К. М. Чудинов, Об асимптотике решений дифференциального уравнения с несколькими переменными запаздывания, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2009, часть 3, 237–239 где $R(x, x_0)$ — регулярная в точке (x, x_0) функция.

Фундаментальное решение обладает следующим свойством

$$\mathcal{E}\left(x, x_0\right) = O\left(\left(\rho_{xx_0}^2\right)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2}+\frac{2-\alpha}{2}\right)}\right) \text{ при } |x| \to \infty,$$

где $\rho_{xx_0}^2 = |x - x_0|^2$.

1. *Чеботарева Э. В.* Интегральное представление решения одного вырождающегося B-эллиптического уравнения первого рода / В сб.: *Актуальные проблемы современной науки*: Тр. 2-го Международн. форума молодых ученых (7-й Международн. конф.). Ч. 1–3: Естественные науки. — Самара: СамГТУ, 2006. — С. 107–111.
2. *Weinstein A.* Discontinuous integrals and generalized potential theory // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1948. — Vol. 63, No. 2. — P. 342–354.

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,

420021, г. Казань, ул. Татарстан, 2.

elvchb@mail.ru

УДК 517.929

К. М. Чудинов

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a_0 \in \mathbb{R}$, a_k, $\omega_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $r_k \colon \mathbb{R}_+ \to [0, \omega_k]$.

Чтобы определить решение уравнения (1) необходимо задать значения $x(t)$ при $t \notin \mathbb{R}_+$ и указать, каким классам принадлежат входящие в уравнение функции. Мы сделаем это в соответствии с подходом, описанным в [1]: положим $x(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi < 0$, где функция φ суммируема на любом конечном отрезке отрицательной полуоси; функции r_k положим измеримыми по Лебегу.

Решением уравнения (1) будем называть абсолютно непрерывную функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, в соответствии с чем равенство левой и правой частей уравнения (1) будем понимать в смысле «почти всюду».

Определение. Уравнение (1) назовем *глобально* (*экспоненциально*) *устойчивым* (при заданных параметрах a_k и ω_k), если для всех измеримых функций $r_k\colon \mathbb{R}_+ \to [0, \omega_k]$ оно является равномерно (экспоненциально) устойчивым.

Постановка задачи глобальной устойчивости уравнений с последействием имеет давнюю историю (начиная с классической работы А. Д. Мышкиса [2]).

В данной работе приводится критерий глобальной устойчивости уравнения (1), позволяющий эффективно устанавливать необходимые и достаточные условия глобальной устойчивости многих подклассов этого уравнения в терминах параметров a_k и ω_k.

Определим функцию y как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a_0 y(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(t-\omega_k), & t \in \mathbb{R}_+, \\ y(t) = 1, & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Если $a_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k < 0$, то функция y монотонно убывает на некотором отрезке $[0, d]$, где $d > 0$. Будем предполагать, что указанное неравенство для коэффициентов уравнения (1) справедливо и отрезок убывания функции y имеет конечную длину, то есть существует $l = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \varepsilon)(y(t+\delta) \geqslant y(t))\}$. Положим $h = -y(l)$. Нетрудно убедиться, что $h > 0$.

Теорема. *Пусть x — решение уравнения* (1), *для которого величины l и h определены указанным выше образом и $h \leqslant 1$. Тогда если $|x(t)| \leqslant M$ для всех $t \in [t_0 - l, t_0]$, где $t_0 \geqslant l$ и $|x(t_0)| \leqslant hM$, то $|x(t)| \leqslant hM$ для всех $t \geqslant t_0$.*

Следствие 1. *Уравнение* (1) *глобально устойчиво, если и только если $h \leqslant 1$.*

Следствие 2. *Уравнение* (1) *глобально экспоненциально устойчиво, если и только если $h < 1$.*

Приведённые результаты позволяют устанавливать коэффициентные признаки глобальной устойчивости подклассов уравнения (1) путем прямого вычисления поведения решения задачи (2).

Пример. Пусть $a_0 = 0$, $n = 1$. С помощью несложного рассчета и применения следствий 1 и 2 получаем, что уравнение $\dot{x}(t) = ax(t - r(t))$, где $0 \leqslant r(t) \leqslant \omega$, глобально (экспоненциально) устойчиво, если и только если $a\omega \leqslant 3/2$ ($a\omega < 3/2$) [2].

Необходимые и достаточные условия глобальной устойчивости уравнения (1) в случае $a_0 = 0$ и $\omega_1 = \ldots = \omega_n = \omega$ в терминах параметров a_k и ω получены в работе [3], где применена идея использования вспомогательного уравнения, поведение решений которого поддается рассчету.

В работе [4] проведено подробное исследование предложенным выше методом устойчивости уравнения (1) в случае $a = 0$, $n = 2$. Результаты этого исследования, в частности, показывают, что область устойчивости такого уравнения на плоскости в координатах $(a_1\omega_1, a_2\omega_2)$ представляет собой криволинейный треугольник с вершинами в точках $(0, 0)$, $(3/2, 0)$ и $(0, b)$, где параметр b, который при $\omega_1 = \omega_2$ равняется $3/2$, с ростом отношения $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ (при фиксированных a_1 и a_2) уменьшается.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введние в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
2. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравниений превого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // *Матем. сб.*, 1951. — Т. 28(70), № 3. — С. 641–658.
3. *Малыгина В. В.* Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // *Изв. вузов. Матем.*, 1993. — № 5. — С. 72–85.
4. *Малыгина В. В., Куликов А. Ю., Чудинов К. М.* Неулучшаемые достаточные условия устойчивости скалярных уравнений с несколькими запаздываниями / В сб.: *Вычислительная механика, № 7*: Сб. науч. тр.. — Пермь: ПГТУ, 2008. — С. 106–119.

Кафедра вычислительной математики и механики,

Пермский государственный технический университет;

614000, г. Пермь, Комсомольский пр., 29.

cyril@list.ru