \delta_2, \delta_3)$$

цепной бикомплекс $(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2)$, задаваемый равенствами

$$\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n,m} = \bigoplus_{k+l=n} D(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{k,m,l}, \quad n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0, \quad \widetilde{\delta}_1 = \delta_1 + \delta_3, \quad \widetilde{\delta}_2 = \delta_2.$$

Цепной комплекс, ассоциированный с цепным бикомплексом

$$(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2),$$

далее будем обозначать через $(\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widetilde{\delta})$, где $\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}_1 + \widetilde{\delta}_2$. Очевидно, что цепной комплекс $(\mathrm{Tot}(D(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \delta)$ изоморфен цепному комплексу $(\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widetilde{\delta})$ и, следовательно, имеем $H(\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widetilde{\delta}) = {}^{\varrho}HD(A)$. Рассмотрим в цепном комплексе $(\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widetilde{\delta})$ цепной подкомплекс $(P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \widetilde{\delta})$, для которого

$$P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_n = \widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n-1,1} \oplus \widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n,0}, \quad n \geqslant 0,$$

$$\widetilde{\delta}(x_{n-1}, x_n) = (\widetilde{\delta}_1(x_{n-1}), \widetilde{\delta}_1(x_n) + \widetilde{\delta}_2(x_{n-1}), \quad (x_{n-1}, x_n) \in P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_n.$$

Видно, что имеют место равенства модулей

$$\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n-1,1} = (\mathrm{Tot}(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))_{n-1}$$

и

$$\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_{n,0} = (\mathrm{Tot}(R(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))_{n}.$$

Рассмотрим короткую точную последовательность цепных комплексов

$$\begin{aligned} 0 \to (P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}), \widetilde{\delta}) \xrightarrow{j} (\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widetilde{\delta}) \\ \xrightarrow{p} \Sigma^{-2}(\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widetilde{\delta}) \to 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} j((x_{n-1}, x_n)) = (0, \dots, 0, x_{n-1}, x_n), \\ p((x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)) = (x_0, \dots, x_{n-2}), \quad n \geqslant 0, \end{gathered}$$

и $\Sigma^{-2}(\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))_\bullet, \widetilde{\delta}) = (\mathrm{Tot}(\widetilde{D}(\overline{{}^{-\varrho}\mathcal{M}(A)}))_{\bullet-2}, \widetilde{\delta})$. Эта короткая точная последовательность индуцирует длинную точную последовательность гомологий

$$\begin{aligned}\cdots \xrightarrow{\delta} H_n(P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})) \xrightarrow{j_*} {}^{\varrho}HD_n(A) \\ \xrightarrow{p_*} {}^{-\varrho}HD_{n-2}(A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})) \xrightarrow{j_*} \cdots .\end{aligned} \tag{3.8}$$

Покажем теперь, что градуированные модули $H(P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))$ и ${}^{\varrho}HR(A)$ изоморфны. Для этого рассмотрим короткую точную последовательность цепных комплексов

$$\begin{aligned}0 \to (\mathrm{Tot}(R(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))_\bullet, \widehat{D}) \xrightarrow{\alpha} (P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_\bullet, \widetilde{\delta}) \\ \xrightarrow{\beta} (\mathrm{Tot}(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))_{\bullet-1}, \widehat{D}') \to 0,\end{aligned}$$

где $\alpha(x_n) = (0, x_n)$, $\beta(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}$, $(x_{n-1}, x_n) \in (P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})_n$. Эта короткая точная последовательность индуцирует длинную точную последовательность в гомологиях, из которой видно, что отображение

$$\alpha_* \colon {}^{\varrho}HR_\bullet(A) \to H_\bullet(P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))$$

является изоморфизмом, поскольку

$$H_{\bullet-1}(\mathrm{Tot}(Q(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)})), \widehat{D}') = 0.$$

Если теперь заменить в длинной точной последовательности (3.8) модули $H_\bullet(P(\overline{{}^{\varrho}\mathcal{M}(A)}))$ модулями ${}^{\varrho}HR_\bullet(A)$ и отображения j_* и δ соответственно отображениями $i_* = j_*\alpha_*$ и $\delta_* = \alpha_*^{-1}\delta$, получим длинную точную последовательность (3.7). □

В заключение отметим, что если инволютивная A_∞^{hu}-алгебра

$$(A, d, \pi_n, \tau_n^{j_q,\dots,j_1}, *)$$

является унитальной, то есть с единицей, инволютивной дифференциальной ассоциативной алгеброй $(A, d, \pi, u, *)$, где $\tau_1^{\varnothing} = \pi_0 = \pi$, $\tau_0^0 = u$ и $\tau_n^{j_q,\dots,j_1} = 0$ в остальных случаях, то точная последовательность (3.7) становится хорошо известной [2] точной последовательностью, которая связывает диэдральные и рефлексивные гомологии алгебры $(A, d, \pi, u, *)$.

Список литературы

[1] Цыган Б. Л., *О гомологиях некоторых матричных супералгебр Ли*, Функц. анал. и его прил. **20** (1986), №2, 90–91.

[2] Красаускас Р. Л., Лапин С. В., Соловьев Ю. П., *Диэдральные гомологии и когомологии. Основные понятия и конструкции*, Мат. сб. **133** (1987), №1, 25–48.

[3] Соловьев Ю. П., *Алгебраическая K-теория квадратичных форм*, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. **24** (1986), 121–194.
[4] Braun C., *Involutive A_∞-algebras and dihedral cohomology*, `arXiv:1209.1261v4 [math.QA] 12 Sep 2013`.
[5] M., *Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), 207–257.
[6] Penkava M., Schwarz A., *A_∞-algebras and the cohomology of moduli spaces*, `arXiv:hep-th/9408064v2`, 1995, p. 1–17.
[7] Лапин С. В., *Гомотопические симплициальные грани и гомологии реализаций симплициальных топологических пространств*, Мат. заметки **94** (2013) №5, 661–681.
[8] Лапин С. В., *Дифференциальные модули Ли над искривленными крашенными коалгебрами и ∞-симплициальные модули*, Мат. заметки **96** (2014), №5, 709–731.
[9] Лапин С. В., *Гомотопические свойства ∞-симплициальных коалгебр и гомотопически унитальные дополненные A_∞-алгебры*, Мат. заметки **99** (2016), №1, 55–77.
[10] Lyubashenko V. V., *Homotopy unital A_∞-algebras*, `arXiv:1205.6058v1 [math.KT]`, 2012, p. 1–26.
[11] Connes A., *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Ètudes Sci. Publ. Math. **62** (1985), no. 2, 257–360.
[12] Цыган Б. Л., *Гомологии матричных алгебр Ли над кольцами и гомологии Хохшильда*, Успехи мат. наук **38** (1983), №2, 217–218.
[13] Connes A., *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **296** (1983), no. 23, 953–958.
[14] Лапин С. В., Дифференциальные возмущения и D_∞-дифференциальные модули, Мат. сб. **192** (2001), №11, 55–76.
[15] Лапин С. В., *Циклические модули с ∞-симплициальными гранями и циклические гомологии A_∞-алгебр*, Мат. заметки **102** (2017), №6, 874–895.
[16] Stasheff J. D., *Homotopy associativity of H-spaces* I, II, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), no. 2, 275–312.
[17] Кадеишвили Т. В., *К теории гомологий расслоенных пространств*, Успехи мат. наук **35** (1980), 183–188.
[18] Loday J.-L., Vallette B., *Algebraic operads*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 346, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

г. Саранск, Россия
E-mail: `slapin@mail.ru`

Поступило 29 октября 2019 г.