В. А. Солонников, Начально-краевая задача для обобщенной системы уравнений Стокса в полупространстве,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2000, том 271, 224–275

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 271, 2000 г.

В. А. Солонников

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СТОКСА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

**Посвящается памяти
Александра Васильевича Иванова**

§1. Введение

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$

$$\vec{v}_t + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v} + \nabla p = \vec{f}(x,t),\ \nabla\cdot\vec{v} = 0,\ x\in\mathbb{R}^3_+,\ t>0, \tag{1.1}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \tag{1.2}$$

$$\vec{v}\big|_{x_3=0} = \vec{a}(x',t), \quad x' = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – матричный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с вещественными коэффициентами, содержащий лишь старшие члены. Это означает, что матрица $\mathcal{A}_0(i\xi) = (a_{jk}(i\xi))_{j,k=1,2,3}$ является положительно определенной при любых $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, т.е. выполняется неравенство

$$c_1|\eta|^2|\xi|^2 \leqslant \eta\cdot\mathcal{A}_0(i\xi)\eta \leqslant c_2|\eta|^2|\xi|^2, \quad \forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^3. \tag{1.4}$$

Если $\mathcal{A}_0 = -\Delta I$, то (1.1) – это хорошо известная нестационарная система уравнений Стокса. Более общая система возникает в результате линеаризации уравнений движения неньютоновских жидкостей.

Задача Коши

$$\vec{v}_t + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v} + \nabla p = \vec{f}(x,t), \quad \nabla\vec{v} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^3,\ t>0,$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = 0$$

изучалась в работе О. А. Ладыженской и Г. А. Серегина [1], где, в частности, получена оценка вторых производных $\vec{v}$ через $\vec{f}$ в норме $C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^3\times(0,T))$. Другой способ получения такой оценки предложен в препринте [2].

Цель настоящей работы состоит в построении решения задачи (1.1)–(1.3) и в доказательстве различных (в том числе коэрцитивных) оценок этого решения в пространствах Гёльдера.

Напомним, что под пространством Гёльдера $C^l(\Omega)$ (Ω – область в $\mathbb{R}^n$, l – положительное нецелое число) понимается множество функций (или векторных полей) с конечной нормой

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = [u]_{\Omega}^{(l)} + \sum_{|j|<l} \sup_{\Omega} |D^j u(x)|,$$

$$[u]_{\Omega}^{(l)} = \sum_{|j|=[l]} \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|^{[l]-l} |D^j u(x) - D^j u(y)|,$$

где, как обычно, $D^j u(x) = \frac{\partial^{|j|} u(x)}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}$, $|j| = j_1 + \ldots + j_n$. Анизотропное пространство Гёльдера $C^{l,l/2}(\Omega\times(0,T))$ определяется как множество функций $x\in\Omega$, $t\in(0,T)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{\Omega\times(0,T)}^{(l,l/2)} = [u]_{\Omega\times(0,T)}^{(l,l/2)} + \sum_{|j|+2k<l} \sup_{\Omega\times(0,T)} |D_x^j D_t^k u(x,t)|,$$

$$[u]_{\Omega\times(0,T)}^{(l,l/2)} = \sup_{t<T} [u(\cdot,t)]_{\Omega}^{(l)} + \sup_{\Omega} [u(x,\cdot)]_{(0,T)}^{(l/2)}.$$

Существует много других эквивалентных норм в этом пространстве; некоторые из них будут приведены ниже в §2.

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Предположим, что данные задачи* (1.1)–(1.3) *обладают следующими свойствами:*

$$\vec{f} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_+^3\times(0,T)), \quad \vec{v}_0 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_+^3),$$

$$\vec{a} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^2\times(0,T)),$$

$\alpha\in(0,1)$, $\vec{f}$, $\vec{v}_0$, $\vec{a}$ *убывают при* $|x|\to\infty$ *вместе со своими производными как степенные функции, выполняются условия согласования*

$\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0,$

$$\vec{v}_0\big|_{x_3=0} = \vec{a}\big|_{t=0},$$
$$\vec{a}_t(x',0) = (\vec{f}(x,0) - \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}_0(x) - \nabla p_0(x))\big|_{x_3=0}, \tag{1.5}$$
$$x' = (x_1, x_2),$$

где $p_0(x)$ – *решение задачи Неймана*

$$\nabla^2 p_0(x) = -\nabla \cdot \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}_0(x) + \nabla \cdot \vec{f}(x,0)$$
$$\frac{\partial p_0}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = -\left(\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}_0(x)\right)_3 + f_3(x,0)\big|_{x_3=0} - a_{3t}(x',0), \tag{1.6}$$
$$\nabla p_0(x) \to 0 \quad |x| \to \infty,$$

а также условия

$$\nabla \cdot \vec{f} = 0, \quad f_3\big|_{x_3=0} = 0.$$

Наконец, предположим, что функции $R_j a_{3t}(x',t)$, $j = 1, 2$, *где* R_j – *сингулярные операторы Рисса*

$$R_j f(x') = -\frac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{R^2} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} f(y')dy',$$

имеют конечную норму

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}^2} [R_j a_{3t}(x',\cdot)]^{(\frac{\alpha}{2})}_{(0,T)}. \tag{1.7}$$

Тогда задача (1.1)–(1.3) *имеет решение* $\vec{v} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^3_+ \times (0,T))$, $\nabla p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^3_+ \times (0,T))$, *убывающее на бесконечности и подчиняющееся неравенству*

$$[\vec{v}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} + [\nabla p]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} \leqslant c([\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} + [\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} +$$
$$+ [\vec{a}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} + \sum_{j=1}^{2} \sup_{\mathbb{R}^2} [R_j a_{3t}(x',\cdot)]^{(\frac{\alpha}{2})}_{(0,T)}). \tag{1.8}$$

Решение единственно (с точностью до слагаемого $\vec{v}^{(0)} = 0$, $p^{(0)} = p(t)$*) в классе ограниченных функций* $(\vec{v}, p)$ *с* $\vec{v} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^3_+ \times (0,T))$, $\nabla p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^3_+ \times (0,T))$.

Отметим, что оценка (1.8) является коэрцитивной лишь при $a_3 = 0$, так как последнее слагаемое в (1.8) не является ограниченным при произвольном $a_3 \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$. Достаточным условием конечности норм (1.7) является

$$a_{3t}(x',t) = \nabla' \cdot \vec{A}'(x',t) \equiv \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial A_j}{\partial x_j}, \tag{1.9}$$

с $\vec{A}' \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$, убывающим при $|x| \to \infty$ как степенная функция.

Для уравнений Стокса (т.е. при $\mathcal{A}_0 = -\Delta I$) оценка (1.8) при условии (1.9) получена в [3]. На ее основании в [4] была доказана коэрцитивная оценка решения задачи Стокса в областях с гладкими границами (см. также [5]). С помощью таких же рассуждений это может быть сделано и для системы (1.1), также в случае, когда оператор $\mathcal{A}_0$ имеет переменные коэффициенты и содержит младшие члены.

Работа была выполнена во время пребывания автора в Математическом центре (CMAF) Лиссабонского Университета и поддержана грантом Praxis XXI.

§2. Вспомогательные приложения

При построении решения задачи (1.1)–(1.3) важную роль играет фундаментальная матрица решений системы (1.1), которую можно записать в виде

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & & & \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{matrix} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица определяется как обратное преобразование Фурье–Лапласа матрицы $\mathcal{L}^{-1}(i\xi, s)$, иными словами, ее элементами являются функции

$$T_{km}(x,t) = (FL)^{-1}(\mathcal{L}^{-1}(i\xi,s))_{km} = (FL)^{-1}\frac{\widehat{L}_{km}(i\xi,s)}{L(i\xi,s)},$$
$$k, m = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$\mathcal{L}(i\xi,s)=\begin{pmatrix} s+a_{11}(i\xi) & a_{12}(i\xi) & a_{13}(i\xi) & i\xi_1\\ a_{21}(i\xi) & s+a_{22}(i\xi) & a_{23}(i\xi) & i\xi_2\\ a_{31}(i\xi) & a_{32}(i\xi) & s+a_{33}(i\xi) & i\xi_3\\ i\xi_1 & i\xi_2 & i\xi_3 & 0\end{pmatrix},$$

$$L(i\xi,s)=\det\mathcal{L}(i\xi,s)=s^2|\xi|^2+s(|\xi|^2\mathrm{Sp}\mathcal{A}_0(i\xi)-\xi\cdot\mathcal{A}_0(i\xi)\xi)+ \\ +\xi\cdot\widehat{\mathcal{A}_0}(i\xi)\xi,\quad |\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2, \qquad (2.1)$$

$\widehat{\mathcal{A}}_0$ – транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы $\mathcal{A}_0$, $\widehat{L}_{km}$ – элементы транспонированной матрицы алгебраических дополнений матрицы $\mathcal{L}$,

$$(FL)^{-1}\widetilde{u}=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int\limits_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi}d\xi\int\limits_{\mathrm{Re}\,s=a>0}e^{st}\widetilde{u}(\xi,s)ds\equiv u(x,t). \qquad (2.2)$$

Из положительной определенности матрицы $\mathcal{A}_0(i\xi)$ следует, что при любом вещественном $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ корни полинома L по переменной ξ удовлетворяют условию

$$\mathrm{Re}\,s_k\leqslant-\delta|\xi|^2,$$

а сам полином подчиняется неравенству

$$|L(i\xi,s)|\geqslant c|\xi|^2(|s|+|\xi|^2)^2 \qquad (2.3)$$

при любых $\xi\in\mathbb{R}^3$ и любых $s\in\mathbb{C}$, таких, что

$$\mathrm{Re}\,s+\varkappa|\mathrm{Im}\,s|\geqslant-\delta_1|\xi|^2 \qquad (2.4)$$

$(0<\varkappa\ll 1,\ \delta_1\in(0,\delta))$. Более того, такое же неравенство справедливо для $L(i\zeta,s)$, где $\zeta_j=\xi_j+i\eta_j$, $j=1,2,3$ и

$$|\eta|\leqslant\delta_2|\xi| \qquad (2.5)$$

при некотором малом $\delta_2>0$.

Нетрудно подсчитать, что

$$\widetilde{T}_{km}(\xi,s)=\frac{\widehat{L}_{km}(i\xi,s)}{L(i\xi,s)}= \\ =\frac{s(|\xi|^2\delta_{km}-\xi_k\xi_m)+\widehat{L}_{km}(i\xi,0)}{L(i\xi,s)},\quad k,m,=1,2,3, \qquad (2.6)$$

$$\widehat{T}_{4m}(\xi,s) = -\frac{i\xi_m s^2}{L(i\xi,s)} + \frac{s(\mathcal{A}_0^T(i\xi)i\xi - i\xi \mathrm{Sp}\mathcal{A}_0(i\xi)))_m + \widehat{L}_{4m}(i\xi,0)}{L(i\xi,s)} = \\ = -\frac{i\xi_m}{|\xi|^2} + \widetilde{T}'_{4m}(i\xi,s), \quad (2.7)$$

$$\widetilde{T}'_{4m}(\xi,s) = \frac{i\xi_m}{|\xi|^2}\frac{s(|\xi|^2\mathrm{Sp}\mathcal{A}_0(i\xi) - \xi\cdot\mathcal{A}_0(i\xi)\xi) + \xi\cdot\widehat{\mathcal{A}}_0(i\xi)\xi}{L(i\xi,s)} + \\ + \frac{s(\mathcal{A}_0^T(i\xi)i\xi - i\xi\mathrm{Sp}\mathcal{A}_0(i\xi))_m + \widehat{L}_{4m}(i\xi,0)}{L(i\xi,s)}, \quad m = 1,2,3, \quad (2.8)$$

причем $\widehat{L}_{km}(i\xi,0)$, $\widehat{L}_{4m}(i\xi,0)$, $\xi\cdot\widehat{\mathcal{A}}_0(i\xi)\xi$ являются однородными полиномами четвертого, пятого и шестого порядков, соответственно. В частности,

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}_{11}(i\xi,0) = a_{22}(i\xi)\xi_3^2 + a_{33}(i\xi)\xi_2^2 - (a_{32}(i\xi) + a_{23}(i\xi))\xi_2\xi_3,\\
&\widehat{L}_{22}(i\xi,0) = a_{11}\xi_3^2 + a_{33}\xi_1^2 - (a_{13} + a_{31})\xi_1\xi_3,\\
&\widehat{L}_{33}(i\xi,0) = a_{11}\xi_2^2 + a_{22}\xi_1^2 - (a_{12} + a_{21})\xi_1\xi_2,\\
&\widehat{L}_{12}(i\xi,0) = -a_{12}\xi_3^2 - a_{33}\xi_1\xi_2 + a_{13}\xi_2\xi_3 + a_{32}\xi_1\xi_3,\\
&\widehat{L}_{21}(i\xi,0) = -a_{21}\xi_3^2 - a_{33}\xi_1\xi_2 + a_{31}\xi_2\xi_3 + a_{23}\xi_1\xi_3,\\
&\widehat{L}_{13}(i\xi,0) = a_{12}\xi_2\xi_3 - a_{22}\xi_1\xi_2 + a_{23}\xi_1\xi_2 - a_{13}\xi_2^2,\\
&\widehat{L}_{31}(i\xi,0) = a_{21}\xi_2\xi_3 - a_{22}\xi_1\xi_3 + a_{32}\xi_1\xi_2 - a_{31}\xi_2^2,\\
&\widehat{L}_{23}(i\xi,0) = -a_{11}\xi_2\xi_3 + a_{21}\xi_1\xi_3 + a_{13}\xi_1\xi_2 - a_{23}\xi_1^2,\\
&\widehat{L}_{32}(i\xi,0) = -a_{11}\xi_2\xi_3 + a_{12}\xi_1\xi_3 + a_{31}\xi_1\xi_2 - a_{32}\xi_1^2.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Следующее предложение позволяет получить поточечные оценки функций $T_{km}(x,t)$ и $T'_{4m}(x,t)$ (ср. [6], лемма 3.2).

Предложение 2.1. *Пусть $\widetilde{K}(\zeta,s)$ – функция, определенная для всех комплексных $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1,\dots,n$ и s, таких, что*

$$\mathrm{Re}\, s + \varkappa|\mathrm{Im}\, s| \geqslant -\delta_1|\xi|^2, \quad |\eta| \leqslant \delta_2|\xi|, \quad \xi \neq 0 \quad (2.10)$$

($\varkappa, \delta_1, \delta_2 > 0$), аналитическая в области (2.10), удовлетворяющая неравенству

$$|\widetilde{K}(\zeta,s)| \leqslant \frac{c|\xi|^m}{(|s| + |\xi|^2)^{q/2}}, \quad (2.11)$$

где q, m – целые числа, $q > 0$, $m > -n$, и однородная: $\widetilde{K}(\lambda\zeta, \lambda^2 s) = \lambda^{m-q}\widetilde{K}(\zeta, s)$, $\forall\lambda > 0$. Тогда для её прообраза

$$K(x,t) = (FL)^{-1}\widetilde{K} = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}d\xi \int\limits_{\operatorname{Re}s=a>0} e^{st}\widetilde{K}(\xi,s)ds \quad (2.12)$$

справедливы неравенства

$$|D_x^j K(x,t)| \leqslant \frac{ct^{q/2-1}}{(|x|^2+t)^{\frac{m+n+|j|}{2}}}, \quad t > 0, \quad (2.13)$$

$$|D_t^k D_x^j K(x,t)| \leqslant \frac{ct^{q/2-1-k}}{(|x|^2+t)^{\frac{m+n+|j|}{2}}}, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

и $K(x,t) = 0$ при $t < 0$.

Доказательство. Пусть $t > 0$. При всех $q > 0$ внутренний интеграл в (2.12) сходится во всяком случае как несобственный, поскольку, рассуждая, как при доказательстве леммы Жордана (см. [7]), можно заменить контур интегрирования по s, а именно, прямую линию $\operatorname{Re}s = a > 0$, на $l(a) = \{\operatorname{Re}s + \varkappa|\operatorname{Im}s| = a\}$, причем число $a > 0$ может быть произвольным, так как параллельный сдвиг контура $l(a)$ (замена его на $l(a_1)$, $a_1 > 0$) не меняет значения интеграла. Введя затем новую переменную $s' = s + \delta_3|\xi|^2$, $\delta_3 \in (0, \delta_1)$, и продифференцировав обе части (2.12) по x, получим

$$D_x^j K(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(i\xi)^j e^{-\delta_3|\xi|^2 t}d\xi \int\limits_{l(a)} e^{st}\widetilde{K}_1(\xi,s)ds =$$
$$= \frac{t^{-M}}{(2\pi)^{n+1}i}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\xi-\delta_3|\xi|^2}(i\xi)^j d\xi \int\limits_{l(a)} e^s\widetilde{K}_1(\xi,s)ds, \quad (2.15)$$

где $(i\xi)^j = (i\xi_1)^{j_1}\dots(i\xi_n)^{j_n}$, $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$, $M = \frac{m+n+|j|}{2} + 1 - \frac{q}{2}$, $\widetilde{K}_1(\xi,s) = \widetilde{K}(s - \delta_3|\xi|^2, \xi)$ – функция, обладающая такими же свойствами, что и $\widetilde{K}(\xi,s)$.

Введем теперь новые переменные интегрирования $\xi' = \mathcal{C}^{-1}\xi$, где $\mathcal{C}(y)$ – ортогональная матрица, выбранная с таким расчетом, что

$$\mathcal{C}^{-1}y = \frac{|y|}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)$$

(т.е. $\mathcal{C}^{-1}$ переводит вектор $\frac{y}{|y|} = \left(\frac{y_1}{|y|}, \dots, \frac{y_n}{|y|}\right)$ в $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e$). Тогда

$$D_x^j K(x,t) = \\ = \frac{t^{-M}}{(2\pi)^{n+1} i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\mathcal{C}\xi)^j e^{i|y|(\xi\cdot e) - \delta_3|\xi|^2} d\xi \int\limits_{l(a)} \widetilde{K}_1(\mathcal{C}\xi, s) e^s\, ds. \quad (2.16)$$

Наконец, пользуясь еще раз теоремой Коши и свойствами аналитичности функции $\widetilde{K}_1$, мы заменим контур интегрирования по ξ_j (т.е. вещественную ось) на контур $\zeta_j = \xi_j + i|\xi_j|\delta_2 \subset \mathbb{C}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$, после чего формула (2.16) может быть записана в виде

$$D_x^j K(x,t) = \frac{t^{-M}}{(2\pi)^{n+1} i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\mathcal{C}\zeta)^j e^{-\delta_2|y|\sum_{j=1}^n \frac{|\xi_j|}{\sqrt{n}} - \delta_3\langle\zeta\rangle^2} e^{iy\cdot\xi} f(\xi) d\xi \times \\ \times \int\limits_{l(a)} \widehat{K}'(\mathcal{C}\zeta, s) e^s\, ds,$$

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $\langle\zeta\rangle^2 = \sum_{j=1}^n \zeta_j^2$, $\zeta_j = \xi_j + \delta_2 i|\xi_j|$, $f(\xi) = \prod_{j=1}^n (1 + i\delta_2 \mathrm{sign}\xi_j)$. Теперь мы можем оценить функцию $D_x^j K(x,t)$, пользуясь неравенствами (2.11),

$$e^{-\delta_2|y|\sum_{j=1}^n \frac{|\xi_j|}{\sqrt{n}} - \delta_3\langle\zeta\rangle^2} \leqslant e^{-\delta_2|y||\xi|/\sqrt{n} - \delta_3(1-\delta_2^2)|\xi|^2} \leqslant c e^{-|\xi|\frac{\delta_2}{\sqrt{n}}(|y|+1)}$$

и тем, что $|e^s| = e^{a - \varkappa|\operatorname{Im} s|}$ при $s \in l(a)$. Мы получаем

$$|D_x^j K(x,t)| \leqslant c t^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{|j|+m} e^{-|\xi|\frac{\delta_2}{\sqrt{n}}(|y|+1)} d\xi \times \\ \times \int\limits_0^\infty e^{-\varkappa r} \frac{dr}{(a + r + |\xi|^2)^{q/2}} \leqslant \frac{c t^{-M}}{(|y|+1)^{|j|+m+n}} \leqslant \frac{c t^{\frac{q}{2}-1}}{(|x|^2 + t)^{\frac{m+n+|j|}{2}}},$$

и (2.13) доказано.

Чтобы получить (2.14), продифференцируем по t формулу (2.15), помня, что $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Это дает

$$D_x^j D_t K(x,t) = \frac{t^{-M-1}}{(2\pi)^{n+1} i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-M - \frac{1}{2} iy\cdot\xi\right) (i\xi)^j e^{iy\cdot\xi - \delta_3\xi^2} d\xi \times \\ \times \int\limits_{l(a)} \widehat{K}'(\xi, s) e^s\, ds$$

и

$$D_x^j D_t^k K(x,\xi) = \frac{t^{-M-k}}{(2\pi)^{n+1} i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_k(iy\cdot\xi)(i\xi)^j e^{iy\cdot\xi - \delta_3|\xi|^2} d\xi \int\limits_{l(a)} \widehat{K}'(\xi,s)e^s ds,$$

где $Q_k(z)$ – полином степени k. Рассуждая, как и выше, придем к оценке

$$|D_x^j D_t K(x,\xi)| \leqslant ct^{-M-k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|y|\cdot|\xi|)^k |\xi|^{|j|+m} e^{-|\xi|\frac{\delta_2}{\sqrt{n}}(|y|+1)} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ct^{-M-k}}{(|y|+1)^{|j|+m+n}},$$

которая влечет за собой (2.14). Наконец, при $t<0$

$$K(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1} i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} d\xi \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\substack{|s|=R\\ \operatorname{Re} s > a}} e^{st}\widehat{K}(\xi,s) ds = 0.$$

Предложение доказано. □

В частности, из предложения 2.1 следует, что

$$|D_x^j T_{km}(x,t)| \leqslant \frac{c}{(|x|^2+t)^{\frac{3+|j|}{2}}} \tag{2.17}$$

$$|D_t D_x^j T_{km}(x,t)| \leqslant \frac{c}{t(|x|^2+t)^{\frac{3+|j|}{2}}}, \quad k,m=1,2,3,\ t>0, \tag{2.18}$$

$$|D_x^j \widetilde{T}_{4m}(x,t)| \leqslant \frac{c}{(|x|^2+t)^{\frac{4+|j|}{2}}}, \tag{2.19}$$

$$|D_t D_x^j \widetilde{T}_{4m}(x,t)| \leqslant \frac{c}{t(|x|^2+t)^{\frac{4+|j|}{2}}},\ m=1,2,3,\ t>0, \tag{2.20}$$

а если $t<0$, то

$$T_{km}(x,t)=0, \quad T'_{4m}(x,t)=0.$$

Приведем теперь некоторые полезные свойства гёльдеровских норм.

1. Пусть $\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}=\mathbb{R}^n_+=\{x_n>0\}$ и пусть

$$\Delta_j^m(h)u(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k u(x_1,\dots,x_j+h,\dots,x_n)$$

– m-ая конечная разность функции $u(x)$ по переменной x_j с шагом h. На множестве функций $C^l(\mathbb{R})$ полунормы

$$\sup_{h>0} h^{-l+k} \sup_{\mathbb{R}} \left| \Delta_j^q(h) \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_j^k} \right|$$

с различными q и k, удовлетворяющими условию $q > l - k > 0$, эквивалентны друг другу. Кроме того, полунорме $[u]_{\mathbb{R}}^{(l)}$ эквивалентна полунорма

$$\sum_{j=1}^{n} \sup_{h>0} h^{-l} \sup_{\mathbb{R}} |\Delta_j^q(h) u(x)|, \quad q > l.$$

2. Полунорме $[u]_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}^{(l,l/2)}$, $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, эквивалентны полунормы

$$\sum_{j=1}^{n} \sup_{h>0} h^{-l} \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} |\Delta_j^q(h) u(x,t)| + \sup_{h>0} h^{-\frac{l}{2}} \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\Delta_t^{q_0}(h) u(x,t)|,$$

где $q_0 > l/2$ и $\Delta_t^{q_0}(h)u$ – q_0-ая конечная разность функции $u(x,t)$ по t, а также

$$\sum_{0\leqslant 2k+|j|<l} [D_t^k D_x^j u]_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}^{(l-2k-|j|, \frac{l-2k-|j|}{2})}$$

(последнее справедливо и для функций, определенных при $t \in (0,T)$).

3. Если $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\mathbb{R}\times(0,T))$, $\alpha\in(0,1)$, то

$$\sup_{\mathbb{R}} [\nabla u(x,\cdot)]_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \sum_{|j|=2} \sup_{\mathbb{R}} [D^j u(x,\cdot)]_{(0,T)}^{(\frac{\alpha}{2})} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\sup_{t<T} [u_t(\cdot,t)]_{\mathbb{R}}^{(\alpha)} + \sup_{t<T} [u(\cdot,t)]_{\mathbb{R}}^{(2+\alpha)} \right). \tag{2.21}$$

Доказательства приведенных утверждений можно найти в [8, 9, 3, 10, 6].

4. Всякое векторное поле $\vec{f} \in C^\alpha(\mathbb{R}_+^3)$, убывающее при $|x|\to\infty$ как степенная функция, может быть представлено в виде

$$\vec{f}(x) = \nabla\varphi(x) + \vec{f}'(x) \equiv P_G\vec{f} + P_J\vec{f}, \tag{2.22}$$

где $\vec{f}'$ обладает свойствами $\nabla\cdot\vec{f}'=0$, $f_3'\big|_{x_3=0}=0$ (разложение Вейля). Векторные поля $P_G\vec{f}$ и $P_J\vec{f}$ определяются формулами

$$P_G\vec{f}(x)=-\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\nabla_y N(x,y)\cdot\vec{f}(y)dy,$$
$$P_J\vec{f}(x)=\vec{f}(x)+\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\nabla_y N(x,y)\cdot\vec{f}(y)dy, \tag{2.23}$$

где $N(x,y)=E(x-y)+E(x-y^*)$, $y^*=(y_1,y_2,-y_3)$ – функция Грина для задачи Неймана в $\mathbb{R}^3_+$, $E(x)=-\frac{1}{4\pi|x|}$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа (заметим, что дифференцирование интеграла в (2.23) позволяет выразить $P_G\vec{f}$ и $P_J\vec{f}$ через сингулярные интегралы, имеющие смысл для $\vec{f}(y)$, убывающих на бесконечности как любая степенная функция $|x|^{-\beta}$, $\beta>0$). Справедлива оценка

$$[P_G\vec{f}]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[P_J\vec{f}]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant c[\vec{f}]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}, \tag{2.24}$$

но аналогичное неравенство для норм $[\cdot]^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}$ не имеет места. Применение операторов P_G, P_J к векторному полю $\vec{f}\in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^3_+\times(0,T))$ ведет к потере гладкости по t. Например, если $\operatorname{supp}\vec{f}\in\{|x|<R\}$, то из соотношения

$$V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial}{\partial x_k}\nabla_y N(x,y)\cdot\Delta_t(h)\vec{f}(y,t)dy=$$

$$=\int\limits_{K(x,h)}\frac{\partial}{\partial x_k}\nabla_y N(x,y)(\Delta_t(h)\vec{f}(y,t)-\Delta_t(h)\vec{f}(x,t))dy+$$

$$+\int\limits_{\partial K(x,h)}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x_k}\,\vec{n}(y)\,dS\cdot\Delta_t(h)\vec{f}(x,t)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3_+\setminus K(x,h)}\frac{\partial}{\partial x_k}\nabla N(x,y)\cdot\Delta_t(h)\vec{f}(y,t)dy,$$

где $K(x,h)=\{y\in\mathbb{R}^3_+ : |y-x|<h^2\}$, $\Delta_t(h)\vec{f}(x,t)=\vec{f}(x,t+h)-\vec{f}(x,t)$, и равномерной ограниченности интеграла по $\partial K(x,h)$ следует

$$|\Delta_t(h)P_J\vec{f}(x,t)|\leqslant c[\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}(1+|\ln R|+|\ln h|)h^{\alpha/2}. \qquad (2.25)$$

Наконец, приведем несколько вспомогательных предложений, касающихся оценки различных операторов свертки. Рассмотрим потенциал

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x-y,t-\tau)f(y,\tau)dy\,d\tau,$$

предполагая, что ядро $K(x,t)$ локально интегрируемо, а функция $f(y,\tau)$ ограничена и убывает на бесконечности (если это необходимо для сходимости интеграла).

Предложение 2.2. *Если $K(x,t)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\begin{aligned}&|D^j_xK(x,t)|\leqslant\frac{c}{(|x|^2+t)^{\frac{n+1+|j|}{2}}}\quad |j|=0,1,2,\\&|D_tK(x,t)|\leqslant\frac{c}{t(|x|^2+t|^{\frac{n+1}{2}}},\quad \forall t>0\end{aligned} \qquad (2.26)$$

и $f(x,0)=0$, то

$$[u]^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^n\times(0,T)}\leqslant c[f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^n\times(0,T)},\quad \alpha\in(0,1). \qquad (2.27)$$

Если же, кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x,t)dx=0,\quad \forall t>0, \qquad (2.28)$$

то

$$[u]^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^n\times(0,T)}\leqslant c\sup_{t<T}[f(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n} \qquad (2.29)$$

(при этом условие $f(x,0)=0$ не является необходимым).

Доказательство. Мы докажем неравенство (2.27) с помощью приема, предложенного К. К. Головкиным [11]. Заметим, что из оценок (2.26) следует

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta^2_j(h)K(x,t)|dx\,dt\leqslant ch, \qquad (2.30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_t(h)K(x,t)|dx\,dt \leqslant ch^{1/2}, \tag{2.31}$$

где $K(x,t) = 0$ при $t < 0$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_t(h)K(x,t)|dx\,dt \leqslant \int_{-h}^{h}\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,t+h)|dx\,dt + \int_{0}^{h}\int_{\mathbb{R}^n} |K(x,t)|dx\,dt +$$

$$+\int_0^h d\eta \int_h^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |K_t(x,t+\eta)|dx\,dt \leqslant c\left(\int_0^{2h}\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^h \frac{d\eta}{\sqrt{h+\eta}}\right) \leqslant c\sqrt{h},$$

и (2.30) устанавливается аналогичными рассуждениями. С помощью (2.30) и очевидного равенства

$$\Delta_j^3(h)u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_j^2(h)K(x-y,t-\tau)\Delta_j(h)f(y,\tau)dy\,d\tau,$$

где $\Delta_j(h)f(y,\tau) \equiv \Delta_j^1(h)f(y,\tau)$, получаем

$$|\Delta_j^3(h)u(x,t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n\times(0,t)} |\Delta_j(h)f(y,\tau)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_j^2(h)K(x-y,t-\tau)|dy\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant ch \sup_{\mathbb{R}^n\times(0,t)} |\Delta_j(h)f(y,\tau)|,$$

а значит,

$$\sup_{h>0} h^{-1-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^n\times(0,T)} |\Delta_j^2(h)u(x,t)| \leqslant c\sup_{h>0} h^{-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^n\times(0,T)} |\Delta_j(h)f(x,t)|. \tag{2.32}$$

Суммирование (2.32) по всем $j = 1,\dots,n$ приводит к неравенству, равносильному оценке

$$\sup_{t<T}[u(\cdot,t)]_{\mathbb{R}^n}^{(1+\alpha)} \leqslant c\sup_{t<T}[f(\cdot,t)]_{\mathbb{R}^n}^{(\alpha)}. \tag{2.33}$$

Чтобы доказать оценку

$$\sup_{\mathbb{R}^n}[u(x,\cdot)]_{(0,T)}^{(\frac{\alpha+1}{2})} \leqslant c\sup_{\mathbb{R}^n}[f(x,\cdot)]_{(0,T)}^{(\frac{\alpha}{2})}, \tag{2.34}$$

отметим, что при $t < T$

$$u(x,t) = u_T(x,t) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t-\tau) f_T(x,\tau) dy\, d\tau,$$

где $K(x,t) = 0$ при $t < 0$, $f_T(x,t) = f(x,t)$ при $t \in (0,T)$, $f_T(x,t) = 0$ при $t < 0$, $f_T(x,t) = f(x, 2T-t)$ при $t > T$. Рассуждая, как выше, легко показать с помощью (2.31), что

$$\sup_{\mathbb{R}^n} [u_T(x,\cdot)]_{\mathbb{R}}^{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} \leqslant c \sup_{\mathbb{R}^n} [f_T(x,\cdot)]_{\mathbb{R}}^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \leqslant c \sup_{\mathbb{R}^n} [f(x,\cdot)]_{(0,T)}^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

откуда следует (2.34). Оценка (2.27) есть следствие (2.34) и (2.33).

При условии (2.28) разность $u(x,t-h) - u(x,t)$ может быть оценена следующим образом. Мы записываем функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t-\tau)(f(y,\tau) - f(x,\tau)) dy,$$

откуда следует (при $h \in (0,t)$)

$$u(x,t-h) - u(x,t) = \int\limits_{m(t,h)}^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t-h-\tau)(f(y,\tau) - f(x,\tau)) dy -$$

$$- \int\limits_{m(t,h)}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t-\tau)(f(y,\tau) - f(x,\tau)) dy -$$

$$- \int\limits_0^h d\eta \int\limits_0^{m(t,h)} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y,t-\eta-\tau)(f(y,\tau) - f(x,\tau)) dy \qquad (2.35)$$

где $m(t,h) = \max(0, t-2h)$. В силу (2.25) и (2.26),

$$|u(x,t-h) - u(x,t)| \leqslant c \sup_{\tau < t} [f(\cdot,\tau)]_{\mathbb{R}^n}^{(\alpha)} \Bigg(\int\limits_{m(t,h)}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1-\alpha}{2}}} +$$

$$+\int_0^h \frac{d\eta}{(2h-\eta)^{1/2-\alpha/2}}\Big) \leqslant ch^{\frac{1+\alpha}{2}} \sup_{\tau<t}[f(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n}, \tag{2.36}$$

что вместе с (2.33) влечет за собой (2.29). Предложение доказано. $\square$

Замечание 1. Неравенствам (2.26) удовлетворяет ядро $K(x,t) = \Gamma(x,0,t)$, где

$$\Gamma(x,x_{n+1},t) = (4\pi t)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^{n+1}$, и в этом случае (2.27) совпадает с известной оценкой теплового потенциала простого слоя (см. [9]).

Замечание 2. Неравенство (2.30) справедливо также, если

$$|D^j_x K(x,t)| \leqslant \frac{c}{\sqrt{t}(|x|^2+t)^{\frac{n+|j|}{2}}}. \tag{2.37}$$

Действительно,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^2_j(h)K(x,t)|dx\,dt \leqslant \int_0^{h^2} dt \int_{|x|\leqslant 4h} |\Delta^2_j(h)K(x,t)|dx+$$

$$+\int_0^{h^2} dt \int_{|x|\geqslant 4h} |\Delta^2_j(h)K(x,t)dx + \int_{h^2}^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta^2_j(h)K(x,t)|dx.$$

В первом интеграле правой части мы оцениваем каждое слагаемое второй разности $\Delta^2_j(h)K(x,t)$ по модулю и используем неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{t}(|x|^2+t)^{\frac{n}{2}}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1+\varepsilon}{2}}(|x|^2+t)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}}, \quad \varepsilon\in(0,1),$$

а в других двух интегралах мы выражаем вторую разность через $\frac{\partial^2 K}{\partial x_j^2}$ по формуле

$$\Delta^2_j(h)K(x,t) = \int_0^h d\eta_1 \int_0^h \frac{\partial^2 K(x+e_j(\eta_1+\eta_2),t)}{\partial x_j^2}\,d\eta_2,$$

$e_j = (\delta_{ij})_{i=1,\dots,n}$. Это приводит к

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta_j^2(h)K(x,t)|dx\,dt \leqslant c\Big(\int\limits_0^{h^2} \frac{dt}{t^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \int\limits_{|x|\leqslant 6h} \frac{dx}{|x|^{n-\varepsilon}} +$$

$$+h^2 \int\limits_0^{h^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int\limits_{|x|\geqslant 2h} \frac{dx}{|x|^{n+2}} + h^2 \int\limits_{h^2}^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(|x|^2+t)^{\frac{n+2}{2}}}\Big) \leqslant ch.$$

Таким образом, оценка (2.33) справедлива для потенциалов, ядра которых удовлетворяют неравенствам (2.37).

Предложение 2.3. *Пусть ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условию* (2.28) *и неравенствам*

$$|D_t^k K(x,t)| \leqslant \frac{c}{t^{k+1/2}(|x|^2+t)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad k=0,1, \quad t>0. \tag{2.38}$$

Тогда для функции

$$u_1(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t-\tau)(f(y,\tau)-f(x,\tau))dy\,d\tau$$

справедлива оценка

$$\sup_{\mathbb{R}^n}[u_1(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant c\sup_{t<T}[f(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n}. \tag{2.39}$$

Доказательство. Для разности $u_1(x,t-h)-u_1(x,t)$ справедлива формула (2.35). Повторяя выкладку (2.36), получаем

$$|u_1(x,t-h)-u_1(x,t)| \leqslant c\sup_{\tau<t}[f(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{m(t,h)}^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha/2}} +$$

$$+\int\limits_0^h \frac{d\eta}{(2h-\eta)^{1-\alpha/2}}\Big) \leqslant ch^{\alpha/2}\sup_{\tau<t}[f(\cdot,\tau)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n},$$

а это неравенство влечет за собой (2.39).

Приведем еще оценку интеграла

$$v(x,t) = V.p.\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y,t)dy \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y,t)dy,$$

где $K(x)$ – сингулярное ядро ($K(\lambda x)=\lambda^{-n}K(x)$, $\int_{|x|=1}K(x)dS=0$, $K(x)\big|_{|x|=1}$ – гладкая функция).

Предложение 2.4. *Если $f(x,t) = \nabla\cdot\vec{F}(x,t)$, причем f и $\vec{F} = (F_1,\dots,F_n)$ убывают при $|x|\to\infty$ как степенные функции, то*

$$\sup_{\mathbb{R}^n}[v(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant c\left(\sup_{t<T}[f(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n} + |\vec{F}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^n\times(0,T)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{t<T}[f(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n} + [\vec{F}]^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^n\times(0,T)}\right),$$

где $\gamma\in(0,1)$ и

$$|\vec{F}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^n\times(0,T)} =$$

$$= \sup_{t,t'\in(0,T)}\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n}|t-t'|^{-\frac{1+\alpha-\gamma}{2}}|x-y|^{-\gamma}|\vec{F}(x,t)-\vec{F}(y,t)-\vec{F}(x,t')+\vec{F}(y,t')|.$$

Аналогичное неравенство справедливо для сингулярных интегралов в полупространстве. Следующее предложение доказано в [4] (лемма 8).

Предложение 2.5. *Если $f=\nabla\cdot\vec{F}$, то функция*

$$v_k(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+}\frac{\partial N(x,y)}{\partial y_k}f(y,t)dt$$

подчиняется неравенству

$$\sup_{\mathbb{R}^3_n}[\nabla v_k(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant c\left([f]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_n\times(0,T)} + |\vec{F}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left([f_1]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_n\times(0,T)} + |\vec{F}|^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}\right).$$

Предложение 2.4 доказывается точно так же, как лемма 8 в [4], лемма 7 в [3].

§3. Начально-краевая задача для однородной системы

3.1. Построение решения. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\vec{v}_t + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0, \quad x_3 > 0, \quad t > 0,\\ \vec{v}\big|_{t=0} = 0, \quad \vec{v}\big|_{x_3=0} = \vec{b}(x',t), \quad x' = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\end{gathered} \tag{3.1}$$

считая, что $\vec{b}(x',t)$ – гладкое убывающее на бесконечности векторное поле, удовлетворяющее условиям

$$\vec{b}(x',0) = \vec{b}_t(x',0) = 0.$$

С помощью преобразования Фурье–Лапласа

$$\widehat{u}(\xi,s) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ix'\cdot\xi'}dx'\int\limits_0^\infty e^{-st}u(x',t)dt \equiv F'Lu, \quad \xi'\in\mathbb{R}^2,$$

эта задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую мы будем рассматривать и при комплекснозначных ξ_j, $j=1,2$ (обозначаемых через $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$). Эта система имеет вид

$$s\vec{v} + \mathcal{A}_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_3}\right)\widehat{\vec{v}} + \widehat{\nabla}\widehat{p} = 0, \quad \widehat{\nabla}\cdot\widehat{\vec{v}} = 0, \quad x_3 > 0, \tag{3.2}$$

$$\widehat{\vec{v}} \to 0, \quad \widehat{p}\to 0 \quad (x_3\to+\infty), \tag{3.3}$$

$$\widehat{\vec{v}}\big|_{x_3=0} = \widehat{\vec{b}} \tag{3.4}$$

где $\widehat{\nabla} = \left(i\zeta_1, i\zeta_2, \frac{d}{dx_3}\right)$, $\widehat{\nabla}\cdot\widehat{\vec{v}} = i\zeta_1\widehat{v}_1 + i\zeta_2\widehat{v}_2 + \frac{d\widehat{v}_3}{dx_3}$.

Докажем следующее предложение.

Предложение 3.1. *Если $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j=1,2$ и $s\in\mathbb{C}$ удовлетворяют условиям (2.10) с достаточно малыми $\varkappa$, δ_1, $\delta_2>0$, то задача (3.2)–(3.4) однозначно разрешима при любом $\widehat{\vec{b}}\in\mathbb{C}^3$.*

Доказательство. При любых ζ_1,ζ_2,s из области (2.10) полином $L(i\zeta,i\zeta_3,s)$ имеет 3 корня относительно ζ_3 с положительной и 3 с отрицательной мнимой частью. Если $\zeta=\xi'\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ и $s>0$, то это следует из (2.3) и из вещественности коэффициентов полинома $L(i\xi',i\zeta_3,s)$. При непрерывном изменении ζ_1, ζ_2 и s в пределах области (2.10) эти корни также будут изменяться непрерывно, но они не могут попасть на вещественную ось, т.к. это противоречило бы неравенству (2.3) с $\xi_j = \zeta_j$, $j = 1, 2$. Поэтому система (3.2) имеет три линейно независимых решения, удовлетворяющих условию (3.3), и три решения, стремящихся к нулю экспоненциально при $x_3 \to -\infty$, а однозначная разрешимость задачи (3.2)–(3.4) следует из единственности решения.

Пусть $\vec{v}^{(0)}(x_3)$, $p^{(0)}(x_3)$ – решение задачи (3.2)–(3.4) с $\widetilde{\vec{b}} = 0$. Легко видеть, что оно удовлетворяет соотношению

$$s\int\limits_0^\infty |\vec{v}^{\,(0)}(x_3)|^2 dx_3 + \int\limits_0^\infty \mathcal{A}_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_3}\right)\vec{v}^{\,(0)}\cdot\vec{v}^{\,(0)} dx_3 = 0$$

(здесь $\vec{f}\cdot\vec{g} = \sum_{k=1}^3 f_k\bar{g}_k$), а значит и

$$s\int\limits_{-\infty}^\infty |\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}(\xi_3)|^2 d\xi_3 + \int\limits_{-\infty}^\infty \mathcal{A}_0(i\zeta, i\xi_3)\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}\cdot\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)} d\xi_3 = 0,$$

где $\widetilde{\vec{v}}_0 = \int_0^\infty e^{-ix_3\xi_3}\vec{v}^{\,(0)}(x_3)dx_3$. В силу неравенств (1.4) и (2.5),

$$\operatorname{Re}\mathcal{A}_0(i\xi', i\xi_3)\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}\cdot\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)} \geqslant c_1(|\xi'|^2+\xi_3^2)|\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}|^2,$$

$$\operatorname{Re}\mathcal{A}_0(i\zeta, i\xi_3)\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}\cdot\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)} \geqslant (c_1 - c_3\delta_2)(|\xi'|^2+\xi_3^2)|\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}|^2,$$

а значит

$$(\operatorname{Re}s+\varkappa|\operatorname{Im}s|)\int\limits_{-\infty}^\infty |\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}|^2 d\xi_3 + (c_1 - c_3\delta_2 - c_4\varkappa)\int\limits_{-\infty}^\infty (|\xi'|^2+\xi_3^2)|\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}|^2 d\xi_3 \leqslant 0,$$

и, наконец,

$$(c_1 - c_3\delta_2 - c_4\varkappa)\int\limits_{-\infty}^\infty (|\xi'|^2+\xi_3^2)|\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}|^2 d\xi_3 - \delta_1|\xi'|^2\int\limits_{-\infty}^\infty |\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)}|^2 d\xi_3 \leqslant 0.$$

При достаточно малых δ_1, δ_2, $\varkappa$ из этого неравенства следует, что $\widetilde{\vec{v}}^{\,(0)} = 0$, а значит и $\vec{v}^{\,(0)} = 0$, $p^{(0)} = 0$. Предложение доказано. □

Аналогичное предложение справедливо для задачи

$$\begin{gathered} s\vec{\hat{v}} + \mathcal{A}_0\left(i\zeta, \frac{d}{dx_3}\right)\vec{\hat{v}} + \hat{\nabla}p = 0, \quad \hat{\nabla}\cdot\vec{\hat{v}} = 0, \quad x_3 < 0, \\ \vec{\hat{v}}(x_3) \to 0, \quad \hat{p}(x_3) \to 0 \quad (x_3 \to -\infty), \quad \vec{\hat{v}}\big|_{x_3=0} = \vec{\hat{b}}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Будем искать решение задачи (3.2)–(3.4) в виде

$$\begin{gathered} \hat{v}_k(x_3) = \sum_{m=1}^{3} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{L}_{km}(i\zeta, i\xi_3, s)}{L(i\zeta, i\xi_3, s)}\, e^{ix_3\xi_3} d\xi_3 \hat{h}_m, \quad k = 1,2,3 \\ \hat{p}(x_3) = \sum_{m=1}^{3} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{L}_{4m}(i\zeta, i\xi_3, s)}{L(i\zeta, i\xi_3, s)}\, e^{ix_3\xi_3} d\xi_3 \hat{h}_m, \end{gathered} \tag{3.6}$$

Краевое условие (3.4) приводит к алгебраической системе

$$U\vec{\hat{h}} = \vec{\hat{b}}, \tag{3.7}$$

где U – матрица третьего порядка с элементами

$$U_{km}(\zeta, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{L}_{km}(i\zeta, i\xi_3, s)}{L(i\zeta, i\xi_3, s)}\, d\xi_3, \quad k, m = 1,2,3.$$

Предложение 3.2. *При любых ζ, s, удовлетворяющих условиям* (2.10)*, система* (3.7) *однозначно разрешима, т.е.* $\det U \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\vec{h}^{(0)}$ – решение однородной системы (3.7). Тогда функции (3.6) с $\hat{h}_m = h_m^{(0)}$ являются решением однородной задачи (3.2)–(3.4) и обращаются в нуль при всех $x_3 > 0$. Отсюда следует

$$\sum_{m=1}^{3} h_m^{(0)} \int\limits_{\gamma_+} \frac{\hat{L}_{km}(i\zeta, iz_3, s)}{L(i\zeta, iz_3, s)}\,(iz_3)^j\, dz_3 = 0, \quad j = 0,1,\dots, \tag{3.8}$$

где γ_+ – контур, охватывающий все три корня полинома L с положительной мнимой частью. Рассмотрим те же функции (3.6) на полуоси $x_3 < 0$. Вследствие (3.8) (с $j = 0$), они являются решением однородной задачи (3.5), а значит, обращаются в нуль и при $x_3 < 0$, и справедливо соотношение (3.8), в котором интеграл берется по контуру γ_-, охватывающему все корни L с отрицательной мнимой частью. Складывая эти два равенства, получаем

$$\sum_{m=1}^{3} h_m^{(0)} \int\limits_{\gamma} \frac{\widehat{L}_{km}(i\zeta, iz_3, s)}{L(i\zeta, iz_3, s)} (iz_3)^j \, dz_3 = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \tag{3.9}$$

где γ – контур, охватывающий все корни полинома L. Отсюда следует, что при всех $z_3 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{m=1}^{3} h_m^{(0)} \widehat{L}_{km}(i\zeta, iz_3, s) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.10}$$

в чем легко убедиться, полагая в (3.9) $j = 1, 2, 3, 4$ и раздувая контур γ в бесконечность.

Приравнивая коэффициенты при старшей степени z_3 (z_3^4) в первых двух равенствах (3.10), получаем систему двух уравнений для $h_1^{(0)}$ и $h_2^{(0)}$, из которой следует $h_1^{(0)} = h_2^{(0)} = 0$ (в этом легко убедиться с помощью формул (2.9) для $\widehat{L}_{km}$). После этого, полагая в (3.10) $k = 3$, $z_3 = 0$, заключаем, что $h_3^{(0)} = 0$. Предложение доказано. $\square$

Следствие. *Если ζ_1, ζ_2, s удовлетворяют неравенствам* (2.10) *и, кроме того, $|\xi'| \geqslant \theta |s|^{1/2}$, $\theta > 0$, то*

$$\frac{c_4(\theta)|\xi'|}{(|s| + |\xi'|^2)^2} \leqslant |\det U(\zeta, s)| \leqslant \frac{c_5(\theta)|\xi'|}{(|s| + |\xi'|^2)^2}. \tag{3.11}$$

Действительно, из предложения 3.2 следует, что

$$c_5(\theta) \leqslant |\det U(\zeta, s)| \leqslant c_7(\theta) \tag{3.12}$$

для любых ζ, s, удовлетворяющих соотношениям (2.10), а также $|s| + |\xi'|^2 = 1$ и $|\xi'| \geqslant \theta |s|^{1/2}$. Так как $\det U(\lambda\zeta, \lambda^2 s) = \lambda^{-3} \det U(\zeta, s)$, то из (3.12) следует (3.11).

Докажем неравенство (3.11) при $|\xi'| \leqslant \theta |s|^{1/2}$ и выясним структуру элементов U^{km}, $k, m = 1, 2, 3$ матрицы U^{-1}.

Предложение 3.3. *Элементы $U^{km}(\xi', s)$ матрицы $U^{-1}(\xi', s)$ могут быть представлены в виде сумм*

$$\begin{aligned} &U^{km}(\xi', s) = u^{km}(\xi', s) + v^{km}(\xi', s), \quad k + m < 6, \\ &U^{33}(\xi', s) = \frac{1}{|\xi'|} \left(u^{33}(\xi', s) + v^{33}(\xi', s)\right), \end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned}
&u^{km}(\xi',s)=(\delta_{km}l+l_{km})r(\xi',s),\quad k,m=1,2,\\
&u^{13}=u^{23}=u^{31}=u^{32}=0,\\
&u^{33}=2r^2(\xi',s),
\end{aligned}\tag{3.14}$$

$r(\xi',s)=\sqrt{s+|\xi'|^2}$, $\arg r\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, *$l$, l_{km} – постоянные, выражающиеся через коэффициенты $\mathcal{A}_0$ и, наконец,*

$$v^{km}(\xi',s)=\sum_{\beta,\gamma=1}^{2}\frac{\xi_\gamma\xi_\beta}{|\xi'|}\,V^{km}_{\beta\gamma}(\xi',s),\tag{3.15}$$

причем $V^{km}_{\beta\gamma}$ определены и аналитичны в области (2.10), *однородны, т.е.*

$$\begin{aligned}
&V^{km}_{\beta\gamma}(\lambda\zeta,\lambda^2 s)=V^{km}_{\beta\gamma}(\zeta,s),\quad k+m<6,\\
&V^{33}_{\beta\gamma}(\lambda\zeta,\lambda^2 s)=\lambda V^{33}_{\beta\gamma}(\zeta,s)
\end{aligned}$$

и удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}
&|V^{km}_{\beta\gamma}(\zeta,s)|\leqslant c,\quad k+m<6,\\
&|V^{33}_{\beta\gamma}(\zeta,s)|\leqslant c(|s|+|\xi'|^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Шаг 1. Рассмотрим задачу (3.2)–(3.4) с матрицей $\mathcal{A}_0$ специального вида

$$\mathcal{A}_0(i\xi)\equiv\mathcal{A}^{(0)}(i\xi)=|\xi|^2\begin{pmatrix}a^0_{11}&a^0_{12}&0\\a^0_{21}&a^0_{22}&0\\0&0&a^0_{33}\end{pmatrix}\equiv|\xi|^2\mathcal{A}_1,$$

где a^0_{km} – коэффициенты при ξ_3^2 в полиномах $a_{km}(i\xi)$, т.е. $a^0_{km}=a_{km}(i\xi)\big|_{\xi'=0,\xi_3=1}$. В этом случае

$$\begin{aligned}
\det\mathcal{L}=L_0(i\xi,s)=|\xi|^2P_0(i\xi,s),&\\
P_0(i\xi,s)=s^2+s(|\xi|^2\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_1-\xi\cdot\mathcal{A}_1\xi)+|\xi|^2\xi\cdot\widehat{\mathcal{A}}_1\xi&
\end{aligned}\tag{3.16}$$

– полином, удовлетворяющий в области (2.10) неравенствам

$$c'(|s|+|\xi|^2)^2\leqslant|P_0(i\zeta,s)|\leqslant c''(|s|+|\xi|^2)^2.$$

Кроме того,

$$\widehat{L}^{(0)}_{km}(i\xi,0)=|\xi|^2\widehat{l}_{km}(i\xi),$$

где $\widehat{l}_{km}(i\xi)$ – однородные полиномы второй степени, определяемые равенствами

$$\widehat{l}_{11}(i\xi)=a^0_{22}\xi_3^2+a^0_{33}\xi_1^2,\quad \widehat{l}_{22}(i\xi)=a^0_{11}\xi_3^2+a^0_{33}\xi_1^2,$$

$$\widehat{l}_{33}(i\xi)=a^0_{11}\xi_2^2+a^0_{22}\xi_1^2-(a^0_{12}+a^0_{21})\xi_1\xi_2\equiv q(\xi'),$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{l}_{12}(i\xi)=-a^0_{12}\xi_3^2-a^0_{33}\xi_1\xi_2, && \widehat{l}_{21}(i\xi)=-a^0_{21}\xi_3^2-a^0_{33}\xi_1\xi_2,\\
&\widehat{l}_{13}(i\xi)=a^0_{12}\xi_2\xi_3-a^0_{22}\xi_1\xi_3, && \widehat{l}_{31}(i\xi)=a^0_{21}\xi_2\xi_3-a^0_{22}\xi_1\xi_3,\\
&\widehat{l}_{23}(i\xi)=-a^0_{11}\xi_2\xi_3+a^0_{21}\xi_1\xi_3, && \widehat{l}_{32}(i\xi)=-a^0_{11}\xi_2\xi_3+a^0_{12}\xi_1\xi_3,
\end{aligned}$$

Заметим, наконец, что L_0 и P_0 являются четными функциями ξ_3 и что

$$\begin{aligned}
L_0(i\xi,s)-L(i\xi,s)&=\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma(sQ^{(3)}_\gamma(\xi)+Q^{(5)}_\gamma(\xi)),\\
\widehat{L}^{(0)}_{km}(i\xi,0)-\widehat{L}_{km}(i\xi,0)&=\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma Q^{(3)}_{km,\gamma}(\xi),\quad k+m<6, \qquad (3.17)\\
\widehat{L}^{(0)}_{33}(i\xi,0)-\widehat{L}_{33}(i\xi,0)&=\sum_{\beta,\gamma,\lambda=1}^{2}i\xi_\beta i\xi_\gamma i\xi_\lambda Q^{(1)}_{\beta\gamma\lambda}(\xi),
\end{aligned}$$

где $Q^{(l)}_\gamma$, $Q^{(l)}_{km,\gamma}$, $Q^{(l)}_{\beta\gamma\lambda}$ – однородные полиномы степени l.

Рассмотрим теперь функции

$$U^{(0)}_{km}(\xi',s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s(|\xi|^2\delta_{km}-\xi_k\xi_m)+|\xi|^2\widehat{l}_{km}(i\xi)}{|\xi|^2P_0(i\xi,s)}\,d\xi_3,\quad k,m=1,2,3.$$

Легко видеть, что $U^{(0)}_{13}=U^{(0)}_{23}=U^{(0)}_{31}=U^{(0)}_{32}=0$. При $k,m=1,2$ можно написать различные представления типа (3.13) для $U^{(0)}_{km}$, например,

$$U^{(0)}_{km}(\xi',s)=u_{km}(\xi',s)+v_{km}(\xi',s),$$

где

$$u_{km}(\xi,s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s\delta_{km}+\widehat{a}^0_{km}|\xi|^2}{P_1(i\xi,s)}\,d\xi_3 \qquad (3.18)$$

$$\widehat{a}^0_{11} = a^0_{22}, \quad \widehat{a}^0_{22} = a^0_{11} \quad \widehat{a}^0_{12} = -a^0_{12} \quad \widehat{a}^0_{21} = -a^0_{21},$$

$$P_1(i\xi, s) = s^2 + s|\xi|^2(a^0_{11} + a^0_{22}) + |\xi|^4(a^0_{11}a^0_{22} - a^0_{12}a^0_{21}) = \\ = (s + \mu_1|\xi|^2)(s + \mu_2|\xi|^2)$$

где μ_i – корни квадратного уравнения

$$\mu^2 - (a^0_{11} + a^0_{22})\mu + (a^0_{11}a^0_{22} - a^0_{12}a^0_{21}) = 0$$

(легко видеть, что $\operatorname{Re}\mu_i > 0$).

Так как

$$\widehat{l}_{km}(i\xi) - \widehat{a}_{km}|\xi|^2 = q^{(2)}_{km}(\xi'), \quad k, m = 1, 2,$$

$$P_1(i\xi, s) - P_0(i\xi, s) = sq^{(2)}(\xi') + |\xi|^2 q^{(2)}_1(\xi')$$

где $q^{(2)}_{km}(\xi')$, $q^{(2)}(\xi')$, $q^{(2)}_1(\xi')$ – однородные полиномы второго порядка, то функции

$$v_{km}(\xi', s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\widehat{l}_{km}(i\xi)}{P_0(i\xi, s)} - \frac{\widehat{a}^{(0)}_{km}|\xi|^2}{P_1(i\xi, s)}\right)d\xi_3 - \\ - \frac{s\xi_k\xi_m}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_3}{|\xi|^2 P_0(i\xi, s)}$$

могут быть записаны в виде (3.15):

$$v_{km}(\xi', s) = \sum_{\gamma,\beta=1}^{2}\frac{\xi_\gamma\xi_\beta}{|\xi'|}V_{km,\gamma\beta}(\xi', s), \tag{3.19}$$

где $V_{km,\gamma\beta}$ – однородные функции степени -2:

$$V_{km,\gamma\beta}(\lambda\xi', \lambda^2 s) = \lambda^{-2}V_{km,\gamma\beta}(\xi', s).$$

Как v_{km}, так и $V_{km,\gamma\beta}$ определены в области (2.10), аналитичны и, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi'|d\xi_3}{|\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \xi_3^2||P_0(i\zeta, i\xi_3, s)|} \leqslant \\ \leqslant \sup_{\xi_3\in\mathbb{R}}|P_0(i\zeta, i\xi_3, s)|^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi'|d\xi_3}{(1-\delta_2^2)|\xi|^2} \leqslant c(|s| + |\xi'|^2)^{-2},$$

выполняется неравенство

$$|V_{km,\gamma\beta}(\zeta, s)| \leqslant c(|s| + |\xi'|^2)^{-1}.$$

Отметим, что интеграл в (3.18) может быть вычислен, и мы имеем

$$u_{km}(\xi', s) = \frac{s\delta_{km} + \widehat{a}^0_{km}|\xi'|^2}{2\mu_1\mu_2 p_1(\xi', s)p_2(p_1 + p_2)} + \frac{\widehat{a}^0_{km}}{2\mu_1\mu_2(p_1 + p_2)}, \qquad (3.20)$$

где

$$p_i(\xi', s) = \sqrt{s\mu_i^{-1} + |\xi'|^2}, \quad i = 1, 2.$$

Наконец,

$$U^{(0)}_{33}(\xi', s) = \frac{s|\xi'|^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_3}{|\xi|^2 P_0(i\xi, s)} + \frac{q(\xi')}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_3}{P_0(i\xi, s)} = |\xi'|(u_{33} + v_{33}),$$

где $q(\xi') = a^0_{22}\xi_1^2 + a^0_{11}\xi_2^2 - (a^0_{12} + a^0_{21})\xi_1\xi_2$,

$$u_{33}(\xi's) = \frac{1}{2(s + |\xi'|^2)},$$

$$v_{33}(\xi', s) = \frac{|\xi'|}{2\pi(s + |\xi'|^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(s + |\xi'|^2) - P_0(i\xi, s)}{|\xi|^2 P_0(i\xi, s)}\,d\xi_3 +$$

$$+\frac{q(\xi')}{2\pi|\xi'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_3}{P_0(i\xi, s)}.$$

Так как полином $s(s + |\xi'|^2) - P_0$ не содержит s^2, $v_{33}(\xi', s)$ имеет структуру (3.19), причем $V_{33,\gamma\beta}$ – однородные функции степени -3 и

$$|V_{33,\gamma\beta}(\zeta, s)| \leqslant c(|s| + |\xi'|^2)^{-3/2}. \qquad (3.21)$$

Рассмотрим теперь определитель

$$\det U^0(\xi', s) = D_0(\xi', s)U^{(0)}_{33}(\xi', s),$$

где

$$D_0(\xi', s) = \det\begin{pmatrix} U^{(0)}_{11} & U^{(0)}_{12} \\ U^{(0)}_{21} & U^{(0)}_{22}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22}\end{pmatrix}.$$

Легко вычислить определитель

$$D_0'(\xi,s)=\det\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}=\frac{1}{4\mu_1^2\mu_2^2p_1^2p_2^2(p_1+p_2)^2}\times$$

$$\times\det\begin{pmatrix}s+a_{22}^0(|\xi'|^2+p_1p_2) & -a_{12}^0(|\xi'|^2+p_1p_2)\\ -a_{21}^0(|\xi'|^2+p_1p_2) & s+a_{11}^0(|\xi'|^2+p_1p_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(s+\mu_1|\xi'|^2+p_1p_2))(s+\mu_2(|\xi'|^2+p_1p_2))}{4\mu_1^2\mu_2^2p_1^2p_2^2(p_1+p_2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4\mu_1\mu_2p_1(\xi',s)p_2(\xi',s)}. \tag{3.22}$$

В силу (3.19), для $D_0''=D_0-D_0'$ имеем представление

$$D_0''(\xi',s)=\sum_{\gamma,\beta=1}^{2}\frac{\xi_\beta\xi_\gamma}{|\xi'|}D_{\beta\gamma}(\xi',s), \tag{3.23}$$

причем $D_{\beta\gamma}$ – однородные функции степени -3, аналитические в области (2.10) и удовлетворяющие неравенству (3.21).

Из наших рассмотрений следует, что если $|\xi'|\leqslant\theta|s|^{1/2}$ и выполнены условия (2.10), то

$$c(|s|+|\xi'|^2)^{-1}\leqslant|D_0(\zeta,s)|\leqslant c(|s|+\xi|^2)^{-1},$$

$$c|\xi'|(|s|+|\xi'|^2)^{-1}\leqslant|U_{33}^{(0)}(\xi',s)|\leqslant c|\xi'|(s+|\xi'|^2)^{-1}$$

(причем оценки сверху справедливы для всех ζ,s из области (2.10)). В случае $|\xi'|\geqslant\theta|s|^{1/2}$, эти оценки вытекают из неравенства (3.11) для $\det U_0$ и из однородности D_0 и $U_{33}^{(0)}$.

Теперь можно получить формулы (3.13) для U_0^{km}. При $k,m=1,2$ имеем

$$U_0^{km}=\frac{\widehat{U}_{km}^{(0)}}{D_0}=\frac{\widehat{u}_{km}}{D_0'}+\frac{\widehat{v}_{km}}{D_0}-\frac{\widehat{u}_{km}D_0''}{D_0'D_0},$$

где $\widehat{U}_{km}^{(0)}=\widehat{u}_{km}+\widehat{v}_{km}$ – алгебраическое дополнение $U_{km}^{(0)}$ в матрице $(U_{km}^{(0)})_{k,m=1,2}$, т.е. $\widehat{U}_{11}^{(0)}=U_{22}^{(0)}$, $\widehat{U}_{22}^{(0)}=U_{11}^{(0)}$, $\widehat{U}_{12}^{(0)}=-U_{12}^{(0)}$, $\widehat{U}_{21}^{(0)}=-U_{21}^{(0)}$. В силу полученных выше явных формул (3.20) и (3.22),

$$\frac{\widehat{u}_{km}}{D_0'}=\frac{2(s\delta_{km}+a_{km}^0|\xi'|^2+a_{km}^0p_1p_2)}{p_1+p_2}=$$

$$= \frac{2(s\delta_{km} + a^0_{km}|\xi'|^2)\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{\mu_2}r_1(\xi,s) + \mu_1 r_2(\xi,s)} + \frac{2a^0_{km}r_1r_2}{\sqrt{\mu_2}r_1 + \sqrt{\mu_1}r_2},$$

где $r_i(\xi',s) = \sqrt{s + \mu_i|\xi'|^2}$, $i = 1,2$. Положим

$$u_0^{km} = \left(\frac{2\delta_{km}\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} + \frac{2a^0_{km}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\right) r(\xi',s) =$$

$$= \frac{2\delta_{km}\sqrt{a^0_{11}a^0_{22} - a^0_{12}a^0_{21}} + 2a^0_{km}}{\sqrt{a^0_{11} + a^0_{22} + 2\sqrt{a^0_{11}a^0_{22} - a^0_{12}a^0_{21}}}} r(\xi',s) \equiv (\delta_{km}l + l_{km})r, \qquad (3.24)$$

где $r = \sqrt{s + |\xi'|^2}$, и

$$v_0^{km} = \left(\frac{\widehat{u}_{km}}{D_0'} - u_0^{km}\right) + \frac{\widehat{v}_{km}}{D_0} - \frac{\widehat{u}_{km}D_0''}{D_0'D_0}. \qquad (3.25)$$

Учтя формулы (3.19), (3.23) и сделав несложный анализ разности $\widehat{u}_{km}/D_0' - u_0^{km}$, нетрудно убедиться в том, что v_0^{km} обладают свойствами, указанными в формулировке предложения. Далее мы имеем $U_0^{13} = U_0^{23} = U_0^{31} = U_0^{32} = 0$ и, наконец,

$$U_0^{33}(\xi',s) = \frac{1}{U_{33}^{(0)}(\xi',s)} = \frac{1}{|\xi'|}(u_0^{33} + v_0^{33}),$$

$$u_0^{33}(\xi',s) = 2(s + |\xi'|^2), \quad v_0^{33}(\xi',s) = -\frac{2(s+|\xi'|^2)v_{33}(\xi',s)}{u_{33}(\xi',s) + v_{33}(\xi',s)}.$$

Шаг 2. Анализ разностей $U_{km} - U_{km}^{(0)}$.

Для разностей $U_{km} - U_{km}^{(0)}$, $k + m < 6$, справедлива формула

$$U_{km} - U_{km}^{(0)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (s(|\xi|^2\delta_{km} - \xi_k\xi_m) + \widehat{L}_{km}(i\xi,0))\frac{L_0(i\xi,s) - L(i\xi,s)}{L_0^2(i\xi,s)}\,d\xi_3 +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{L}_{km}(i\xi,0) - \widehat{L}^{(0)}_{km}(i\xi,s)}{L_0(i\xi,s)}\,d\xi_3 + \qquad (3.26)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(|\xi|^2\delta_{km} - \xi_k\xi_m) + \widehat{L}_{km}(i\xi,0)}{L_0^2(i\xi,s)L(i\xi,s)}\,(L_0(i\xi,s) - L(i\xi,s))^2 d\xi_3,$$

и если $k=m=3$, то

$$U_{33}-U_{33}^{(0)}=\frac{s|\xi'|^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{L_0-L}{L_0^2}+\frac{(L-L_0)^2}{L_0^2L}\right)d\xi_3+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\widehat{L}_{33}(i\xi,0)-\widehat{L}_{33}^{(0)}(i\xi,0)}{L_0(i\xi,s)}+\widehat{L}_{33}(i\xi,0)\frac{L_0(i\xi,s)-L(i\xi,s)}{L_0(i\xi,s)L(i\xi,s)}\right)d\xi_3.$$

Используя соотношения (3.17) и свойство четности L_0 относительно ξ_3 (вследствие чего $\int\xi_3^{2k+1}\frac{d\xi_3}{L_0^m}=0$, $k<3m-1$), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
&U_{km}-U_{km}^{(0)}=\sum_{\gamma,\beta=1}^{2}\xi_\gamma\xi_\beta U_{km,\beta\gamma}(\xi',s), \quad k+m<6,\\
&U_{33}-U_{33}^{(0)}=\sum_{\gamma,\beta,\lambda=1}^{2}\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\lambda U_{\beta\gamma\lambda}(\xi',s),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

где $U_{km,\beta\gamma}$ и $U_{\beta\gamma\lambda}$ – однородные функции степени -3 и -4 соответственно, аналитические в области (2.10) и удовлетворяющие неравенствам

$$|U_{km,\beta\gamma}(\zeta,s)|\leqslant c(|s|+|\xi'|^2)^{-3/2}, \quad |U_{\beta\gamma\lambda}(\zeta,s)|\leqslant c(|s|+\xi'|^2)^{-2}. \tag{3.28}$$

<u>Шаг 3</u>. Доказательство (3.13), (3.15).

Сначала рассмотрим определитель

$$\det U(\xi',s)\equiv\Delta(\xi',s)=DU_{33}+\Delta_1(\xi',s),$$

где

$$D=U_{11}U_{22}-U_{12}U_{21},$$

$$\Delta_1=U_{31}(U_{12}U_{23}-U_{22}U_{13})-U_{32}(U_{11}U_{23}-U_{21}U_{13}).$$

Так как $U_{k3}^{(0)}=U_{3k}^{(0)}=0$, $k=1,2$, из (3.27) следует

$$\Delta_1(\xi',s)=\sum_{\beta,\gamma,\lambda,\mu=1}^{2}\xi_\beta\xi_\gamma\xi_\lambda\xi_\mu\Delta_{\beta\gamma\lambda\mu}(\xi',s), \tag{3.29}$$

где $\Delta_{\beta\gamma\lambda\mu}$ – однородные функции степени -7, аналитические в области (2.10) и удовлетворяющие неравенству

$$|\Delta_{\beta\gamma\lambda,\mu}(\zeta,s)| \leqslant c(|s|+|\xi'|^2)^{-7/2}. \tag{3.30}$$

Теперь легко показать, что неравенство (3.13) имеет место при малых $|\xi'|$ ($|\xi'| \leqslant \theta|s|^{1/2}$), а значит и при всех (ζ, s) из области (2.10). Это следует из очевидной формулы

$$\det U(\xi',s) \equiv \Delta(\xi',s) = D_0(\xi',s)U_{33}^{(0)}(\xi',s) + (DU_{33} - D_0U_{33}) + \Delta_1$$

и из (3.27)–(3.30).

Рассмотрим теперь разности $U^{ij} - U_0^{ij}$. Пусть $k, m = 1, 2$, $k \neq m$. Имеем

$$U^{kk} - U_0^{kk} = \frac{U_{mm}U_{33}}{\Delta} - \frac{U_{mm}^{(0)}}{D_0} - \frac{U_{m3}U_{3m}}{\Delta} = \frac{U_{mm} - U_{mm}^{(0)}}{\Delta}U_{33} +$$
$$+ U_{mm}^{(0)}\frac{(D_0 - D)U_{33} - \Delta_1}{D_0\Delta} - \frac{U_{3m}U_{3m}}{\Delta},$$
$$U^{km} - U_0^{km} = -\frac{U_{km}U_{33}}{\Delta} + \frac{U_{km}^{(0)}}{D_0} - \frac{U_{k3}U_{3m}}{\Delta} = -\frac{U_{km} - U_{km}^{(0)}}{\Delta}U_{33} -$$
$$- U_{km}^{(0)}\frac{(D_0 - D)U_{33} - \Delta_1}{D_0\Delta} + \frac{U_{k3}U_{3m}}{\Delta},$$
$$U^{k3} - U_0^{k3} = U^{k3} = \frac{1}{\Delta}(U_{km}U_{m3} - U_{mm}U_{k3}),$$
$$U^{3k} - U_0^{3k} = U^{3k} = \frac{1}{\Delta}(U_{mk}U_{3m} - U_{mm}U_{3k}),$$

и, наконец,

$$U^{33} - U_0^{33} = \frac{D}{\Delta} - \frac{1}{U_{33}^{(0)}} = \frac{D(U_{33}^{(0)} - U_{33}) - \Delta_1}{U_{33}^{(0)}\Delta}.$$

Отсюда и из (3.27), (3.29) следует, что

$$U^{km} - U_0^{km} = \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} \frac{\xi_\beta\xi_\gamma}{|\xi'|}W_{\beta\gamma}^{km}(\xi',s), \quad k,m = 1,2,3,$$

где $W_{\beta\gamma}^{km}$ – функции нулевой степени однородности, аналитические в области (2.10) и удовлетворяющие неравенству

$$|W_{\beta\gamma}^{km}(\zeta,s)| \leqslant c.$$

Ясно, что равенства (3.13) имеют место при

$$u^{km}(\xi',s)=u_0^{km}(\xi',s),\quad k,m=1,2,3,$$
$$v^{km}(\xi',s)=v_0^{km}+(U^{km}-U_0^{km})\quad k+m<6,$$
$$v^{33}(\xi',s)=v_0^{33}+|\xi'|(U^{33}-U_0^{33}),$$

где u_0^{km} определены в (3.24), (3.25), и что v^{km} обладают всеми нужными свойствами. Предложение доказано.

Положив в (3.6) $\zeta=\xi'$ и сделав обратное преобразование Фурье–Лапласа, мы приходим к представлению решения задачи (3.1) в виде потенциала простого слоя

$$v_k(x,t)=\sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}T_{km}(x'-y',x_3,t-\tau)h_m(y',\tau)dy'd\tau,\quad k=1,2,3,$$
$$p(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\nabla E(x'-y',x_3)\cdot\vec{h}(y',t)dy'+ \tag{3.31}$$
$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}T'_{4m}(x'-y',x_3,t-\tau)h_m(y',\tau)dy'd\tau\equiv p_1(x,t)+p_2(x,t),$$

где $h_k=(FL)^{-1}\widehat{h}_k$, $k=1,2,3$, а $\widehat{h}_k$ задаются формулами

$$\widehat{h}_k(\xi',s)=\sum_{m=1}^{3}U^{km}(\xi',s)\widehat{b}_m(\xi',s), \tag{3.32}$$

выражающими h_k в виде суммы псевдодифференциальных операторов, действующих на b_m. Мы рассмотрим ее ниже. Заметим, что в случае системы Стокса матрица U^{-1} имеет простой вид:

$$U^{km}(\xi',s)=2\delta_{km}(r+|\xi'|)-\frac{2\xi_m\xi_k}{|\xi'|},\quad k,m=1,2,$$
$$U^{k3}=U^{3k}=0,\quad k=1,2,$$
$$U^{33}=\frac{1}{|\xi'|}(2r^2+2r|\xi|)$$

Справедливость формул (3.13) очевидна, причем $u^{km}(\xi',s)=2\delta_{mk}r$, $k,m=1,2$, т.е. $l=1$, $l_{km}=\delta_{km}$, $u^{3m}=u^{m3}=0$, $u^{33}=2r^2$.

3.2 Оценка решения задачи (3.1). Переходим к оценкам решения задачи (3.1). Наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Если* $\vec{b} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$, $R_j b_{3t}$, $j = 1,2$, *удовлетворяют условию Гёльдера по* t *с показателем* $\alpha/2$, $\vec{b}$ *и его производные убывают на бесконечности как степенные функции (причем* b_{3t} *убывает как* $(1+|x'|)^{-1-\beta}$, $\beta > 0$*), и* $\vec{b}(x',0) = \vec{b}_t(x',0) = 0$, *то задача* (3.1) *имеет решение* $\vec{v} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}^3_+ \times (0,T))$, $\nabla p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$, $\vec{v}, p$ *убывают на бесконечности как степенные функции и*

$$[\vec{v}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} + [\nabla p]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left([\vec{b}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} + \sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j b_{3t}(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\right). \tag{3.33}$$

Доказательство этой теоремы разбивается на несколько этапов, которые мы выделяем в отдельные предложения.

Теорема 3.2. *Если в* (3.31) h_m *ограничены и убывают на бесконечности как степенные функции,* $h_1, h_2 \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$, $\frac{\partial h_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial h_3}{\partial x_2} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$ *и* $\vec{h}(x,0) = 0$, *то* $\vec{v}$, p *и их производные также убывают на бесконечности как степенные функции и выполняется неравенство*

$$\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{t<T}[\nabla p(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{2}[h_j]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} + \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial h_3}{\partial x_j}\right]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\right). \tag{3.34}$$

Теорема 3.3. *Если* $\vec{b}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3.1, *то функции* $h_m(x',t)$, *определяемые соотношениями* (3.32), *в которых* $\widehat{b}_j = F'Lb_j$, *причем* $b_j(x',t)$ *продолжены нулем в область* $t < 0$, *а затем произвольным образом в область* $t > T$ *с сохранением класса, убывают на бесконечности как степенные функции, и*

$$\sum_{j=1}^{2}[h_j]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} + \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial h_3}{\partial x_j}\right]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} \leqslant c\Bigg(\sum_{j=1}^{2}[b_j]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} +$$

$$+\sup_{t<T}[b_3(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+\sup[b_{3t}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j b_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\Big). \quad (3.34')$$

Из (3.34) и (3.34') следует, что построенное выше решение задачи (3.1) подчиняется неравенству

$$\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{t<T}[\nabla p(\cdot,t)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\bigg(\sum_{j=1}^{2}[b_j]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}+\sup_{t<T}[b_3(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+\sup_{t<T}[b_{3t}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j b_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\bigg). \quad (3.35)$$

Следующим шагом является дополнительная оценка давления.

Предложение 3.4. *Для решения задачи* (3.1) *имеет место оценка*

$$\sup_{\mathbb{R}^2}[\nabla p(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\leqslant c\bigg(\sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+$$

$$+\sup_{\mathbb{R}^2}[b_{3t}(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}+\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j b_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\bigg). \quad (3.36)$$

С помощью уравнения $\vec{v}_t=-\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}-\nabla p$ можно оценить теперь константу Гельдера $\vec{v}_t$ по переменной t и воспользоваться неравенствами (3.35), (3.36), (2.21), что приводит к (3.33).

Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобятся некоторые дополнительные свойства фундаментального решения.

Предложение 3.5. *Ядра $T'_{4m}(x,t)$ могут быть представлены в виде*

$$T'_{4m}(x,t)=\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}T_{4m\gamma}(x,t)+T_{4m0}(x,t), \quad m=1,2,3, \quad (3.37)$$

причем $T_{4m\gamma}(x,t)$ удовлетворяют неравенствам (2.17), *а $T_{4m0}(x,t)$ – неравенству*

$$|T_{4m0}(x,t)|\leqslant\frac{cx_3}{(|x|^2+t)^{5/2}} \quad (3.38)$$

и $T_{430}(x,t)=0$. *Кроме того,*

$$\frac{\partial^3 T_{km}(x,t)}{\partial x_3^3}=\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial T_{km\gamma}(x,t)}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial T_{km0}(x,t)}{\partial t},\ k,m=1,2,3, \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 T'_{4m}(x,t)}{\partial x_3^2}=\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial T'_{4m\gamma}(x,t)}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial T'_{4m0}(x,t)}{\partial t}, \tag{3.40}$$

причем

$$|T_{km\gamma}(x,t)|+|T'_{4m\gamma}(x,t)|\leqslant\frac{c}{(|x|^2+t)^{5/2}}, \tag{3.41}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^2}T_{km\gamma}(x,t)dx'dt=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^2}T_{4m\gamma}(x,t)dx'dt=0,\quad \forall x_3>0, \tag{3.42}$$

$$\left|\frac{\partial T_{km0}(x,t)}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial T'_{4m0}(x,t)}{\partial t}\right|\leqslant\frac{c}{(|x|^2+t)^3},$$

$$T_{k30}(x,t)=0,\quad k=1,2,3,\quad T'_{430}(x,t)=0.$$

Доказательство. Обратимся к формулам (2.6), (2.8). Выделяя члены, содержащие множители ξ_1, ξ_2, получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{km}(\xi',s)&=\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma\frac{sQ^{(1)}_{km\gamma}(\xi)+Q^{(3)}_{km\gamma}(\xi)}{L(i\xi,s)}+\frac{c_{km}s\xi_3^2+c'_{km}\xi_3^4}{L(i\xi,s)}\\ \widetilde{T}'_{4m}(\xi',s)&=\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma\frac{sQ^{(4)}_{4m\gamma}(i\xi)+Q^{(6)}_{4m\gamma}(\xi)}{L(i\xi,s)|\xi|^2}+\frac{d_ms\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L(i\xi,s)},\end{aligned} \tag{3.43}$$

где $Q^{(k)}$ – однородные полиномы степени k, а c_{km} и d_m – постоянные, причем $c_{k3}=c'_{k3}=0$, $d_3=d'_3=0$.

Далее,

$$\frac{d_ms\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L}=\frac{d_ms\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L_0L}(L_0-L)+\frac{d_ms\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L_0(i\xi,s)} \tag{3.44}$$

где $L_0(i\xi,s)$ определяется формулами (3.16). Вследствие (3.17),

$$\frac{d_ms\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L_0L}(L_0-L)=\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma\frac{d_ms\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L_0L}(sQ^{(3)}_\gamma(\xi)+Q^{(5)}_\gamma(\xi)),$$

и мы положим

$$T_{4m\gamma}(x,t) = (FL)^{-1}\left(\frac{sQ^{(4)}_{km\gamma}+Q^{(6)}_{km\gamma}}{|\xi|^2L}+\frac{d_m s\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L_0L}(sQ^{(3)}_\gamma+Q^{(5)}_\gamma)\right)$$

$$T_{4m0}(x,t) = (FL)^{-1}\frac{d_m s\xi_3^3+d'_m\xi_3^5}{L_0(i\xi,s)}.$$

Оценка (2.17) для $T_{4m\gamma}$ следует из предложения 2.1. Неравенство (3.38) также следует из предложения 2.1 и того факта, что $T_{4m0}(x,t)$ является нечетной функцией x_3 и обращается в нуль при $x_3=0$.

Итак, (3.37) доказано. Соотношения (3.39), (3.40) также следуют из формул (3.43), умноженных на $(i\xi_3)^3$ и $(i\xi_3)^2$, причем все утверждения будут доказаны, если получить представление типа (3.39) для ядер $(FL)^{-1}\frac{\xi_3^6}{L(i\xi,s)}$ и $(FL)^{-1}\frac{\xi_3^8}{|\xi|^2L}$, но так как

$$\frac{\xi_3^8}{|\xi|^2L}=\frac{\xi_3^6}{L}-\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_3^6}{|\xi|^2L},$$

достаточно рассмотреть лишь первое из них. Имеем

$$\frac{\xi_3^6}{L}=\frac{\xi_3^6}{L_0}+\frac{\xi_3^6(L_0-L)}{L_0L}=$$
$$=\frac{\xi_3^4}{P_0}-\frac{(\xi_1^2+\xi_2^2)\xi_3^4}{L_0}+\frac{\xi_3^6}{L_0L}\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma(sQ^{(3)}_\gamma(\xi)+Q^{(5)}_\gamma(\xi)), \tag{3.45}$$

$$(FL)^{-1}\frac{\xi_3^4}{P_0(i\xi,s)}=\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^4Z(x,t),$$

где Z – фундаментальное решение параболического уравнения $P_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)Z(x,t)=\delta(x)\delta(t)$. При $x_3>0$ из этого уравнения следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^4Z(x,t)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial}{\partial t}+Q^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)Z(x,t)+\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}Q^{(3)}_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z,$$

($c = \mathrm{const}$, $Q^{(k)}(i\xi)$ – однородные полиномы степени k), а значит (3.45) влечет за собой

$$(FL)^{-1}\frac{\xi_3^6}{L} = \sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\,K_\gamma(x,t) + \frac{\partial K_0(x,t)}{\partial t}, \tag{3.46}$$

и

$$(FL)^{-1}\frac{i\xi_3^7}{L} = \sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\gamma \partial x_3}\,K_\gamma(x,t) + \frac{\partial^2 K_0(x,t)}{\partial t \partial x_3}.$$

Вследствие предложения 2.1 и хорошо известных оценок функции Z и ее производных, ядра K_γ и K_0 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} |D_x^j K(x,t)| &\leqslant \frac{c}{(|x|^2+t)^{\frac{4+|j|}{2}}} \\ |D_x^j D_t K_0| &\leqslant \frac{c}{(|x|^2+t)^{\frac{5+|j|}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Кроме того, интегрирование (3.46) дает

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_0^\infty \left((FL)^{-1}\frac{\xi_3^6}{L}\right) dx'dt = 0, \quad \forall x_3 > 0. \tag{3.48}$$

Из (3.46)–(3.48) и из формул (3.43) легко вывести представления (3.39), (3.40). Предложение доказано.

Доказательство теоремы 3.2. Мы воспользуемся свойствами гельдеровских норм, перечисленных в §2, и оценим

$$\sum_{j=1}^{2}\sup_{h>0} h^{-2-\alpha}\sup_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}|\Delta_j^{q+l}(h)\vec{v}(x,t)| + \\ +\sup_{h>0} h^{-\alpha}\sup_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}\left|\Delta_3(h)\frac{\partial^2\vec{v}(x,t)}{\partial x_3^2}\right|$$

и

$$\sum_{j=1}^{2}\sup_{h>0} h^{-1-\alpha}\sup_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}|\Delta_j^{q_1+l}(h)p_2(x,t)| + \\ +\sup_{h>0} h^{-\alpha}\sup_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}\left|\Delta_3(h)\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x_3}\right|.$$

с подходящими q, q_1, l. Из (2.17) следует, что ядра $T_{km}(x,t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\Delta_j^l(h) T_{km}(x,t)| dx' dt \leqslant ch, \quad l > 1, \tag{3.49}$$

поэтому применение схемы К. К. Головкина (см. §2) к потенциалам в (3.31) дает

$$\begin{gathered} \sup_{h>0} h^{-2-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^3_+ \times (0,T)} |\Delta_j^{q+l}(h) v_k(x,t)| \leqslant \\ \leqslant c \sum_{m=1}^3 \sup_{h>0} h^{-1-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^2 \times (0,T)} |\Delta_j^q(h) h_m(y,t)| \end{gathered} \tag{3.50}$$

($l > 1$, $q > 1$, $j = 1, 2$). Формулу для $p_2(x,t)$ мы сначала запишем с помощью (3.37) в виде

$$p_2(x,t) = \sum_{m=1}^3 \sum_{\gamma=1}^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} T_{4m\gamma}(x'-y', x_3, t-\tau) \frac{\partial h_m(y,\tau)}{\partial y_\gamma} \, dy' d\tau +$$

$$+ \sum_{m=1}^3 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} T_{4m0}(x'-y', x_3, t-\tau) h_m(y',\tau) dy' d\tau.$$

Ядра $T_{4m\gamma}$ также удовлетворяют неравенству (3.49), а T_{4m0} – неравенству

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^2} |T_{4m0}(x,t)| dx' dt < c, \quad \forall x_3 > 0.$$

Поэтому та же схема приводит к

$$|\Delta_j^{q+l}(h) p_2(x,t)| \leqslant c \left(h \sum_{m=1}^3 \sum_{\gamma=1}^2 \sup_{\mathbb{R}^2 \times (0,T)} \left| \Delta_j^q(h) \frac{\partial h_m(y',\tau)}{\partial y_\gamma} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^3 \sup_{\mathbb{R}^2 \times (0,T)} |\Delta_j^{q+l}(h) h_m(y',\tau)| \right)$$

и, вследствии теоремы об эквивалентных нормировках (см. §2), к

$$\sup_{h>0} h^{-1-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} |\Delta_j^{q+l}(h)p_2(x,t)| \leqslant \\ \leqslant c\sum_{m=1}^{3} \sup_{h>0} h^{-1-\alpha} \sup_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} |\Delta_j^q(h)h_m(y',\tau)|, \quad j=1,2. \tag{3.51}$$

Переходим к оценкам констант Гёльдера $\frac{\partial^2\vec{v}_k}{\partial x_3^2}$ и $\frac{\partial p}{\partial x_3}$ по x_3. Оценим разности

$$\frac{\partial^2 v_k(x',x_3+h,t)}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v_k(x',x_3,t)}{\partial x_3^2} = \Delta_3(h)\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_3^2}.$$

В силу (3.39),

$$\Delta_3(h)\frac{\partial^2 v_k(x,t)}{\partial x_3^2} =$$

$$= \sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^h d\eta \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 T_{km}(x'-y',x_3+\eta,t-\tau)}{\partial x_3^3}\, h_m(y',\tau)dy'd\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{2}\int\limits_0^h d\eta \int\limits_{-\infty}^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} T_{km\gamma}(x'-y',x_3+\eta,t-\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial h_m(y',\tau)}{\partial y_\gamma} - \frac{\partial h_m(x',t)}{\partial x_\gamma}\right)dy'd\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^h d\eta \int\limits_{-\infty}^t \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial T_{km0}(x'-y',x_3+\eta,t-\tau)}{\partial t}(h_m(y',\tau)-h_m(y',t))dy'd\tau,$$

где $h_m(y,\tau)=0$ при $\tau<0$. Отсюда следует

$$\left|\Delta_3(h)\frac{\partial^2 v_k(x,t)}{\partial x_3^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{m=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{2}\left[\frac{\partial h_m}{\partial x_\gamma}\right]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)} \int\limits_0^h d\eta \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(|z'|^\alpha+\tau^{\alpha/2})dz'd\tau}{(|z'|^2+|x_3+\eta|^2+\tau)^{5/2}} +$$

$$+c\sum_{m=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[h_m(y',\cdot)]^{((1+\alpha)/2)}_{(0,t)}\int\limits_0^h d\eta\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}dz'd\tau}{(|z'|^2+|x_3+\eta|^2+\tau)^3}\leqslant$$

$$\leqslant ch^\alpha\left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{\gamma=1}^{2}\left[\frac{\partial h_m}{\partial x_\gamma}\right]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,t)}+\sum_{m=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[h_m(y',\cdot)]^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{(0,t)}\right).$$

Разность $\Delta_3(h)\frac{\partial p_2}{\partial x_3}$ оценивается точно так же. Полученные оценки, вместе с (3.50) и (3.51), влекут за собой

$$\sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+\sup_{t<T}[\nabla p_2(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{2}[h_j]^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}+\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial h_3}{\partial x_j}\right]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\right).$$

Что касается $p_1(x,t)=\int_{\mathbb{R}^2}\nabla E(x'-y',x_3)\cdot\vec{h}(y',t)dy'$, то в силу классических оценок гармонического потенциала простого слоя, имеем

$$\sup_{t<T}[\nabla p_1(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant c\sup_{t<T}[\vec{h}(\cdot,t)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}.$$

Наконец, мы оцениваем норму $\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}$ с помощью уравнения $\vec{v}_t=-\mathcal{A}_0\vec{v}-\nabla p$ и приходим к (3.34). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 3.3. Запишем соотношения (3.32) в виде

$$\widehat{h}_k(\xi',s)=\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{l\delta_{km}+l_{km}}{r}+\frac{v^{km}}{r^2}\right)r^2\widehat{b}_m+\frac{v^{k3}}{r^2}r^2\widehat{b}_3,\quad k=1,2$$

$$\widehat{h}_3(\xi',s)=\sum_{m=1}^{2}\frac{v^{3m}}{r^2}r^2\widehat{b}_m+\frac{2r^2\widehat{b}_3}{|\xi'|}+\frac{v^{33}}{|\xi'|r^2}r^2\widehat{b}_3.$$

Выполнив обратное преобразование Фурье–Лапласа, получим

$$h_k(x,t)=2\sum_{j=1}^{2}(l\delta_{kj}+l_{kj})\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Gamma(x'-y',0,t-\tau)d_j(y',\tau)dy'd\tau+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}H_{km}(x'-y',t-\tau)d_m(y',\tau)dy'd\tau,\quad k=1,2,\tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}h_3(x,t)=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}&H_{3m}(x'-y',t-\tau)d_m(y',\tau)dy'd\tau-\\&-4\int\limits_{\mathbb{R}^2}E(x'-y',0)d_3(y',t)dy'+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}H(x'-y',t-\tau)d_3(y,\tau)dy'd\tau\end{aligned}\tag{3.53}$$

где

$$d_m(x',t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nabla'^2\right)b_m(x',t)=b_{mt}-\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 b_m}{\partial x_j^2},$$

$$H_{km}=(F'L)^{-1}\frac{v^{km}}{r^2}=(F'L)^{-1}\sum_{\beta,\gamma=1}^{2}\frac{\xi_\beta\xi_\gamma}{|\xi'|}\frac{V^{km}_{\beta\gamma}}{r^2}$$

$$H=(F'L)^{-1}\frac{v^{33}}{r^2|\xi'|}=(F'L)^{-1}\sum_{\beta,\gamma=1}^{2}\frac{\xi_\beta\xi_\gamma}{|\xi'|^2}\frac{V^{33}_{\beta\gamma}}{r^2}.$$

Вследствие предложения 2.1,

$$|D^j_{x'}H_{km}(x',t)|\leqslant\frac{c}{(|x'|^2+t)^{\frac{3+|j|}{2}}},\quad k=1,2,3,\quad m=1,2,\tag{3.54}$$

$$|D^j_{x'}H(x',t)|\leqslant\frac{c}{\sqrt{t}(|x'|^2+t)^{\frac{2+|j|}{2}}},\tag{3.55}$$

поэтому при условиях теоремы 3.1 все интегралы в (3.52), (3.53) сходятся, и $h_m(x',t)$ убывают при $|x'|\to\infty$ как степенные функции. Продифференцировав (3.53) и учтя, что $\int_{\mathbb{R}^2}H_{33}(x',t)dx'=0$, получим

$$\frac{\partial h_3(x',t)}{\partial x_j}=\sum_{m=1}^{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial H_{3m}(x'-y',t-\tau)}{\partial x_j}\,(d_m(y',\tau)-d_m(x',\tau))dy'd\tau-$$
$$-2R_jd_3(x',t)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}H_{33}(x'-y',t-\tau)(R_jd_3(y',\tau)-R_jd_3(x',\tau))dy'd\tau, \tag{3.56}$$

где R_j – сингулярные операторы Рисса (их символы равны $\frac{i\xi_j}{|\xi'|}$).

Переходим к оценкам. Заметим, что ядра H_{km} удовлетворяют, кроме (3.54), неравенству

$$|D_tH_{km}(x',t)|\leqslant\frac{c}{t(|x|^2+t)^{3/2}},\quad t>0$$

и условию

$$\int_{\mathbb{R}^2}H_{km}(x',t)dx'=0,\quad \forall t>0.$$

Поэтому, применяя для оценки потенциалов в правой части (3.52) предложение 2.2, получаем

$$[h_k]^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\leqslant c\left(\sum_{m=1}^{2}[d_m]^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}+\sup_{t<T}[d_3(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\right),\quad k=1,2.$$

Далее, как было отмечено в замечании 2 §2, потенциалы в правой части (3.53) удовлетворяют неравенству (2.33), которое влечет за собой

$$\sup_{t<T}[h_3(\cdot,t)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\leqslant c\sum_{m=1}^{3}\sup_{t<T}[d_m(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}.$$

Постоянную Гельдера производных $\frac{\partial h_3}{\partial x_j}$ по переменной t мы оценим, исходя из равенства (3.56) и используя оценки

$$|D_t^kH_{33}(x,t)|\leqslant\frac{c}{t^{k+1/2}(|x|^2+t)^{3/2}},\quad k=0,1.$$

Вследствие предложения 2.3, имеем

$$\sup_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{\partial h_3(x',\cdot)}{\partial x_j}\right]^{(\frac{\alpha}{2})}_{(0,T)}\leqslant c\left(\sum_{m=1}^{3}\sup_{t<T}[d_m(\cdot,t)]^{(a)}_{\mathbb{R}^2}+[R_jd_3]^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\right).$$

Наконец, заметим, что $R_j d_3 = R_j(b_{3t} - \nabla'^2 \widehat{b}_3)$, и в силу предложения 2.4 и неравенства (2.21),

$$\sup_{\mathbb{R}^2} [R_j \nabla'^2 b_3(x', \cdot)]_{(0,T)}^{(\alpha/2)} \leqslant c[\nabla' b_3]_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}^{\left(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{t<T}[b_{3t}(\cdot, t)]_{\mathbb{R}^2}^{(\alpha)} + \sup_{t<T}[b_3(\cdot, t)]_{\mathbb{R}^2}^{(2+\alpha)}\right);$$

кроме того, очевидно, что

$$\sup_{t<T}[R_j d_3(\cdot, t)]_{\mathbb{R}^2}^{(\alpha)} \leqslant c \sup_{t<T}[d_3(\cdot, t)]_{\mathbb{R}^2}^{(\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{t<T}[b_{3t}(\cdot, t)]_{\mathbb{R}^2}^{(\alpha)} + \sup_{t<T}[b_3(\cdot, t)]_{\mathbb{R}^2}^{(2+\alpha)}\right).$$

Объединяя все полученные выше оценки, приходим к (3.34$'$). Теорема доказана, а с ней и оценка (3.35). □

Доказательство предложения 3.4. Рассмотрим $p(x,t)$ как решение задачи Неймана

$$\nabla^2 p(x,t) = -\nabla \cdot \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}(x,t), \quad x_3 > 0,$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = -(\mathcal{A}_0\vec{v})_3\big|_{x_3=0} - b_{3t}(x', t)$$

$$\nabla p(x,t) \to 0 \quad (|x| \to \infty).$$

Оно выражается через $\vec{v}$ по формуле

$$p(x,t) = p_3(x,t) + p_4(x,t),$$

$$p_3 = \int_{\mathbb{R}^3_+} \nabla_y N(x,y) \cdot \mathcal{A}_0 \vec{v}(y,t)dy, \quad p_4 = -2\int_{\mathbb{R}^2} E(x'-y', x_3) b_{3t} dy'.$$

В силу предложения 2.5,

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{R}^3_+}[\nabla p_3(x,\cdot)]_{(0,T)}^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &\leqslant c\left([\nabla\vec{v}]_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + [\mathcal{A}_0\vec{v}]_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}^{(\alpha,\alpha/2)}\right) \leqslant \\ &\leqslant c\left(\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]_{\mathbb{R}^3_+}^{(\alpha)} + \sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]_{\mathbb{R}^3_+}^{(2+\alpha)}\right).\end{aligned} \tag{3.57}$$

Функция p_4 – гармоническая, и вследствие принципа максимума,

$$\sup_{\mathbb{R}^3_+}\left[\frac{\partial p_4(x,\cdot)}{\partial x_j}\right]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant \sup_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{\partial p_4(x',0,t)}{\partial x_j}\right]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} = c\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j b_{3t}]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}, \tag{3.58}$$

$j=1,2$; кроме того,

$$\sup_{\mathbb{R}^3_+}\left[\frac{\partial p_4(x,\cdot)}{\partial x_3}\right]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant \sup_{\mathbb{R}^2}[b_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}. \tag{3.59}$$

Неравенство (3.36) вытекает из (3.57)–(3.59). Предложение доказано, а с ним и оценка (3.33). □

§4. Доказательство теоремы 1.1

Мы докажем теорему 1.1, сведя задачу (1.1)–(1.3) к задаче (3.1). Продолжим векторное поле $\vec{f}(x,t)$, удовлетворяющее условиям $\nabla\cdot\vec{f}=0$, $f_3\big|_{x_3=0}=0$, в область $x_3<0$ по формулам

$$f_j(x',x_3,t)=f_j(x',-x_3,t),\quad j=1,2,\quad f_3(x',x_3,t)=-f_3(x',-x_3,t), \tag{4.1}$$

а $\vec{v}_0$ – по формулам

$$\begin{aligned} v_{03}(x',x_3) &= \sum_{k=1}^{4}\lambda_k v_{03}\left(x',-\frac{x_3}{k}\right),\\ v_{0j}(x',x_3) &= \sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{\lambda_k}{k}\right)v_{0j}\left(x',-\frac{x_3}{k}\right),\quad j=1,2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где λ_k – числа, определяемые как решение системы

$$\sum_{k=0}^{3}\left(-\frac{1}{k}\right)^s\lambda_k=1,\quad s=0,1,2,3.$$

Продолженные таким образом векторные поля (обозначим их через $\vec{f}^*$, $\vec{v}_0^*$) соленоидальны и, кроме того, выполняются неравенства

$$[\vec{f}^*(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3} \leqslant 2[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^n_+},\quad [\vec{v}_0^*]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3} \leqslant c[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\vec{u}_t + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u} + \nabla q = \vec{f}^*(x,t), \quad \nabla\cdot\vec{u}(x,t) = 0,$$

$$\vec{u}\big|_{t=0} = \vec{v}_0^*(x), \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{4.4}$$

Ее решение может быть записано в виде

$$u_k(x,t) = \sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} T_{km}(x-y,t-\tau)f_m^*(y,\tau)dy\,d\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} T_{km}(x-y,t)v_{0m}^*(y)dy, \tag{4.5}$$

$$q(x,t) = \sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} T'_{4m}(x-y,t-\tau)f_m^*(y,\tau)dy\,d\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} T'_{4m}(x-y,t)v_{0m}^*(y)dy$$

или же

$$u_k(x,t) = u_k^0(x,t) +$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} T_{km}(x-y,t-\tau)(f_m^*(y,\tau) - (\mathcal{A}_0\vec{u}^{\,0}(y,\tau))_m - \nabla^2 u_m^0)dy\,d\tau, \tag{4.6}$$

$$q(x,t) = \sum_{m=1}^{3}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^3} T'_{4m}(x-y,t-\tau)(f_m^* - (\mathcal{A}_0\vec{u}^{\,0})_m - \nabla^2 u_m^0)dy\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla E(x-y)\cdot\mathcal{A}_0\vec{u}^{\,0}dy,$$

где

$$u_k^0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Gamma(x-y,t)v_{0k}^*(y)dy, \tag{4.7}$$

и оно удовлетворяет неравенству

$$[\vec{u}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)} + [q]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)} \leqslant c([\vec{f}^*]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)} + [\vec{v}^*_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3}), \qquad (4.8)$$

на доказательстве которого мы сейчас не останавливаемся (оно может быть выведено из известных оценок потенциала (4.7) и из предложений 2.2 и 2.4). Легко видеть, что функция

$$r_0(x) = p_0(x) - q(x,0),$$

где $p_0(x)$ – решение задачи (1.6), удовлетворяет соотношениям

$$\nabla^2 r_0(x) = 0, \quad x_3 > 0, \quad \nabla r_0(x) \to 0 \quad (|x| \to \infty)$$
$$\frac{\partial r_0}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0} = -a_{3t}(x',0) + u_{3t}(x,0)\big|_{x_3=0}.$$

Продолжим соленоидальное векторное поле $\nabla r_0(x)$ из $\mathbb{R}^3_+$ в $\mathbb{R}^3$ по формулам (4.2) и введем функции

$$u'_k(x,t) = \sum_{m=1}^{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} T_{km}(x-y,t-\tau)(\nabla r_0)^*_m(y)dy\,d\tau, \quad k=1,2,3,$$
$$q'(x,t) = \sum_{m=1}^{3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} T'_{4m}(x-y,t-\tau)(\nabla r_0)^*_m(y)dy\,d\tau, \qquad (4.9)$$

являющиеся решением задачи Коши

$$\vec{u}'_t + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u}' + \nabla q' = (\nabla r_0)^*, \quad \nabla\cdot\vec{u}' = 0, \quad \vec{u}'\big|_{t=0} = 0, \quad (4.10)$$

а также новые неизвестные функции

$$\vec{w}(x,t) = \vec{v}(x,t) - \vec{u}(x,t) + \vec{u}'(x,t)$$
$$s(x,t) = p(x,t) - q(x,t) + q'(x,t) - r_0(x), \quad x_3 > 0.$$

Легко видеть, что задача (1.1)–(1.3) для $(\vec{v},p)$ переходит в задачу

$$\vec{w}_t + \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{w} + \nabla s = 0, \quad \nabla\cdot\vec{w} = 0, \quad x_3 > 0, \quad \vec{w}\big|_{t=0} = 0, \quad (4.11)$$
$$\vec{w}\big|_{x_3=0} = \vec{a}(x',t) - (\vec{u}(x,t) - \vec{u}'(x,t))\big|_{x_3=0} \equiv \vec{b}(x',t),$$

причем, вследствие условий согласования,

$$\vec{b}(x',0)=\vec{a}(x',0)-\vec{v}_0(x',0,0)=0.$$

Кроме того, так как

$$\nabla^2 q'(x,0)=\nabla\cdot(\nabla r_0^*)=0,\quad x\in\mathbb{R}^3,$$

$$\nabla q'(x,0)\to 0\quad (|x|\to 0),$$

то $\nabla q'(x,0)=0$, и

$$\vec{b}_t\big|_{t=0}=\vec{a}_t(x',0)-(\vec{u}_t(x,0)-\vec{u}\,'_t(x,0))\big|_{x_3=0}=\vec{a}_t(x',0)+$$

$$+\left(\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}_0(x)+\nabla q(x,0)-\vec{f}(x,0)\right)\Big|_{x_3=0}+\nabla r_0\big|_{x_3=0}=$$

$$=(-\nabla p_0(x)+\nabla q(x,0)+\nabla r_0(x))\big|_{x_3=0}=0.$$

Наконец, вычислим $u_{3t}(x,t)-u'_{3t}(x,t)\big|_{x_3=0}$. Для этого воспользуемся вытекающей из (2.6) формулой

$$s\widetilde{T}_{3m}(\xi',s)=\left(\delta_{3m}-\frac{\xi_3\xi_m}{|\xi|^2}\right)+\frac{s\widehat{L}_{3m}(i\xi,0)}{L(i\xi,s)}-$$

$$-\frac{|\xi|^2\delta_{3m}-\xi_3\xi_m}{|\xi|^2}(s(|\xi|^2\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_0(i\xi)-\xi\cdot\mathcal{A}_0(i\xi)\xi)+\xi\cdot\widehat{\mathcal{A}}_0(i\xi)\xi).$$

Два последние члена представимы в виде суммы

$$\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma\frac{sQ^{(5)}_{m\gamma}(\xi)+Q^{(7)}_{m\gamma}(\xi)}{|\xi|^2L(i\xi,s)}\equiv\sum_{\gamma=1}^{2}i\xi_\gamma\widetilde{N}_{m\gamma}(\xi,s)$$

где $Q^{(k)}_{m\gamma}(\xi)$, как всегда – однородные полиномы степени k, и поэтому

$$(u_{3t}-u'_{3t})\big|_{x_3=0}=-\frac{\partial r_0(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}+\sum_{\gamma=1}^{3}\frac{\partial\phi_\gamma(x,t)}{\partial x_\gamma}\Big|_{x_3=0},$$

$$\phi_\gamma(x,t)=\sum_{m=1}^{3}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}N_{m\gamma}(x-y,t-\tau)(f^*_m(y)-(\nabla r_0)^*_m)dy\,d\tau+$$

$$+\sum_{m=1}^{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} N_{m\gamma}(x-y,t)v^*_{0m}(y)dy,$$

причем ядра

$$N_{m\gamma}=(FL)^{-1}\widetilde{N}_{m\gamma}=(FL)^{-1}\frac{sQ^{(5)}_{m\gamma}(\xi)+Q^{(7)}_{m\gamma}(\xi)}{|\xi|^2L(i\xi,s)}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|D^j_xD^k_tN_{m\gamma}(x,t)|\leqslant\frac{c}{t^k(|x|^2+t)^{\frac{4+|j|}{2}}}$$

и условию $\int_{\mathbb{R}^3}N_{m\gamma}(x,t)dx=0$.

Перейдем к оценкам. Функция $p_0(x)$ является решением задачи (1.6) и поэтому

$$\nabla p_0(x)=\nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3}\nabla_yN(x,y)\cdot\left(\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}_0(y)-\vec{f}(y,0)\right)dy-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^2}\nabla N(x,y',0)a_{3t}(y',0)dy'=$$

$$=P_G\left(\vec{f}(y,0)-\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}_0(y)\right)-2\int\limits_{\mathbb{R}^2}\nabla E(x'-y',x_3)a_{3t}(x',0)dy'.$$

Очевидно, справедливы оценки

$$[\nabla p_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant c([\vec{f}(\cdot,0)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[a_{3t}(\cdot,0)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}),$$

$$[\vec{u}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}+[\nabla q]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}\leqslant c([\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}+[\vec{v}_0]^{2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}),\qquad(4.12)$$

$$[\nabla r_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\leqslant[\nabla p_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\nabla q(\cdot,0)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}\leqslant$$

$$\leqslant c([\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[a_{3t}(\cdot,0)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2}),\qquad(4.13)$$

$$[\vec{u}']^{(2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}+[\nabla q']^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}\leqslant c[\nabla r_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\qquad(4.14)$$

и, следовательно,

$$[\vec{b}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\leqslant c\left([\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\vec{a}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\right).$$

Наконец, в силу предложений 2.4 и 2.2,

$$\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j(u_{3t}-u'_{3t})]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant c\sum_{\gamma=1}^{2}\Big[\phi_\gamma\big|_{x_3=0}\Big]^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{t<T}[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\nabla r_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\right), \tag{4.15}$$

и вследствие неравенства (3.33),

$$[\vec{w}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}+[\nabla s]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} \leqslant c\bigg([\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+(0,T)}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+$$

$$+[\vec{a}]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}+\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j a_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\bigg).$$

Это неравенство вместе с (4.12)–(4.15) влечет за собой (1.8).

Осталось доказать единственность построенного решения. Приведем основные идеи доказательства, опуская технические детали. Пусть $\vec{v}^{\,0}$, p^0 – решение однородной задачи (1.1)–(1.3). Продолжим $\vec{v}^{\,0}$, p^0 нулем в область $t<0$ и введем функции

$$\vec{v}^{\,\varepsilon}(x,t)=\int\limits_0^t \vec{v}^{\,0}(x,\tau)\omega_\varepsilon(t-\tau)d\tau,$$

$$p^\varepsilon(x,t)=\int\limits_0^t p^0(x,\tau)\omega_\varepsilon(t-\tau)d\tau,$$

где $\omega_\varepsilon(t)$ – стандартное усредняющее ядро с $\operatorname{supp}\omega_\varepsilon\in(0,\varepsilon)$. Ясно, что $\vec{v}^{\,\varepsilon}$, p^ε – также решение однородной задачи (1.1)–(1.3), причем $\vec{v}^{\,\varepsilon}_t\big|_{t=0}=0$, $p^\varepsilon\big|_{t=0}=0$, и $\vec{v}^{\,\varepsilon}$, p^ε – бесконечно дифференцируемые функции t. Пусть $\psi_R(x)=\psi\left(\frac{x}{R}\right)$, $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x)=0$ при $|x|<1$, $\psi(x)=0$ при $|x|>2$. Положим $\vec{v}^{\,\varepsilon}_R=\vec{v}^{\,\varepsilon}\psi_R(x)$, $p^\varepsilon_R=p^\varepsilon\psi_R$, и введем векторное поле $\vec{w}_R(x,t)$, удовлетворяющее соотношениям

$$\nabla\cdot\vec{w}_R=\vec{v}^{\,\varepsilon}\cdot\nabla\psi_R\equiv g_R,\quad x\in\mathbb{R}^3_+,\quad \vec{w}_R\big|_{x_3=0}=0.$$

С помощью конструкции М. Е. Боговского [12] (слегка измененной) можно построить $\vec{w}_R(x,t)$ с $\operatorname{supp}\vec{w}_R\subset\{x\in\mathbb{R}^3: R\leqslant|x|\leqslant 2R\}$ в виде $\vec{w}_R=\mathcal{B}g_R$, где $\mathcal{B}$ – сумма интегральных операторов со слабо полярными ядрами $K(x-y,y)$, имеющими при $x=y$ сингулярность порядка $|x-y|^{-n+1}$. Можно показать, что $\vec{w}_R(x,t)$ – гладкие функции t, $\vec{w}_R \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3_+)$, $\vec{w}_{Rt} = \mathcal{B}g_{Rt} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^3_+)$, $\vec{w}_R$ равномерно ограничены при $R\to\infty$, а $D^j_x\vec{w}_R$, $|j|=1,2$,и $\vec{w}_{Rt}$ и их гельдеровские нормы стремятся к нулю при $R\to\infty$, как степенные функции R. Ясно, что $\vec{u}_R = \vec{v}^{\,\varepsilon}_R - \vec{w}_R$, и p^ε_R удовлетворяют соотношениям

$$\vec{u}_{Rt} + \mathcal{A}\vec{u}_R + \nabla p_R =$$

$$= p^\varepsilon \nabla\psi_R + (\mathcal{A}_0(\psi_R\vec{v}^{\,\varepsilon}) - \psi_R\mathcal{A}\vec{v}^{\,\varepsilon}) - \vec{w}_{Rt} - \mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{w}_R \equiv \vec{f}_R,$$

$$\nabla\cdot\vec{u}_R = 0, \quad \vec{u}_R\big|_{t=0} = 0, \quad \vec{u}_R\big|_{x_3=0} = 0,$$

имеют компактный носитель и совпадают с $\vec{v}^{\,\varepsilon}$, p^ε при $|x|<R$. Можно показать также, что $\vec{u}_R$ и p_R выражаются через $\vec{f}_R$ так, как указано выше, и следовательно, они удовлетворяют неравенству (1.8), в частности,

$$[\vec{u}_R]^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} \leqslant c[P_J\vec{f}_R]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}.$$

С помощью оценки (2.24) для $P_J\vec{f}_R$ легко убедиться в том, что правая часть стремится к нулю при $R\to\infty$. Следовательно, $\vec{v}^{\,\varepsilon}=0$, а значит и $\vec{v}^{\,0}=0$, что и требовалось доказать. Теорема доказана. □

В заключение получим еще одну оценку решения задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 4.1. *При условиях теоремы* 1.1 *решение задачи* (1.1)–(1.3), *подчиняется неравенству*

$$\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + [\nabla p]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} \leqslant$$

$$\leqslant \big(\sup[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + [\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{t<T}[\vec{a}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} +$$

$$+\sup_{t<T}[\vec{a}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} + \sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[a_{jt} - f_j(x',0,\cdot)]^{\alpha/2)}_{(0,T)} +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j a_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\big). \qquad (4.16)$$

Доказательство. Мы воспользуемся вместо (4.12) и (4.14) следующими неравенствами для решения задач (4.4) и (4.10):

$$\sup_{t<T}[\vec{u}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3}+\sup_{t<T}[\vec{u}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3}+[\nabla q]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}\leqslant$$
$$\leqslant c\big(\sup_{t<T}[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\big) \tag{4.17}$$

$$\sup_{t<T}[\vec{u}'_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3}+\sup_{t<T}[\vec{u}'_t(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3}+[\nabla q']^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3\times(0,T)}\leqslant$$
$$\leqslant c[\nabla r_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}. \tag{4.18}$$

Они могут быть выведены из соотношений (4.5), (4.6), (4.9) и из предложений 2.2, 2.3.

Далее из равенства

$$\vec{b}_t=\vec{a}_t-(\vec{u}_t-\vec{u}'_t)\big|_{x_3=0}=\vec{a}_t-\vec{f}\,\big|_{x_3=0}+$$
$$+\left(\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\vec{u}-\vec{u}')+\nabla(q-q')\right)\Bigg|_{x_3=0}$$

и из неравенств (4.17), (4.18), (2.21) выводим

$$\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[b_{jt}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\leqslant\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[a_{jt}-f_j(x',0,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}+$$
$$+[\nabla(q-q')]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}+c\big(\sup_{t<T}[\vec{u}_t(\cdot,t)-\vec{u}'_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+$$
$$+\sup_{t<T}[\vec{u}(\cdot,t)-\vec{u}'(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\big)\leqslant\sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[a_{jt}-f_j]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}+$$
$$+c\big(\sup_{t<T}[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}+[\nabla r_0]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}\big). \tag{4.19}$$

Вследствие (4.17), норма $[\vec{f}]^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)}$ в (4.13) может быть заменена на $\sup_{t<T}[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}$. Поэтому оценки (4.15) и (4.17)–(4.19) влекут за собой (4.16).

Оценка (4.16) не содержит в правой части постоянной Гельдера $\vec{f}$ по t в $\mathbb{R}^3_+\times(0,T)$, но содержит постоянную Гельдера по

t функции $\vec{f}\big|_{x_3=0}$ (точнее, функций $a_{jt} - f_j\big|_{x_3=0}$, $j = 1, 2$), как это имеет место для параболических уравнений [10].

Замечание 1. Если $\vec{f}$ не удовлетворяет условиям $\nabla \cdot \vec{f} = 0$, $f_3\big|_{x_3=0} = 0$, но имеет конечную норму $\sup_{t<T}[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+}$, то вместо (4.16) имеем

$$\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3} + \sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{t<T}[\nabla p(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant$$

$$\leqslant c\big(\sup_{t<T}[\vec{f}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + [\vec{v}_0]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3} + \sup_{t<T}[\vec{a}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^2} +$$

$$+ \sup_{t<T}[\vec{a}_t(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^2} + \sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[a_{jt} - (P_J f)_j(x',0,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2}\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j a_{3t}(x,\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)}\big). \tag{4.20}$$

В этом легко убедиться, представив $\vec{f}$ в виде $\vec{f} = P_J\vec{f} + \nabla\varphi$ и введя новое давление $p' = p - \varphi$. Для $(\vec{v}, p')$ справедлива оценка (4.16) с $\vec{f'} = P_J\vec{f}$ вместо $\vec{f}$ в правой части. Воспользовавшись неравенством (2.24), получаем (4.20).

Замечание 2. Если производная $a_{3t}(x,t)$ представима в форме (1.9), то вследствие предложения 2.4

$$\sup_{\mathbb{R}^2}[R_j a_{3t}(x',\cdot)]^{(\alpha/2)}_{(0,T)} \leqslant c|\vec{A}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)} \leqslant c[\vec{A}]^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}.$$

Замечание 3. В условиях теоремы 1.1 и при условии (1.9) имеет место дополнительная оценка

$$|p|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+\times(0,T)} \leqslant c\big(\sup_{t<T}[\vec{v}_t(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + \sup_{t<T}[\vec{v}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+} + |\vec{A}|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2\times(0,T)}\big). \tag{4.21}$$

Действительно, $p(x,t)$ можно рассмотреть как решение задачи Неймана

$$\nabla^2 p(x,t) = -\nabla\cdot\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = -\left(\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}\right)_3 - a_{3t} = -\left(\mathcal{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{v}\right)_3 - \nabla'\cdot\vec{A}'$$

так что

$$p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \nabla_y N(x,y) \cdot \mathcal{A}_0 \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \vec{v}(y,t) dy - 2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \nabla' E(x'-y', x_3) \cdot \vec{A}' dy.$$

Образуем конечную разность по t и преобразуем первый интеграл интегрированием по частям, превратив его в сингулярный. После этого легко получить неравенство

$$[\Delta_t(h) p(\cdot,t)]^{(\gamma)}_{\mathbb{R}^3_+} \leqslant c\big(\Delta_t(h) \nabla \vec{v}(\cdot,t)]^{(\gamma)}_{\mathbb{R}^3_+} + [\Delta_t(h) \vec{A}'(\cdot,t)]^{(\gamma)}_{\mathbb{R}^2}\big),$$

и следовательно,

$$|p|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+ \times (0,T)} \leqslant c\big(|\nabla \vec{v}|^{(\gamma 1+\alpha)}_{\mathbb{R}^3_+ \times (0,T)} + |A'|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\mathbb{R}^2 \times (0,T)}\big),$$

что влечет за собой (4.21).

Литература

1. О. А. Ладыженская, Г. А. Серегин, *Коэрцитивные оценки для решений линеаризаций модифицированных уравнений Навье–Стокса.* — Доклады Акад. наук **360** (2000), 738–740.
2. O. A. Ladyzhenskaya, *On multiplicators in Hölder spaces with nonhomogeneous metric.* — Institut Mittag–Leffler, report **16** (1999/2000), 1–7.
3. В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса.* Труды МИАН СССР, **70** (1964), 213–317.
4. В. А. Солонников, *О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье–Стокса.* — Труды МИАН СССР **73** (1964), 221–291.
5. В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **38** (1973), 153–231.
6. В. А. Солонников, *Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гёльдеру производными по пространственным переменным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **259** (1999), 254–280.
7. В. Н. Смирнов, *Курс высшей математики, т. 3.* Ленинград–Москва (1939), 795 с.
8. К. К. Головкин, *Об эквивалентных нормировках дробных пространств.* — Труды МИАН СССР **66** (1962), 364–383.
9. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука, 1967, 736 с.
10. A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhauser, 1995, 424 s.

11. К. К. Головкин, *О некоторых условиях гладкости функции многих переменных и об оценках операторов свертки.* — Доклады АН СССР **139** (1961), 524–527.
12. М. Е. Боговский, *Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами* div *и* grad. — Труды семин. С. Л. Соболева **1** (1980), 5–40.

Solonnikov V. A. Initial boundary-value problem for generalized Stokes equations in the half-space.

The paper contains construction of the solution of the Cauchy–Dirichlet problem in the half-space $\mathbb{R}^3_+$ for a family of systems of differential equations containing the Stokes system. For this solution coercive estimates in the Hölder spaces of functions are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 24 августа 2000 г.