В. Б. Васильев, А. А. Машинец, О дискретной краевой задаче в четверти плоскости,
Вестник российских университетов. Математика, 2023, том 28, выпуск 142, 169–181

https://www.mathnet.ru/vtamu287

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181

УДК 517.95+517.983

О дискретной краевой задаче в четверти плоскости

Владимир Борисович ВАСИЛЬЕВ, Анастасия Александровна МАШИНЕЦ

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)

308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, 85

Аннотация. Мы изучаем разрешимость дискретного аналога модельного псевдодифференциального уравнения в четверти плоскости в дискретных пространствах Соболева–Слободецкого. Используя понятие периодической волновой факторизации для эллиптического периодического символа, мы описываем условия разрешимости этого уравнения и одной связанной с ним краевой задачи. В частности, для определенных значений индекса периодической волновой факторизации получена формула общего решения модельного дискретного псевдодифференциального уравнения, в котором содержатся некоторые произвольные функции. Для их однозначного определения вводятся дополнительные условия — дискретный аналог интегральных условий на сторонах угла. Доказана теорема существования и единственности полученной дискретной краевой задачи и получены априорные оценки решения. Дается также сравнение дискретных и непрерывных решений краевых задач при специального выбора дискретных объектов.

Ключевые слова: эллиптический символ, обратимость, дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретное уравнение, периодическая волновая факторизация

Для цитирования: *Васильев В.Б., Машинец А.А.* О дискретной краевой задаче в четверти плоскости // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 169–181. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181

On a discrete boundary value problem in a quarter-plane

Vladimir B. VASILYEV, Anastasia A. MASHINETS
Belgorod National Research University
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation

Abstract. We study the solvability of a discrete analogue of a model pseudo-differential equation in a quarter-plane in discrete Sobolev–Slobodetskii spaces. Using a concept of periodic wave factorization for elliptic periodic symbol, we describe solvability conditions for the equation and for a certain boundary value problem related to this equation. In particular, for certain values of the index of periodic wave factorization, a formula for a general solution of the model discrete pseudo-differential equation is obtained, there are some arbitrary functions in the formula. For their unique determination, we introduce certain additional conditions such as a discrete analogues of integral conditions on angle sides. The existence and uniqueness theorem for the stated boundary value problem is proved and a priori estimates for the solution are obtained. A comparison between discrete and continuous solutions for a special choice of discrete objects is also given.

Keywords: elliptic symbol, invertibility, digital pseudo-differential operator, discrete equation, periodic wave factorization

Mathematics Subject Classification: 35S15, 65T50.

For citation: Vasilyev V.B., Mashinets A.A. On a discrete boundary value problem in a quarter-plane. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 169–181. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Мы изучаем дискретные псевдодифференциальные уравнения и их разрешимость в соответствующих дискретных функциональных пространствах. Существуют определенные подходы к исследованию дискретных краевых задач для уравнений в частных производных, в том числе метод конечных разностей и метод разностных потенциалов (см. [1, 2]), однако они неприменимы к изучению дискретных краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. С учетом этого факта первый автор с коллегами начал развивать дискретную теорию эллиптических псевдодифференциальных уравнений [3]. Мы начали исследование с модельных операторов и канонических областей. Первые результаты были связаны с дискретным m-мерным пространством и полупространством, здесь мы рассматриваем дискретный квадрант.

1. Дискретные операторы и уравнения

Пусть $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ — первый квадрант, $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K$, $h > 0$, $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$ — функция дискретной переменной.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$, $\hbar = h^{-1}$. Функцию, определенную в $\hbar\mathbb{T}^2$, мы трактуем как периодическую функцию в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

Можно определить дискретное преобразование Фурье для функции u_d

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

если последний ряд сходится и $\tilde{u}_d(\xi)$ — периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Это дискретное преобразование Фурье сохраняет все свойства интегрального преобразования Фурье, а обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$(F_d^{-1} \tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2.$$

Дискретное преобразование Фурье осуществляет взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} |u_d(\tilde{x})|^2 h^2 \right)^{1/2}, \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left(\int\limits_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нам понадобятся более общие дискретные функциональные пространства, которые мы введем, используя разделенные разности [1].

Разделенные разности первого порядка выглядят следующим образом

$$(\Delta_1^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(\tilde{x}_1 + h, \tilde{x}_2) - u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)), \quad (\Delta_2^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + h) - u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)),$$

а их дискретные преобразования Фурье даются формулами

$$(\widetilde{\Delta_k^{(1)} u_d})(\xi) = h^{-1}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)\tilde{u}_d(\xi), \quad k = 1, 2.$$

Разделенная разность второго порядка — это разделенная разность первого порядка от разделенной разности первого порядка

$$(\Delta_1^{(2)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(\tilde{x}_1 + 2h, \tilde{x}_2) - 2u_d(\tilde{x}_1 + h, \tilde{x}_2) + u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)),$$

$$(\Delta_2^{(2)}u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2+2h) - 2u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2+h) + u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)),$$

с преобразованием Фурье

$$(\widetilde{\Delta_k^{(2)}u_d})(\xi) = h^{-2}(e^{-ih\cdot\xi_k}-1)^2\tilde{u}_d(\xi), \quad k=1,2.$$

Дискретный аналог оператора Лапласа имеет следующий вид

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x}) = (\Delta_1^{(2)}u_d)(\tilde{x}) + (\Delta_2^{(2)}u_d)(\tilde{x}),$$

так что его преобразование Фурье выглядит как

$$(\widetilde{\Delta_d u_d})(\xi) = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1}-1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2}-1)^2)\tilde{u}_d(\xi).$$

Мы используем эти дискретные объекты для построения дискретных пространств Соболева–Слободецкого для изучения широкого класса дискретных уравнений.

Сначала введем дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ как набор дискретных функций с конечными полунормами

$$|u_d| = \sup_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2}(1+|\tilde{x}|)^l|\Delta^{(\mathbf{k})}u_d(\tilde{x})|$$

для произвольного $l\in\mathbb{N}$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2)$, $k_r\in\mathbb{N}$, $r=1,2$,

$$\Delta^{(\mathbf{k})}u_d(\tilde{x}) = \Delta_1^{k_1}\Delta_2^{k_2}u_d(\tilde{x}).$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Дискретной обобщенной функцией называется линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $S(h\mathbb{Z}^2)$.

Множество таких дискретных обобщенных функций будем обозначать через $S'(h\mathbb{Z}^2)$, и значение дискретной обобщенной функции f_d на тестовой дискретной функции $u_d\in S(h\mathbb{Z}^2)$ будет обозначаться (f_d,u_d). Аналогично [4] мы можем определить стандартные операции в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$, но дифференцирование будет заменено на разделенную разность первого порядка. Эти операции подробно описаны в [3], под сходимостью понимается слабая сходимость в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$.

Пусть $\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1}-1)^2+(e^{-ih\cdot\xi_2}-1)^2)$. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из (обобщенных) функций дискретного аргумента и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ относительно нормы

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^s|\tilde{u}_d(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Изменяя параметр h в (1.1), мы получим различные нормы, которые эквивалентны L_2-норме, но константы в этой эквивалентности зависят от h. В наших конструкциях ниже все константы не зависят от h — это важный факт для сравнения дискретных и непрерывных решений.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций из $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ таких, что их носители принадлежат множеству $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Пространство $H_0^s(K_d)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций $f_d\in S'(h\mathbb{R}^2)$ с носителями внутри K_d, и эти дискретные (обобщенные) функции должны допускать продолжение в пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Норма в пространстве $H_0^s(K_d)$ задается формулой

$$\|f_d\|_s^+ = \inf \|\ell f_d\|_s,$$

где инфимум берется по всем продолжениям ℓ.

Фурье образ пространства $H^s(K_d)$ будет обозначаться $\widetilde{H}^s(K_d)$.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ — измеримая периодическая функция $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Такие функции мы называем символами.

Определение 1.4. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x}\in K_d.$$

Мы говорим, что оператор A_d является эллиптическим, если

$$ess \inf_{\xi\in\hbar\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Мы рассматриваем символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \tag{1.2}$$

с константами c_1, c_2, не зависящими от h. Число $\alpha\in\mathbb{R}$ называется порядком дискретного псевдодифференциального оператора A_d.

Легко доказывается следующий простой результат.

Лемма 1.1. *Дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ является линейным ограниченным оператором $H^s(h\mathbb{Z}^2)\to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$ с нормой, не зависящей от h.*

Далее мы исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x}\in K_d, \tag{1.3}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ при условии, что $v_d\in H_0^{s-\alpha}(K_d)$.

Мы будем использовать некоторую специальную область в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$. Область типа $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$ называется трубчатой областью над квадрантом K, и будем рассматривать аналитические функции $f(x+i\tau)$ в области $\mathcal{T}_h(K)$.

Введем периодическое ядро Бохнера аналогично [4]

$$B_h(z) = \sum_{\tilde{x}\in K_d} e^{i\tilde{x}\cdot(\xi+i\tau)} h^2, \quad \xi\in\hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau\in K,$$

и соответствующий интегральный оператор

$$(B_h\tilde{u}_d)(\xi) = \lim_{\tau\to 0,\tau\in K} \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} B_h(\xi+i\tau-\eta)\tilde{u}_d(\eta) d\eta.$$

Лемма 1.2. *Для квадранта K оператор B_h имеет следующий вид*

$$(B_h\tilde{u}_d)(\xi) = \frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta + \lim_{\tau\to 0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta$$
$$+ \lim_{\tau\to 0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta$$
$$- \lim_{\tau\to 0+}\frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\cot\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta,$$

и B_h — линейный ограниченный оператор в $H^s(\hbar\mathbb{T}^2)\to H^s(\hbar\mathbb{T}^2)$ для $|s|<1/2$. Более того, оператор B_h является проекцией $\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2)\to\widetilde{H}^s(K_d)$.

Доказательство. Соответствующие вычисления для одномерного дискретного конуса были проведены в [5]. Мы используем эти результаты, адаптируя их к нашему двумерному случаю. Поскольку

$$\sum_{\tilde{x}_k\in h\mathbb{Z}_+} e^{-i\tilde{x}_k z_k}h = \frac{h}{2}-\frac{ih}{2}\cot\frac{hz_k}{2}, \quad z_k=\xi_k+i\tau_k, \quad k=1,2,$$

то, перемножая $e^{-\tilde{x}\cdot\tau}$ с $u_d(\tilde{x})$ и применяя соответствующее свойство преобразования Фурье о произведении и свертке образов Фурье, получаем утверждение.

Ограниченность одномерного оператора с ядром $h\operatorname{ctg}\frac{hz}{2}$ для $|s|<1/2$ доказывается переходом к ядру Коши с помощью экспоненциальной замены и использованием соответствующего результата из [6]; двумерный случай получается повторным применением этих рассуждений. □

Отметим, что оператор B_h является так называемым периодическим бисингулярным оператором. Используя классические результаты для интеграла типа Коши [7, 8], можно аккуратно вычислить граничное значение, но в данном исследовании это не играет принципиальной роли. Поскольку формулы довольно громоздки, можно сделать некоторые упрощения, не теряя общности. Так, например, мы можем рассмотреть пространство $S_1(h\mathbb{Z}^2)\subset S(h\mathbb{Z}^2)$ с нулевыми значениями на осях координат и ввести пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ как замыкание множества $S_1(h\mathbb{Z}^2)$. В этом случае первые три слагаемые в выражении для B_h будут равны нулю.

Лемма 1.3. *Если $|s|<1/2$, то пространство $\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2)$ однозначно представляется в виде прямой суммы*

$$\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2)=\widetilde{H}^s(K_d)\oplus\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2\setminus K_d).$$

Доказательство. Это простое следствие леммы 1.2. Действительно, единственное представление функции $\tilde{f}\in\widetilde{H}(h\mathbb{Z}^2)$ будет выглядеть следующим образом

$$\tilde{f}=B_h\tilde{f}+(I-B_h)\tilde{f}.$$

Единственность такого представления возможна только при $|s|<1/2$. □

Для описания картины разрешимости дискретного уравнения (1.3) понадобятся некоторые дополнительные элементы многомерного комплексного анализа. Мы рассмотрим эти вопросы в следующем разделе.

2. Периодическая волновая факторизация

Рассматриваемое здесь понятие является периодическим аналогом волновой факторизации [9]. Некоторые первые предварительные соображения и результаты были описаны в [10–13].

Определение 2.1. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представлением в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K)$, $\mathcal{T}_h(-K)$, соответственно, с оценками

$$c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}} \leq |A_{d,\neq}(\xi+i\tau)| \leq c_1'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}},$$

$$c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-æ}{2}} \leq |A_{d,=}(\xi-i\tau)| \leq c_2'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-æ}{2}},$$

и константами c_1, c_1', c_2, c_2', не зависящими от h, где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2\left((e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)}-1)^2+(e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)}-1)^2\right), \quad \xi=(\xi_1,\xi_2)\in\hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau-(\tau_1,\tau_2)\in K.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

К сожалению, у нас нет алгоритма построения такой факторизации. Но есть некоторые примеры периодических символов, которые допускают такую факторизацию. Приведем один из них.

Пусть f — произвольная функция дискретной переменной, $f \in S(h\mathbb{Z}^2)$, $supp\ f \subset K_d \cup (-K_d)$. Тогда имеем

$$f = \chi_+ f + \chi_- f,$$

где $\chi_\pm$ является характеристической функцией квадранта $\pm K_d$. Применяя дискретное преобразование Фурье, получаем представление $\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$, и функции $\tilde{f}_\pm$ допускают аналитическое продолжение в $\mathcal{T}_h(\pm K)$ согласно лемме 1.2. Таким образом, можем записать $\exp\tilde{f} = \exp\tilde{f}_+ \cdot \exp\tilde{f}_-$, и мы получаем периодическую волновую факторизацию с нулевым индексом для функции $\exp\tilde{f}$.

Везде ниже предполагается существование такой периодической волновой факторизации для символа $A_d(\xi)$ с индексом æ.

Сейчас мы рассмотрим наиболее простой случай, когда решение уравнения (1.3) существует и единственно.

Теорема 2.1. *Пусть $|æ - s| < 1/2$. Тогда уравнение (1.3) имеет единственное решение для произвольной правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$; решение дается формулой*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \tag{2.1}$$

где ℓv_d — произвольное продолжение v_d в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$.

Доказательство. Пусть ℓv_d — произвольное продолжение $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Введем функцию

$$w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}) - (A_d u_d)(\tilde{x}),$$

так, что $w(\tilde{x}) = 0$ для $\tilde{x} \notin K_d$.

Теперь запишем (1.3) в виде

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2,$$

и после применения дискретного преобразования Фурье и периодической волновой факторизации получаем

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A^{-1}_{d,=}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2. \tag{2.2}$$

Имеем следующие включения согласно лемме 1.1 и лемме 1.2

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(K_d), \quad A^{-1}_{d,=}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d), \quad A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2),$$

и тогда по лемме 1.3 правая часть уравнения (2.2) однозначно представима суммой

$$A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) = f^+_d(\xi) + f^-_d(\xi),$$

где

$$f^+_d(\xi) = B_h(A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \quad f^-_d(\xi) = (I - B_h)(A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)).$$

Далее перепишем равенство (2.2) в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - f^+_d(\xi) = f^-_d(\xi) - A^{-1}_{d,=}(\xi)\tilde{w}_d(\xi)$$

и, используя единственность представления в виде прямой суммы

$$\widetilde{H}^{s-æ}(K_d) \oplus \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d),$$

получаем, что и левая, и правая части должны быть равны нулю. Таким образом, справедливо равенство (2.1). □

3. Дискретная краевая задача

В этом разделе мы рассмотрим более интересный случай, когда уравнение (1.3) имеет множество решений. Здесь будут использованы некоторые результаты из [3] относительно формы дискретной (обобщенной) функции, сосредоточенной в начале координат.

Теорема 3.1. *Пусть* $æ - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. *Тогда общее решение уравнения* (1.3) *имеет следующий вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)Q_n(\xi)B_h(Q^{-1}_n(\xi)A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)) + A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_k(\xi_1)\hat{\zeta}^k_2 + \tilde{d}_k(\xi_2)\hat{\zeta}^k_1\right),$$

где $Q_n(\xi)$ *— произвольный многочлен степени* n *от переменных* $\zeta_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, *удовлетворяющий условию* (1.2) *с* $\alpha = n$; $\tilde{c}_k(\xi_1)$ *и* $\tilde{d}_k(\xi_2)$ *— произвольные функции из* $H^{s_k}(h\mathbb{T})$, $s_k = s - æ + k + 1/2$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

Имеет место априорная оценка

$$\|u_d\|_s \le const\left(\|f\|^+_{s-\alpha} + \sum_{k=0}^{n-1}([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k})\right),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ *обозначает норму в* $H^{s_k}(h\mathbb{R})$, *и* $const$ *не зависит от* h.

Доказательство. Начнем с уравнения (2.2). Пусть $Q_n(\xi)$ — произвольный многочлен степени n от переменных $\zeta_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, удовлетворяющий условию (1.2) с $\alpha = n$. Умножим уравнение (2.2) на $Q_n^{-1}(\xi)$

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2. \tag{3.1}$$

По лемме 1.1 имеем

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ+n}(h\mathbb{Z}^2),$$

а так как $s - æ + n = -\delta$, то по лемме 1.3 запишем единственное разложение

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) = F_d^+(\xi) + F_d^-(\xi),$$

где

$$F_d^+(\xi) = B_h(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \quad F_d^-(\xi) = (I - B_h)(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)).$$

Учитывая данный факт, перепишем равенство (3.1) в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = Q_n(\xi)F_d^+(\xi) + Q_n(\xi)F_d^-(\xi),$$

далее,

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - Q_n(\xi)F_d^+(\xi) = Q_n(\xi)F_d^-(\xi) - A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi).$$

Поскольку $F_d^+(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ+n}(K_d)$, $F_d^-(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ+n}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$, то по лемме 1.1 выполнено $Q_n(\xi)F_d^+(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(K_d)$, $Q_n(\xi)F_d^-(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$. Применяя обратное дискретное преобразование Фурье получаем равенство для двух дискретных (обобщенных) функций. Левая часть обращается в нуль при одном из условий $\tilde{x}_1 < 0$ или $\tilde{x}_2 < 0$, а правая часть обращается в нуль при условии $\tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_2 > 0$. Таким образом, это должна быть дискретная (обобщенная) функция, сосредоточенная на сторонах дискретного квадранта $\big\{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2 : \{\tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_2 = 0\} \cup \{\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 > 0\}\big\}$. Используя соответствующий результат из [3], мы получаем следующий вид этого распределения

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(c_k(\tilde{x}_1)(\Delta_2^{(k)}\delta_d)(\tilde{x}_2) + d_k(\tilde{x}_2)(\Delta_1^{(k)}\delta_d)(\tilde{x}_1)\Big),$$

где все слагаемые должны быть элементами пространства $H^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2)$.

Остается уточнить, сколько слагаемых нам нужно в правой части. Исходим из того, что каждое слагаемое должно принадлежать пространству $\widetilde{H}^s(\hbar\mathbb{T}^2)$.

Рассмотрим слагаемое $c_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Учитывая, что порядок $A_{d,+}^{-1}(\xi)$ равен $-æ$, нам нужно проверить конечность $H^{s-æ}$-нормы для $c_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Имеем

$$\begin{aligned}
\|c_k(\Delta_2^{(k)}\delta_d)\|_{s-æ}^2 &= \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1 + |\zeta^2|)^{s-æ}\|c_k(\xi_1)\zeta_2^k|^2 d\xi \\
&= \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1 + |\zeta^2|)^{s-æ}\|c_k(\xi_1)|^2|\zeta_2^k|^2 d\xi \le a_1\hbar^{2(s-æ+k+1/2)}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}}|c_k(\xi_1)|^2 d\xi_1 \\
&\le a_2\int\limits_{\hbar\mathbb{T}}(1 + |\zeta_1{}^2|)^{s-æ+k+1/2}|c_k(\xi_1)|^2 d\xi_1,
\end{aligned}$$

и константы a_1, a_2 не зависят от h.

Последнее слагаемое должно быть $(n-1)$-м, потому что для n-го слагаемого мы получаем положительный рост: для $k=n$ имеем

$$s_n = s - æ - n + 1/2 = -n - \delta + n + 1/2 = -\delta + 1/2 > 0.$$

Априорные оценки можно получить так же, как описано в [3]. □

Теперь рассмотрим для уравнения (1.3) случай $n=1$, т. е. $æ - s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$. Из теоремы 3.1 следует, что общим решением уравнения (1.3) является

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\big(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_2)\big), \tag{3.2}$$

где $c_0, d_0 \in H^{s-æ+1/2}(\hbar\mathbb{Z})$ являются произвольными функциями. Для их однозначного определения добавим к уравнению (1.3) следующие условия

$$\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \quad \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h^2 = 0. \tag{3.3}$$

Эти дополнительные условия помогут однозначно определить неизвестные функции c_0, d_0 в решении (3.2). Действительно, с помощью дискретного преобразования Фурье перепишем условия (3.3) в виде

$$\tilde{u}_d(0,\xi_2) = \tilde{f}_d(\xi_2), \quad \tilde{u}_d(\xi_1,0) = \tilde{g}_d(\xi_1), \quad \tilde{u}_d(0,0) = 0. \tag{3.4}$$

Теперь подставим формулы (3.4) в (3.2). Первые две формулы дадут равенства

$$\tilde{u}_d(0,\xi_2) = A^{-1}_{d,\neq}(0,\xi_2)(\tilde{c}_0(0) + \tilde{d}_0(\xi_2)) = \tilde{f}_d(\xi_2),$$

$$\tilde{u}_d(\xi_1,0) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi_1,0)(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(0)) = \tilde{g}_d(\xi_1).$$

Из этих равенств, согласно третьему условию, следует соотношение $\tilde{f}_d(0) = \tilde{g}_d(0)$, из которого получаем $\tilde{c}_0(0) + \tilde{d}_0(0) = 0$, и, значит, $\tilde{c}_0(0) = \tilde{d}_0(0) = 0$.

Таким образом, получаем

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\left(A_{d,\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_d(\xi_1) + A_{d,\neq}(0,\xi_2)\tilde{f}_d(\xi_2)\right). \tag{3.5}$$

Остается сформулировать и доказать следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть* $f_d, g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z}), v_d \equiv 0$. *Тогда дискретная задача* (1.3), (3.3) *имеет единственное решение, которое дается формулой* (3.5).

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq const(\|f_d\|_{s+1/2} + \|g_d\|_{s+1/2}),$$

где const не зависит от h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам нужно доказать только априорную оценку. Рассмотрим первое слагаемое

$$\|A^{-1}_{d,\neq}(\xi)A_{d,\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_d(\xi_1)\|^2_s = \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} |A^{-1}_{d,\neq}(\xi_1,\xi_2)A_{d,\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_d(\xi_1)|^2(1+|\zeta^2|)^s d\xi_1 d\xi_2$$

$$\leq C\hbar^{2s}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} |g_d(\xi_1)|^2 d\xi \leq C_1\hbar^{2s+1}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} |g_d(\xi_1)|^2 d\xi_1$$

$$\leq C_2\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} |g_d(\xi_1)|^2(1+|\zeta_1^2|)^{s+1/2} d\xi_1 = \|g_d\|^2_{s+1/2}.$$

Второе слагаемое оценивается аналогично. □

4. Сравнение дискретных и непрерывных решений

Непрерывный аналог дискретной краевой задачи (1.3), (3.3) описан в [14]. Здесь мы рассматриваем однородное дискретное уравнение (1.3), $v_d \equiv 0$.

Пусть A — псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^{\alpha} \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^{\alpha}$$

и допускающим волновую факторизацию по квадранту K с индексом æ. Рассмотрим уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{4.1}$$

со следующими дополнительными условиями

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 = g(x_1), \quad \int\limits_{-K} u(x)dx = 0. \tag{4.2}$$

Решение задачи (4.1), (4.2) разыскивается в пространстве $H^s(K)$ [9], а граничные функции берутся из пространства $H^{s+1/2}(\mathbb{R}_+)$. Такая задача рассматривалась в [14], она имеет решение

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\left(A_{\neq}(\xi_1, 0)\tilde{g}(\xi_1) + A_{\neq}(0, \xi_2)\tilde{f}(\xi_2)\right) \tag{4.3}$$

при условии, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [9] относительно K

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$$

с индексом æ таким, что $\text{æ} - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

Для построения дискретной краевой задачи, которая является достаточно точным приближением к (4.1), (4.2), следует выбрать $A_d(\xi)$ и f_d, g_d специальным образом. Введем оператор l_h, который действует следующим образом. Для функции u, заданной на $\mathbb{R}$, берется ее преобразование Фурье $\tilde{u}$, затем его сужение на $\hbar T$ и периодическое продолжение на $\mathbb{R}$. Наконец, берется его обратное дискретное преобразование Фурье и получается функция дискретного переменного $(l_h u)(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in h\mathbb{R}$. Таким образом,

$$f_d = l_h f, \quad g_d = l_h g.$$

Далее, аналогично строим символ дискретного оператора A_d. Если имеется волновая факторизация символа $A(\xi)$, мы определяем сужения сомножителей на $\hbar\mathbb{T}^2$ с последующим периодическим продолжением на $\mathbb{R}^2$, а периодический символ $A_d(\xi)$ является произведением этих сомножителей. Для таких f_d, g_d и символа $A_d(\xi)$ получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $f, g \in S(\mathbb{R})$, $\text{æ} > 1$. Тогда имеем следующую оценку для решений u и u_d непрерывной задачи (4.1), (4.2) и дискретной задачи (1.3), (3.3)*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \le C(f, g)h^{\beta},$$

где константа $C(f, g)$ зависит от функций f, g, число $\beta > 0$ может быть произвольным.

Доказательство. Нам нужно сравнить две функции (3.5) и (4.3), точнее их обратное дискретное преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье в точках $\tilde{x} \in K_d$. Имеем

$$\begin{aligned} u_d(\tilde{x}) - u(\tilde{x}) &= \frac{1}{4\pi^2}\Bigg(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi\Bigg) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}A_{\neq}^{-1}(\xi)\Big(A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}(\xi_1) + A_{\neq}(0,\xi_2)\tilde{f}(\xi_2)\Big)d\xi, \end{aligned}$$

так как, согласно нашему выбору A_d, f_d, g_d, функции $\tilde{u}_d$ и $\tilde{u}$ совпадают в точках $\xi \in \hbar\mathbb{T}^2$.

Оценим одно слагаемое. Так как $\tilde{g} \in S(\mathbb{R})$ имеем

$$\left|\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}A_{\neq}^{-1}(\xi)A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}(\xi_1)d\xi\right| \leq C\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}\frac{d\xi_2}{(1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{æ}}\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}|\xi_1|^{-\gamma}d\xi_1.$$

Отсюда следует требуемая оценка. □

5. Заключение

В этой статье мы рассмотрели только двумерный конус и специфические граничные условия, однако авторы продолжают работу в этом направлении и намерены рассмотреть дискретные краевые задачи с классическими условиями Дирихле и Неймана.

В качестве первых практических приложений авторы планируют изучить дискретный вариант задачи в четверти плоскости, возникающей в теории дифракции и теории упругости [9], в надежде, что это будет полезным следствием разработанной теории.

References

[1] А. А. Самарский, *Теория разностных систем*, Наука, М., 1977; англ. пер.:A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, CRC Press, Boca Raton, 2001.

[2] В. С. Рябенький, *Методы разностных потенциалов и его приложения*, Физматлит, М., 2010; англ. пер.:V. S. Ryaben'kii, *Method of Difference Potentials and its Applications*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2002.

[3] A. Vasilyev, V. Vasilyev, "Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space", *Mathematical Modelling and Analysis*, **23**:3 (2018), 492–506.

[4] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1978; англ. пер.:V. S. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics*, Mir Publ., Moscow, 1979.

[5] A. Vasilyev, V. Vasilyev, "Discrete singular operators and equations in a half-space", *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **3**:1 (2013), 84–93.

[6] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973; англ. пер.:G. I. Eskin, *Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations*, AMS, Providence, 1981.

[7] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 3-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер.:F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, 3rd ed., Dover Publications, Mineola, 1981.

[8] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, 3-е изд., Наука, М., 1968; англ. пер.:N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, 3rd ed., North Holland, Amsterdam, 1976.

[9] V. B. Vasil'ev, *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht–Boston–London, 2000.

[10] V. Vasilyev, "The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators", *AIP Conference Proceedings*, Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applications (ICNAAM-2016) (Rhodes, Greece, September 19–25), **1863**, AIP Publishing, New York, 2017, 140014.

[11] V. Vasilyev, "Discrete equations and periodic wave factorization", *AIP Conference Proceedings*, Proceedings of the Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016) (Almaty, Kazakhstan, September 7–10), **1759**, AIP Publishing, New York, 2016, 020126.

[12] V. Vasilyev, "On discrete boundary value problems", *AIP Conference Proceedings*, Proceedings of the International Conference "Functional Analysis in Interdisciplinary Applications" (FAIA2017) (Astana, Kazakhstan, October 2–5), **1880**, AIP Publishing, New York, 2017, 050010.

[13] V. B. Vasilyev, "Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization", *Integral Methods in Science and Engineering*. V. 1: *Theoretical Technique*, eds. C. Constanda, M. Dalla Riva, P. D. Lamberti, P. Musolino, Springer International Publ., New York, 2017, 315–324.

[14] V. B. Vasil'ev, "On Some new boundary-value problems in nonsmooth domains", *Journal of Mathematical Sciences*, **173**:2 (2011), 225–230.

Информация об авторах

Васильев Владимир Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация. E-mail: vbv57@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9351-8084

Машинец Анастасия Александровна, аспирант, кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация. E-mail: anastasia.kho@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2440-8556

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Васильев Владимир Борисович
E-mail: vbv57@inbox.ru

Поступила в редакцию 19.04.2023 г.
Поступила после рецензирования 31.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the authors

Vladimir B. Vasilyev, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Applied Mathematics And Computer Modeling Department. Belgorod National Research University, Belgorod, Russian Federation. E-mail: vbv57@inbox.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9351-8084

Anastasia A. Mashinets, Post-Graduate Student, Applied Mathematics and Computer Modeling Department. Belgorod National Research University, Belgorod, Russian Federation. E-mail: anastasia.kho@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2440-8556

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vladimir B. Vasilyev
E-mail: vbv57@inbox.ru

Received 19.04.2023
Reviewed 31.05.2023
Accepted for press 09.06.2023