О. А. Ладыженская, Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье–Стокса при наличии осевой симметрии, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1968, том 7, 155–177

О.А.Ладыженская

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В ЦЕЛОМ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

В своем обзорном докладе на Международном Конгрессе в Москве (авг.1966г.)[I] я сформулировала результат об однозначной разрешимости в целом задачи Коши и одной начально-краевой задачи для системы уравнений Навье-Стокса в случае наличия осевой симметрии (в узком смысле) у данных задачи и указала соотношение (см. ниже соотношение (I7)), из которого следуют необходимые для этого новые априорные оценки[ж)]. Изложим это здесь более подробно.

Введем в эвклидовом пространстве E_3 переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ цилиндрические координаты (r, φ, z), и пусть v^r, v^φ, v^z суть цилиндрические компоненты вектора скорости $\vec{v}$. Предположим, что для начального распределения $\vec{v}_0 = (v_0^r, v_0^\varphi, v_0^z)$ вектора $\vec{v}$ и массовых сил $\vec{f}$ все их цилиндрические компоненты не зависят от угла φ и $v_0^\varphi = f^\varphi \equiv 0$

ж) Это соотношение положено также в основу и только что появившейся работы [2] .

(это и значит, что $\vec{v}_0$ и $\vec{f}$ обладают осевой симметрией в узком смысле) и будем искать соответствующие им решения $\vec{v}$, обладающие этими же свойствами. Для этого запишем уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах, считая в них $v^\varphi = f^\varphi \equiv 0$ и v^r, v^z, f^r и f^z независящими от φ. Как известно, они будут следующими:

$$v^r_t - \nu\left(v^r_{rr} + \frac{1}{r} v^r_r + v^r_{zz} - \frac{v^r}{r^2}\right) + v^z\omega = -q_r + f^r, \qquad (1_1)$$

$$v^z_t - \nu\left(v^z_{rr} + \frac{1}{r} v^z_r + v^z_{zz}\right) - v^r\omega = -q_z + f^z, \qquad (1_2)$$

$$(rv^r)_r + (rv^z)_z = 0, \qquad (1_3)$$

где $\omega = v^r_z - v^z_r$ – единственная отличная от нуля угловая компонента вихря $\operatorname{rot}\vec{v} = (0, \omega, 0) \equiv \vec{\omega}$, а $q = p - \frac{\vec{v}^2}{2}$. Из (1_1) и (1_2) следует:

$$\omega_t - \nu\left(\omega_{rr} + \frac{1}{r}\omega_r + \omega_{zz} - \frac{\omega}{r^2}\right) + v^z\omega_z + v^r\omega_r - \frac{v^r}{r}\omega = \mathcal{F}, \qquad (2)$$

где $\mathcal{F} = f^r_z - f^z_r$. Уравнение (1_3) позволяет ввести "функцию тока" $\Psi(r, z, t)$:

---

*) Нижние значки t, r, z означают дифференцирование по соответствующему переменному.

$$v^r = \frac{1}{r}\psi_z , \quad v^z = -\frac{1}{r}\psi_r . \tag{3}$$

Она связана с ω равенством $D\psi = r\omega$, где $D\psi = r\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r + \psi_{zz} = \psi_{rr} - \frac{1}{r}\psi_r + \psi_{zz}$, и для ψ из (2) следует уравнение

$$D\psi_t - \nu D^2\psi - r\frac{\partial(\psi, \frac{D\psi}{r^2})}{\partial(r,z)} = r\mathcal{F}. \tag{4}$$

Будем считать пока, что все рассматриваемые функции определены в прямоугольнике $\Pi_{\varepsilon R} = \{(r,z): 0<\varepsilon \leq r \leq R,\ z\in[-R,R]\}$, и что все вводимые ниже интегралы сходятся.

Для уравнения (4) рассмотрим начально-краевую задачу

$$\psi\Big|_{t=0} = \psi_0(r,z), \ \psi\Big|_{\partial\Pi_{\varepsilon R}} = D\psi\Big|_{\partial\Pi_{\varepsilon R}} = 0. \tag{5}$$

Для функций ψ , удовлетворяющих одному из двух граничных условий (5), справедливы соотношения

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} r\,\frac{\partial(\psi, \frac{D\psi}{r^2})}{\partial(r,z)}\,\frac{\Phi(\psi)}{r}\,dr\,dz =$$

$$= \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left[\frac{\partial\tilde{\Phi}(\psi)}{\partial r}\,\frac{\partial\frac{D\psi}{r^2}}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{\Phi}(\psi)}{\partial z}\,\frac{\partial\frac{D\psi}{r^2}}{\partial r}\right]dr\,dz = 0 \tag{6}$$

и

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} r\,\frac{\partial\left(\psi,\ \frac{D\psi}{r^2}\right)}{\partial(r,z)}\cdot\frac{1}{r}\,\Phi\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)dr\,dz = \tag{7}$$

$$=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial\tilde\Phi\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial\tilde\Phi\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)}{\partial r}\right]dr\,dz=0,$$

где $\Phi(\tau)$ – произвольная гладкая функция τ, равная нулю при $\tau=0$, а $\tilde\Phi(\tau)=\int\limits_0^{\tau}\Phi(\xi)\,d\xi$. Подсчитаем, что порождают линейные члены (4) в результате этих умножений и интегрирований. Для этого нам понадобятся формулы

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\frac{1}{r}\,D\zeta\cdot\eta\,dr\,dz=-\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\frac{1}{r}\left(\zeta_r\eta_r+\zeta_z\eta_z\right)dr\,dz \tag{8}$$

и

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\frac{1}{r}\,D\zeta\cdot\eta\,dr\,dz=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\frac{1}{r}\,\zeta\cdot D\eta\,dr\,dz, \tag{9}$$

справедливые для ζ и η, равных нулю на границе области интегрирования. Благодаря им

$$-\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}D\psi_t\cdot\frac{\psi}{r}\,dr\,dz=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\frac{1}{r}\left(\psi_r^2+\psi_z^2\right)dr\,dz \tag{10}$$

и

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} D^2\psi \cdot \frac{\psi}{r}\, dr\, dz = \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r}\,(D\psi)^2\, dr\, dz. \qquad (11)$$

Из (4) в силу (6) с $\Phi(\tau) \equiv \tau$ и (10),(11) получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r}\,(\psi_r^2 + \psi_z^2)\, dr\, dz + \nu \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r}\,(D\psi)^2\, dr\, dz = \qquad (12)$$

$$= \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \mathcal{F}\psi\, dr\, dz,$$

которое является ничем иным, как известным энергетическим соотношением

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \vec{v}^{\,2} r\, dr\, dz + \nu \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \omega^2 r\, dr\, dz = \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \mathcal{F}\psi\, dr\, dz = \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \vec{f}\,\vec{v}\, r\, dr\, dz, \qquad (13)$$

если заметить еще, что

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \omega^2 r\, dr\, dz = \qquad (14)$$

$$= \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \left[(v^r_r)^2 + \left(\frac{v^r}{r}\right)^2 + (v^r_z)^2 + (v^z_r)^2 + (v^z_z)^2 \right] r\, dr\, dz.$$

Новое соотношение получим от умножения (4) на $\frac{1}{r}\,\Phi\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)$ и интегрирования его по $\Pi_{\varepsilon R}$. Преобразуем его члены так:

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} D\psi_t\, \frac{1}{r}\,\Phi\left(\frac{D\psi}{r^2}\right) dr\, dz = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \tilde{\Phi}\left(\frac{D\psi}{r^2}\right) r\, dr\, dz, \qquad (15)$$

$$-\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} D^2\psi\cdot\frac{1}{\tau}\,\Phi\left(\frac{D\psi}{\tau^2}\right)d\tau dz=-\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\frac{1}{\tau}D(\tau\omega)\,\Phi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)d\tau dz=$$

$$=-\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left(\omega_{\tau\tau}+\frac{1}{\tau}\omega_\tau+\omega_{zz}-\frac{\omega}{\tau^2}\right)\,\Phi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)d\tau dz=$$

$$=-\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left\{\left[\tau\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau\right]_\tau+\left[\tau\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_z\right]_z+2\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau\right\}\Phi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)d\tau dz= \qquad (16)$$

$$=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left\{\tau\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau\,\Phi'\cdot\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau+\tau\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_z\,\Phi'\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_z+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial}{\partial\tau}\,\tilde{\Phi}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\right\}d\tau dz=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\Phi'\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\left(\nabla\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\right)^2\tau d\tau dz,$$

где $\nabla\left(\frac{\omega}{\tau}\right)=\left(\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau,\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_z\right)$, считая $\Phi(0)=0$. Благодаря (I5), (I6) и (7) из (4) следует

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\tilde{\Phi}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\tau d\tau dz+\nu\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\Phi'\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\left(\nabla\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\right)^2\tau d\tau dz= \qquad (17)$$

$$=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\mathcal{F}\,\Phi\left(\frac{\omega}{\tau}\right)d\tau dz=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\Phi'\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\left[f^z\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau-f^\tau\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_z\right]d\tau dz.$$

В простейшем случае при $\Phi(\tau)=(\tau)$ соотношение (I7) имеет вид :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\tau d\tau dz+\nu\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left(\nabla\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\right)^2\tau d\tau dz= \qquad (18)$$

$$=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\mathcal{F}\,\frac{\omega}{\tau}\,d\tau dz=\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}}\left[f^z\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_\tau-f^\tau\left(\frac{\omega}{\tau}\right)_z\right]d\tau dz\ .$$

Из (I3) и (I8) обычным образом оцениваются их левые части через $\vec{f}$ и $\vec{v}_0$. Эти оценки можно сделать по-разному в зависимости от предположений относительно $\vec{f}$. Так, например, если считать, что

$$\|\vec{v}_0\|_{\Pi_{eR}} \equiv \|\vec{v}_0\| \equiv \Big(\int\limits_{\Pi_{eR}} \vec{v}_0^{\,2}\, r\,dr\,dz\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_0^T \|\vec{f}\|\,dt < \infty, \tag{I9}$$

то из (I3) следует:

$$\|\vec{v}(r,z,t)\| \le \|\vec{v}_0\|_0 + \int\limits_0^t \|\vec{f}(r,z,t)\|\,dt \tag{20}$$

и

$$\|\vec{v}(r,z,t)\|^2 + 2\nu\int\limits_0^t \|\omega\|^2 dt \le 2\|\vec{v}_0\|^2 + 3\Big(\int\limits_0^t \|f\|\,dt\Big)^2. \tag{2I}$$

Если предположить, что

$$\Big\|\frac{\omega(r,z,0)}{r}\Big\| < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_0^T \Big\|\frac{F}{r}\Big\|\,dt < \infty, \tag{22}$$

то из (I8) получим

$$\Big\|\frac{\omega(r,z,t)}{r}\Big\| \le \Big\|\frac{\omega(r,z,0)}{r}\Big\| + \int\limits_0^t \Big\|\frac{F}{r}\Big\|\,dt \tag{23}$$

и

$$\left\| \frac{\omega(r,z,t)}{r} \right\|^2 + 2\nu \int_0^t \left\| \nabla\left(\frac{\omega}{r}\right)\right\|^2 dt \le 2\left\| \frac{\omega(r,z,0)}{r}\right\|^2 + 3\left(\int_0^t \left\|\frac{\mathcal{F}}{r}\right\| dt\right)^2. \quad (24)$$

Если же предположить, что

$$\int_0^T \left\| \frac{\vec{f}}{r} \right\|^2 dt < \infty , \qquad (\tilde{22})$$

то из (I8) получим

$$\left\| \frac{\omega(r,z,t)}{r} \right\|^2 + \nu \int_0^t \left\| \nabla\left(\frac{\omega}{r}\right)\right\|^2 dt \le \left\| \frac{\omega(r,z,0)}{r}\right\|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \left\|\frac{\vec{f}}{r}\right\|^2 dt. \quad (25)$$

Неравенства (23)-(25) и являются теми новыми априорными оценками, которые позволяют доказать разрешимость в целом задачи Коши для системы (1_i), $i = 1,2,3$, и задачи (4),(5) в классе достаточно хороших функций (т.е. в таком классе, в котором есть единственность). Разрешимость задачи (4),(5) докажем, используя метод Галеркина, при этом все оценки приближенных и точных решений задачи (4),(5) проведены так, чтобы они не зависели от ε и R .

Введем два гильбертова пространства $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_{\varepsilon R})$ и

$W_{2,0}^{(3)}\ (\Pi_{\varepsilon R})$ со скалярными произведениями

$$(\psi,\chi)_2 \equiv \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{D\psi}{r^2}\cdot\frac{D\chi}{r^2}\, r\,dr\,dz = \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{\omega(\psi)}{r}\cdot\frac{\omega(\chi)}{r}\, r\,dr\,dz, \quad (26)$$

$$(\psi,\chi)_3 \equiv \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \left[\left(\frac{D\psi}{r^2}\right)_r \left(\frac{D\chi}{r^2}\right)_r + \left(\frac{D\psi}{r^2}\right)_z \left(\frac{D\chi}{r^2}\right)_z\right] r\,dr\,dz = \quad (27)$$

$$= \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \nabla\left(\frac{\omega(\psi)}{r}\right)\cdot\nabla\left(\frac{\omega(\chi)}{r}\right) r\,dr\,dz.$$

Пространство $W_{2,0}^{(2)}\ (\Pi_{\varepsilon R})$ состоит из всех элементов $W_2^2\ (\Pi_{\varepsilon R})$, равных нулю на $\partial\Pi_{\varepsilon R}$, а пространство $W_{2,0}^{(3)}\ (\Pi_{\varepsilon R})$ – из всех элементов $W_2^3\ (\Pi_{\varepsilon R})$, удовлетворяющих граничным условиям (5) ($W_2^{\ell}\ (\Pi_{\varepsilon R})$ – это обычные пространства С.Л.Соболева, см. § I, гл. I [5]). Нормы $|\psi|_2$ и $|\psi|_3$, соответствующие скалярным произведениям (26) и (27), эквивалентны нормам пространств $W_2^2\ (\Pi_{\varepsilon R})$ и $W_2^3\ (\Pi_{\varepsilon R})$ соответственно. Это следует из установленных нами оценок для эллиптических операторов (см.[3] , гл. П), которые надо применить к оператору $D\psi$. Базис в методе Галеркина выберем так, чтобы для приближенных решений ψ^N задачи (4),(5) было справедливо соотношение (I8). Именно, пусть $\{\varphi_k\ (r,z)\}$ есть базис (или фундаментальная система) в $W_{2,0}^{(3)}\ (\Pi_{\varepsilon R})$, причем ради удобства будем считать, что $(\varphi_k,\ \varphi_\ell)_2 = \delta_k^{\ell}$. Приближенные решения $\psi^N(r,z,t)=\sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\,\varphi_k(r,z)$ будем вычислять, исходя из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int_{\Pi_{\varepsilon R}} \left[D\psi_t^N - r\,\frac{\partial(\psi^N, \frac{D\psi^N}{r^2})}{\partial(r,z)} \right] \frac{D\varphi_k}{r^3}\, dr\,dz +$$

$$+\nu \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r}\left[(D\psi^N)_r \left(\frac{D\varphi_k}{r^2}\right)_r + (D\psi^N)_z \left(\frac{D\varphi_k}{r^2}\right)_z \right] dr\,dz = \tag{28}$$

$$= \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \left[f^z \left(\frac{D\varphi_k}{r^2}\right)_r - f^r \left(\frac{D\varphi_k}{r^2}\right)_z \right] dr\,dz, \quad k=1,2,\dots N,$$

и начальных условий

$$c_k^N(0) = (\psi_0, \varphi_k)_2, \quad k=1,2,\dots N, \tag{29}$$

считая $\psi_0 \in W_{2,0}^{(2)}(\Pi_{\varepsilon R})$, а $\vec{f}$ удовлетворяющим условию $(\widetilde{22})$ (если вместо $(\widetilde{22})$ предположить выполненным (22), то правую часть в (28) нужно записать в виде $\int_{\Pi_{\varepsilon R}} \mathcal{F}\,\frac{D\varphi_k}{r^2}\,dr\,dz$. Случаи (22) и $(\widetilde{22})$ рассматриваются аналогично).

Как нетрудно видеть, соотношения (28),(29) определяют $c_k^N(t)$ однозначно и для ψ^N справедливы равенство (18) и оценка (25). Это позволяет выполнить предельный переход по $N\to\infty$ и доказать, что предельная для ψ^N функция $\psi(r,z,t)$ существует и обладает следующими свойствами:

I) $\psi \in W_{2,0}^{(2)}(\Pi_{\varepsilon R})$ при всех $t \in [0,T]$ и сильно непрерывна по t в норме этого пространства;

2) $\psi \in W_{2,0}^{(3)}(\Pi_{\varepsilon R})$ для почти всех t из $[0,T]$ и $\int_0^T |\psi|_3^2\,dt < \infty$;

3) ψ удовлетворяет условиям (5) так, как ей предписывают свойства I) и 2)), а уравнению (4) в форме интегрального тождества

$$\int_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r} D\psi \cdot \eta \, dr dz \Big|_{t=0}^{t=t} + \int_0^t \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \left[-\frac{1}{r} D\psi \cdot \eta_t - \frac{\partial(\psi, \frac{D\psi}{r^2})}{\partial(r,z)}\eta \right] dr dz dt +$$

$$+\nu \int_0^t \int_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r}\left[(D\psi)_r \eta_r + (D\psi)_z \eta_z \right] dr dz dt = \tag{30}$$

$$= \int_0^t \int_{\Pi_{\varepsilon R}} (f^z \eta_r - f^r \eta_z)\, dr dz dt$$

для $\forall \eta(r,z,t) \in W_{2,0}^{(1)}(Q_{\varepsilon R}^T = \Pi_{\varepsilon R} \times [0,T])$ (т.е. η, $\eta_r, \eta_z, \eta_t \in L_2(Q_{\varepsilon R}^T)$ и $\eta = 0$ на боковой поверхности $S_{\varepsilon R}^T$ цилиндра $Q_{\varepsilon R}^T$). Доказывается это, в основном, так же в [4] (см. § 4 гл. III и § 6 гл. У) для параболических уравнений 2-го порядка, надо только учесть, что функции $\left\{\frac{D\varphi_k}{r^2}\right\}$ образуют базис(фунд. систему) в $\overset{0}{W}{}_2^{(1)}(\Pi_{\varepsilon R})$.

4) Для ψ справедливо соотношение (I8) и, тем самым,

оценка (25).

Тождеству (30) удобнее придать иной вид (используя (8)):

$$\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r}(\psi_r \eta_r + \psi_z \eta_z)\,dr\,dz \Big|_{t=0}^{t=t} + \int\limits_0^t \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \Big[-\frac{1}{r}(\psi_r \eta_{rt} + \psi_z \eta_{zt}) + \frac{\partial(\psi, \frac{D\psi}{r^2})}{\partial(r,z)}\,\eta \Big]\,dr\,dz + \tag{31}$$

$$+ \nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{1}{r} D\psi \cdot D\eta\,dr\,dz = \int\limits_0^t \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} (f^z \eta_r - f^r \eta_z)\,dr\,dz,$$

считая η произвольным элементом $\tilde{W}^{(2)}_{2,0}(Q^T_{\varepsilon R})$, т.е. функцией, имеющей все производные первого и второго порядка по r, z, t, кроме η_{tt}, из $L_2(Q^T_{\varepsilon R})$ и равной нулю на $S^T_{\varepsilon R}$.

Итак, найдено решение ψ задачи (4),(5) в $Q^T_{\varepsilon R}$, обладающее свойствами I)-4). Для ψ справедливы также равенство (I3), которое формально получается из (3I) при $\eta = \psi$, и нижеследующее соотношение (32), которое формально получается из (30) при $\eta = D\psi = r\omega$, именно

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \omega^2 r\,dr\,dz \Big|_{t=0}^{t=t} + \nu \int\limits_0^t \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \Big(\omega_r^2 + \omega_z^2 + \frac{\omega^2}{r^2}\Big) r\,dr\,dz = \tag{32}$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \big[v^r \omega^2 + f^z (r\omega)_r - f^r (r\omega)_z \big]\,dr\,dz\,dt.$$

Нестрогость такого вывода (I3) из (3I) и (32) из (30) заключается лишь в одном пункте: $\eta=\psi$ и $\eta=D\psi$ не имеют производной по t. Однако, они сильно непрерывны по t в норме $L_2(\Pi_{\varepsilon R})$. Благодаря этому для них справедливы рассуждения §§ I,2 гл. Ш [4], которые и приводят к (I3) и (32).

Оценим первый член правой части (32) так:

$$j_1 \equiv \left| \int_{\Pi_{\varepsilon R}} v^r \omega^2 \, dr dz \right| \le \| v^r \|_4 \, \| \omega \|_4 \, \left\| \frac{\omega}{r} \right\|_2 \le$$

$$\le c \, \| v^r \|_4 \, \| \omega \|_4 , \tag{33}$$

где через c обозначен максимум правой части (25) (или (23)), а $\| \omega \|_4 \equiv \| \omega \|_{4,\Pi_{\varepsilon R}} = \left(\int_{\Pi_{\varepsilon R}} \omega^4 r \, dr dz \right)^{1/4}$. Норма $\| \omega \|_4$ оценивается в силу неравенства (3) § I, гл. I [5] так:

$$\| \omega \|_4 \le (8\pi)^{1/4} \, \| \omega \|^{1/4} \, \| \nabla \omega \|^{3/4} , \tag{34}$$

где $\| \nabla \omega \|^2 = \int_{\Pi_{\varepsilon R}} (\omega_r^2 + \omega_z^2) \, r \, dr dz$, а оценка нормы $\| v^r \|_4$ может быть проведена по той же схеме, как и доказательство неравенства (I), § I, гл. I [5], с учетом граничного условия $v^{\tau}\Big|_{\substack{\tau=\varepsilon\\ \tau=R}} = 0$, именно

$$\|v^{\tau}\|_4^4 \le \frac{2\pi}{3R^3}\|v^{\tau}\|^4 + \frac{16\pi}{3}\|v^{\tau}\|\,\|\nabla v^{\tau}\|^3. \tag{35}$$

Из (33)-(35) следует :

$$j_1 \le \frac{c\delta}{2}\|\omega\|_4^2 + \frac{c}{2\delta}\|v^{\tau}\|_4^2 \le \frac{c\delta}{2}(8\pi)^{1/2}\|\omega\|^{1/2}\|\nabla\omega\|^{3/2} +$$

$$+ \frac{c}{2\delta}\left(\frac{2\pi}{3R^3}\right)^{1/2}\|v^{\tau}\|^2 + \frac{c}{2\delta}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^{1/2}\|v^{\tau}\|^{1/2}\|\nabla v^{\tau}\|^{3/2} \le \tag{36}$$

$$\le \frac{c\delta}{2}(8\pi)^{1/2}\left(\frac{3}{4}\|\nabla\omega\|^2 + \frac{1}{4}\|\omega\|^2\right) + \left[\frac{c}{2\delta}\left(\frac{2\pi}{3R^3}\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left. + \frac{c}{8\delta}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^{1/2}\right]\|v^{\tau}\|^2 + \frac{3c}{8\delta}\left(\frac{16\pi}{3}\right)^{1/2}\|\nabla v^{\tau}\|^2$$

при $\forall\,\delta > 0$.

Подставляя эту оценку j_1 в (32) и используя энергетическое неравенство (2I), получим :

$$\frac{1}{2}\|\omega\|^2\Big|_{t=0}^{t=t} + \nu\int_0^t \left(\|\nabla\omega\|^2 + \left\|\frac{\omega}{\tau}\right\|^2\right)dt \le$$

$$\leq C_\delta + \frac{3c\delta}{8}(8\pi)^{1/2}\int_0^t \|\nabla\omega\|^2 dt +$$

$$+\int_0^t\iint_{\Pi_{\varepsilon R}} \left(|f^z(\omega_r+\frac{\omega}{r})| + |f^r\omega_z|\right) r\,dr\,dz\,dt, \tag{37}$$

откуда, выбирая δ достаточно малым, выведем еще одну полезную нам оценку

$$\|\omega(r,z,t)\|^2 + \nu\int_0^t \left(\|\nabla\omega\|^2 + \|\frac{\omega}{r}\|^2\right)dt \leq$$

$$\leq C + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\vec{f}\|^2 dt + \|\omega(r,z,0)\|^2, \tag{38}$$

в которой C так же, как и выше, не зависит от ε и R (лишь бы $R \geq R_0 > 0$).

Итак, мы доказали, что обобщенное решение ψ задачи (4),(5), обладающее свойствами I)-4), подчиняется также и неравенству (38). Для таких решений заведомо имеет место теорема единственности. Она справедлива и в более широком классе функций и доказывается одним из способов, который неоднократно применялся мною для доказательства теорем единственности в различных нестационарных задачах (см., напр., §§ I,2, гл. Ш [4]). Поэтому приведем его лишь в общих чертах.

Пусть ψ' и ψ'' суть два таких решения. Для их разности ψ из (3I) следует тождество, из которого, в свою очередь, выводится равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \frac{\psi_r^2(r,z,t)+\psi_z^2(r,z,t)}{r}\,dr\,dz\, +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \left[\frac{\nu}{r}(D\psi)^2 + \frac{\partial(\psi',\ \frac{D\psi}{r^2})}{\partial(r,z)}\,\psi\right] dr\,dz\,dt = 0. \tag{39}$$

(Формально оно получается тогда, когда в тождестве для разности ψ, вытекающем из (3I) для ψ' и ψ'', η взята равной ψ). Преобразуя последнее слагаемое с помощью интегрирования по частям, результат запишем так:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \vec{v}^{\,2}(r,z,t)\,r\,dr\,dz + \nu\int\limits_0^t\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} \omega^2\, r\,dr\,dz\,dt =$$

$$= \int\limits_0^t\int\limits_{\Pi_{\varepsilon R}} (v^{r'}v^z - v^{z'}v^r)\,\omega\, r\,dr\,dz\,dt, \tag{40}$$

где $\vec{v}$ и ω определяются ψ, а $\vec{v}\,'$ – решением ψ'.

Для оценки правой части нам, помимо (35), понадобится еще неравенство

$$\|v^z\|_4^4 \le \frac{2\pi}{R^3}\|v^z\|^4 + 7\pi\|v^z\|\,\|\nabla v^z\|^3, \tag{4I}$$

которое (так же, как и (35)) доказывается тем же способом, что и неравенство (I), § I, гл. I [5], только ввиду того, что v^z

вместо условия $v^z\big|_{\partial\Pi_{\varepsilon R}} = 0$ удовлетворяет лишь условию $v^z\big|_{z=\pm R} = 0$, величины вида $\max\limits_{-R\le x_1\le R} (v^z)^2$ приходится оценивать несколько иначе, именно:

$$\max_{-R\le x_1\le R} (v^z)^2 \le \min_{-R\le x_1\le R} (v^z)^2 + \int_{-R}^{R} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} (v^z)^2 \right| dx_1 \le \tag{42}$$

$$\le \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (v^z)^2 \, dx_1 + 2 \int_{-R}^{R} |v^z v^z_{x_1}| \, dx_1 .$$

Благодаря (36) и (42) и предположениям о ψ' и ψ''

$$\left| \int_{\Pi_{\varepsilon R}} (v^{r'} v^z - v^{z'} v^r) \omega r \, dr dz \right| \le (\| v^{r'} \|_4 \, \| v^z \|_4 +$$

$$+ \| v^{z'} \|_4 \, \| v^r \|_4) \, \| \omega \| \le c \, (\| v^z \|_4 + \| v^r \|_4) \, \| \omega \| \le \tag{43}$$

$$\le c_1 (\| v \| + \| v \|^{1/4} \, \| \omega \|^{3/4}) \, \| \omega \| \le c_1 \Big(\frac{\delta}{2} \, \| \omega \|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\delta} \, \| \vec{v} \|^2 + \frac{7}{8} \, \delta^{8/7} \, \| \omega \|^2 + \frac{1}{8} \, \delta^{-8} \, \| \vec{v} \|^2 \Big), \quad \forall \delta > 0 .$$

Поэтому из (40) следует

$$\frac{1}{2}\|\vec{v}(r,z,t)\|^2+\nu\int_0^t\|\omega\|^2\,dt\le$$

$$\le c_1\int_0^t\Big[\Big(\frac{\delta}{2}+\frac{7}{8}\delta^{8/7}\Big)\|\omega\|^2+\Big(\frac{1}{2\delta}+\frac{1}{8\delta^8}\Big)\|\vec{v}\|^2\Big)\,dt\,. \tag{44}$$

Выбирая δ так, что $c_1\left(\frac{\delta}{2}+\frac{7}{8}\delta^{8/7}\right)\le\nu$, из (44) заключим о равенстве $\vec{v}$ нулю, т.е. о справедливости теоремы единственности. Итак, доказана теорема:

<u>Теорема I</u>. Задача (4), (5) однозначно разрешима в классе функций, обладающих свойствами I)–4), если только $\psi_0(r,z)\in W^{(2)}_{2,0}\;(\Pi_{\varepsilon R})$, а $\vec{f}=(f^r,0,f^z)$ удовлетворяет условию $(\widetilde{22})$. Для решения ψ справедливы соотношения (I3),(I8),(32) и выведенные из них оценки (20),(2I),(25) и (38), причем правые части этих оценок зависит от области $\Pi_{\varepsilon R}$ только через посредство выписанных в них явно интегралов от $\vec{f}$ и ψ_0.

Теорема I дает возможность получить решение задачи (4), (5) в прямоугольнике $\Pi_R=\{(r,z):\ 0\le r\le R,\ \ |z|\le R\}$ и решение задачи Коши для (4) (или, что то же, для системы (1_i), $i=1,2,3$). Первое из них получается как предел решений $\psi^{\varepsilon R}$ задач (4),(5) в $\Pi_{\varepsilon R}$ при $\varepsilon\to0$, а второе - при $\varepsilon\to0$ и $R\to\infty$. Оба предельных перехода можно выполнить, если предположить относительно $\vec{f}$ ограниченность интегралов:

$$\int_0^T \|\vec{f}\|_\Pi^2\, dt \quad \text{и} \quad \int_0^T \left\|\frac{\vec{f}}{r}\right\|_\Pi^2 dt, \tag{45}$$

и относительно ψ_0 :

$$\left.\begin{aligned} |\psi_0|_\Pi^2 &\equiv \int_\Pi \left[\frac{\psi_{0r}^2+\psi_{0z}^2}{r} + \omega^2(r,z,0) + \frac{\omega^2(r,z,0)}{r^2}\right] r\,dr\,dz < \infty \\ \text{и} \quad \psi_0\big|_{\partial\Pi} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

для $\Pi = \Pi_R$ и $\Pi = \Pi_\infty$ соответственно.

Обозначим через $\hat{W}_{2,0}^{(2)}(\Pi)$ гильбертово пространство, состоящее из функций $\psi_0(r,z)$ удовлетворяющих условиям (46), с нормой $|\psi_0|_\Pi$. Пусть (45)и(46) выполнены. Рассмотрим несколько детальнее предельный переход по $\varepsilon \to 0$ (предельный же переход по $R \to \infty$ делается более стандартно). Во-первых, отметим, что если $|\psi_0|_{\Pi_R} < \infty$ для области Π_R и $\psi_0|_{\partial\Pi_R} = 0$, то ψ_0 можно приблизить в норме $|\cdot|_{\Pi_R}$ функциями $\psi_0^\varepsilon(r,z)$, равными нулю на $\partial\Pi_R$ и для $0 \le r \le \varepsilon$. Сделать это можно так: продолжить ψ_0 нулем для $r \le 0$. На прямоугольнике $\tilde{\Pi}_R = \{(r,z)\colon |r| \le R,\ |z| \le R\}$ так продолженная функция ψ_0 будет иметь обобщенные производные первого и второго порядков, в чем нетрудно убедиться, используя определение обобщенных производных, конечность нормы $|\psi_0|_{\Pi_R}$ и равенство (14). Функции

$\psi_0^\varepsilon(\tau, z) = \psi_0\left(\frac{R+2\varepsilon}{R}\tau - 2\varepsilon, z\right)$ равны нулю на $\partial\Pi_R$ и при $\tau \in [0, \frac{2R\varepsilon}{R+2\varepsilon}]$, $|\psi_0^\varepsilon|_{\Pi_R} < \infty$ и $\psi_0^\varepsilon \to \psi_0$ в норме $|\cdot|_{\Pi_R}$.

Рассмотрим вспомогательные задачи (4),(5) в областях $\Pi_{\varepsilon R}$, беря в качестве начального значения для ψ функцию ψ_0, а в качестве свободного члена само $\vec{f}$. В силу теоремы I существует единственное решение $\psi^{\varepsilon R}(\tau, z, t)$, обладающее описанными в теореме I свойствами. Устремим $\varepsilon \to 0$ и выберем из $\{\psi^{\varepsilon R}\}$ подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции ψ так, как позволяют равномерные по ε оценки (20), (2I),(25),(38). Для ψ можно сохранить эти же оценки (ясно, что интегралы при этом будут распространены на область Π_R). Интегральные тождества для $\psi^{\varepsilon R}$ возьмем в виде (3I) и выполним в них предельной переход, считая $\eta(\tau, z, t) = \int^t \xi(\tau, z, \tau)\, d\tau$, а $\xi(\tau, z, t)$ – произвольной функцией, имеющей при всех t норму $|\xi|_{\Pi_R}$, не превосходящую какого-либо числа, и равной нулю на $\partial\Pi_R$ и при $0 \le \tau \le \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. В пределе получим такое же соотношение (3I), только интегралы в нем будут распространены не на $\Pi_{\varepsilon R}$, а на Π_R. После этого снимем в нем ограничение финитности на η вблизи оси $\tau = 0$. Это возможно в силу отмеченной выше плотности в $\hat{W}_{2,0}^{(2)}(\Pi_R)$ функций, равных нулю вблизи $\tau = 0$, и того, что для ψ $\max\limits_t |\psi|_{\Pi_R} < \infty$.

Предельный переход по $R \to \infty$ делается аналогично с учетом того, что в $\hat{W}_{2,0}^{(2)}(\Pi_\infty)$ плотны финитные в полуплоскости Π_∞ функции. Таким образом для задач (4),(5) в Π_R и Π_∞

находятся обобщенные решения, для которых конечны нормы, стоящие в левых частях неравенств (20),(21),(25),(38), и для которых верно соотношение (31) при всех $\eta = \int^{t} \xi(r,z,\tau)d\tau$ с $\forall \xi \in \hat{W}^{(2)}_{2,0}(\Pi_R$ или $\Pi_\infty)$ и $|\xi(r,z,t)| \le Const < \infty$ (все интегралы при этом вычисляются по Π_R или Π_∞ соответственно).

Теорема единственности для таких решений доказывается так же, как это было сделано выше для области $\Pi_{\varepsilon R}$. Таким образом доказана

<u>Теорема 2</u>. Пусть для $\Psi_0(r,z)$ и $\vec{f}=(f^r,0,f^z)$ выполнены условия (45),(46) в Π_R или Π_∞. Тогда задачи (4),(5) однозначно разрешимы в $Q_R = (\Pi_R \times [0,T])$ и $Q_\infty = (\Pi_\infty \times [0,T])$ в классе функций, имеющих конечными нормы, стоящие в левых частях неравенств (20),(21),(25).

Для системы (1_i), $i=1,2,3$, теорема 2 гарантирует однозначную разрешимость задачи Коши, лишь бы только силы $\vec{f} = (f^r(r,z,t),0,f^z(r,z,t))$ и "функция тока" $\Psi_0(r,z)$, соответствующая начальному распределению поля скоростей, удовлетворяли условиям (45),(46).

Повышение гладкости полученных обобщенных решений по мере увеличения гладкости $\vec{f}$ и Ψ_0 (или, что, по существу, то же – $\vec{v}_0$) устанавливается так же, как и для обобщенных решений обычной начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса(см. [5] -[7] , другой подход см. в [8] ,[9]).

В частности, справедливо утверждение

Теорема 3. Если $\vec{f}$ и Ψ_0 удовлетворяют условиям теоремы 2 в $\Pi = \Pi_\infty$, и если декартовы компоненты $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$, $f_3(x,t)$ силы $\vec{f}$ суть непрерывные в смысле Гёльдера функции (x,t) при $t>0$, то декартовы компоненты вектора скорости $\vec{v}$ и давление p для обобщенного решения задачи Коши для (1_i), $i=1,2,3$, гарантированного теоремой 2, имеют при $t>0$ непрерывные производные по x и t, входящие в систему уравнений Навье-Стокса, записанную в декартовых координатах.

Мы не будем приводить других результатов о зависимости гладкости обобщенных решений от гладкости $\vec{f}$ и $\vec{v}_0$. Вместо этого, обратим внимание на возможность предельного перехода по $\nu \to 0$ и получение в качестве предела решения задачи Коши или решения начально-краевой задачи с граничным условием непроницаемости для системы уравнений Эйлера, описывающей движение идеальной жидкости. Для этого вернемся к соотношениям (17),(18). Как мы видели, если предположить (22), то из (18) следуют оценки (23),(24), правые части в которых не зависят от ν. Из (17) можно получить целую серию таких оценок, если делать соответствующие предположения относительно $\vec{f}$ и $\omega(r,z,0)$. Для этого надо в (17) в качестве $\Phi(r)$ брать функции r^{2k-1}, $k=2,3,\dots$. Устремляя показатель k к бесконечности, получим, в частности, оценку для $\max\limits_{r,z,t}\left|\frac{\omega(r,z,t)}{r}\right|$, независящую от ν , это, в свою очередь, позволяет оценить левую часть (32) величиной, не зависящей от ν .

Литература

I О.А.Ладыженская. Обзорный доклад на Международном Математическом Конгрессе, Москва, авг. 1966.

2 М.Р.Уховский, В.И.Юдович. Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство. ПММ, 1968, 32, 59-69.

3 О.А.Ладыженская. Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., 1953.

4 О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., Физматгиз, 1967.

5 О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., Физматгиз, 1961.

6 О.А.Ладыженская. О классичности обобщенных решений общих нелинейных нестационарных уравнений Навье-Стокса, Труды МИАН им.В.А.Стеклова, 1966,92,100-115.

7. О.А.Ладыженская. О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса, Записки научных семинаров ЛОМИ, 1967, 5, 169-185.

8 В.А. Солонников. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса, Труды МИАН им.В.А.Стеклова, 1964, 70, 213-317.

9 В.А.Солонников. О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье-Стокса, Труды МИАН им.В.А.Стеклова, 1964, 73,221-291.