Yu. M. Berezanskii, Direct and inverse spectral problems for a Jacobi field,
Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, Issue 6, 38–61

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

Посвящаю эту статью памяти дорогого учителя М. Г. Крейна, работы которого определили направление моих исследований

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЯКОБИЕВА ПОЛЯ

© Ю. М. Березанский

Под якобиевым полем понимается семейство $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ существенно самосопряженных коммутирующих операторов $A(\varphi)$, действующих в пространстве Фока $\mathcal{F}(H)$, имеющих якобиеву структуру и линейно зависящих от φ. Для случая конечномерного H доказывается теорема о разложении по обобщенным совместным собственным векторам семейства A, изучается обратная задача восстановления поля по его спектральной мере и рассматривается одно приложение полученных результатов к интегрированию нелинейных уравнений (неабелевой цепочки Тоды).

§0. Введение

Автором в [1] было введено понятие коммутативного якобиева поля в пространстве Фока, основанное на идеях работ [2, 3]. Таким полем называется семейство $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ коммутирующих существенно самосопряженных операторов $A(\varphi)$, линейно зависящих от параметра φ, пробегающего вещественное гильбертово пространство H. Эти операторы действуют в симметрическом пространстве Фока $\mathcal{F}(H)$, построенном по H, и имеют якобиеву структуру относительно разложения $\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(H)$, где $\mathcal{F}_n(H)$ — n-частичные подпространства.

В [1] это понятие было введено в связи с обобщением анализа белого шума [4, 5] (т.е. некоторой теории обобщенных функций бесконечного числа переменных) на случай спаривания при помощи более общей, чем гауссова, меры. Преобразование Фурье, связанное с разложением по обобщенным совместным собственным векторам поля A, обобщало преобразование Винера–Ито–Сигала, известное в теории белого шума.

Ключевые слова: якобиева матрица, симметричное тензорное произведение, спектральная мера, ортогональные полиномы.

Впоследствии под влиянием работ [6–10] стало ясно, что подобная конструкция интересна и в более простом случае конечномерного H (если $\dim H = 1$, мы приходим к классической теории якобиевой матрицы J: в этом случае $A(\varphi) = \varphi J$, $\varphi \in \mathbb{R}^1$). В этой статье мы получаем основные факты спектральной теории таких полей для *конечномерного* H, именно, доказываем теорему о разложении по собственным векторам и рассматриваем обратную задачу восстановления поля по его спектральной мере; эта задача в рассматриваемом случае имеет отличия от классической.

Отметим, что конструкции [1] и эта статья тесно связаны также с теорией операторных якобиевых самосопряженных матриц, действующих в ортогональной сумме $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \ldots$ одного и того же гильбертова пространства $\mathcal{H}$ [11, 12]. В этой теории рассматривается одна операторная якобиева матрица с обратимыми в $\mathcal{H}$ операторами, стоящими на двух смежных с главной диагоналях. Это существенное требование регулярности в случае поля A не выполняется, так как $\mathcal{F}_n(H)$ имеют разные размерности, а $\mathcal{F}_0(H) = \mathbb{C}^1$. Оно заменяется требованием регулярности A (аксиома [F3, см. п. 2]), связанным с цикличностью вакуумного вектора из $\mathcal{F}(H)$ относительно семейства A.

В последнем параграфе статьи рассматривается одна неабелева цепочка Тоды, которая может быть изучена посредством развитой спектральной теории подобно подходу [13–15] в случае классической цепочки Тоды. Подобные неабелевы цепочки Тоды изучались, например, в [16–18]. В [18] для их интегрирования применялась упомянутая выше спектральная теория операторных якобиевых матриц, при этом с решением цепочки связывалась одна такая матрица, эволюция во времени операторнозначной спектральной меры которой достаточно проста. В нашем случае с решением рассматриваемой цепочки связывается поле A, его скалярная спектральная мера, определенная на H, также имеет достаточно простую эволюцию.

§1. Пространство Фока и его оснащение

Пусть H — вещественное d-мерное ($1 \leqslant d < \infty$) пространство, образуем соответствующее бозонное пространство Фока $\mathcal{F}(H)$:

$$\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(H), \tag{1.1}$$

где n-частичное подпространство $\mathcal{F}_n(H)$ совпадает с n-й симметрической тензорной степенью комплексификации H_c пространства H : $\mathcal{F}_n(H) = H_c^{\widehat{\otimes} n}$; $\mathcal{F}_0(H) = \mathbb{C}^1$ ($\widehat{\otimes}$ обозначает симметрическое тензорное произведение). Векторы $f \in \mathcal{F}(H)$ имеют вид

$$f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad f_n \in \mathcal{F}_n(H) = H_c^{\widehat{\otimes} n}; \quad \|f\|^2_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(H)} < \infty. \tag{1.2}$$

Наряду с $\mathcal{F}(H)$ мы будем рассматривать и соответствующее взвешенное пространство Фока $\mathcal{F}(H,p)$ (вес $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n > 0$). Оно определяется аналогично (1.1), однако квадрат нормы в n-частичном подпространстве умножается на p_n. Таким образом, для $f \in \mathcal{F}(H,p)$ имеем

$$f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad f_n \in \mathcal{F}_n(H) = H_c^{\hat{\otimes} n}; \quad \|f\|^2_{\mathcal{F}(H,p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(H)} p_n < \infty \tag{1.3}$$

с соответствующим скалярным произведением. Совокупность $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$ финитных последовательностей плотна в любом $\mathcal{F}(H,p)$, ее мы будем понимать как линейное топологическое пространство с покоординатной равномерно финитной сходимостью.

Пусть $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geqslant 1$. Тогда можно образовать цепочку пространств

$$\times_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(H) = \mathcal{F}'(H) \supset \mathcal{F}(H,p^{-1}) \supset \mathcal{F}(H) \supset \mathcal{F}(H,p) \supset \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H), \tag{1.4}$$

где $\mathcal{F}(H,p)$ — позитивное пространство и $\mathcal{F}(H,p^{-1}) = \mathcal{F}'(H,p)$, $p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ — соответствующее негативное пространство. Вложение $\mathcal{F}(H,p) \hookrightarrow \mathcal{F}(H)$ будет квазиядерным (т.е. оператор вложения — Гильберта-Шмидта) тогда и только тогда, когда p_n достаточно быстро стремится к $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty. \tag{1.5}$$

Отметим, что в пространствах Фока (1.4) имеется естественная инволюция, порожденная комплексным сопряжением: $\bar{f} = (\bar{f}_n)_{n=0}^{\infty} = (\bar{f}_n)_{n=0}^{\infty}$.

В пространство $\mathcal{F}(H)$ удобно ввести вещественный базис чисел заполнения (БЧЗ). Для этого зафиксируем ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^{d}$ в H (так что в этом базисе $H = \mathbb{R}^d$) и при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ введем векторы

$$\begin{gathered} e_\alpha = \left(\frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}\right)^{1/2} e_1^{\otimes \alpha_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} e_d^{\otimes \alpha_d}, \\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_d; \\ e_j^{\otimes 0} = 1. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что векторы (1.6) образуют ортонормированный базис в $\mathcal{F}_n(H)$; их количество равно $C_{n+d-1}^{n} = \dim \mathcal{F}_n(H)$. Отождествляя вектор e_α с вектором $e_\alpha = (0, \ldots, 0, e_\alpha, 0, 0, \ldots)$ (e_α стоит на $|\alpha|$-м месте), заключаем, что векторы (1.6) при различных $n = 1, 2, \ldots$ и вектор $\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$ (вакуум) образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{F}(H)$. Это и есть БЧЗ. Сейчас $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d = Z_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (d раз).

Координаты в базисе (1.6) будем записывать в виде: для $f_n \in \mathcal{F}_n(H)$: $f_{n,\alpha} = (f_n, e_\alpha)_{\mathcal{F}_n(H)}$, $|\alpha| = n \in \mathbb{N}$; для любого $f \in F(H)$ и произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$: $f_\alpha = (f, e_\alpha)_{F(H)}$.

§2. Коммутативное якобиевое поле и спектральная теорема для него

Коммутативным якобиевым полем в пространстве $\mathcal{F}(H)$ будем называть семейство $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ существенно самосопряженных коммутирующих операторов $A(\varphi)$, действующих в $\mathcal{F}(H)$, определенных на $\mathrm{Dom}(A(\varphi)) = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

[F1] Каждый оператор $A(\varphi)$ имеет вид операторной якобиевой матрицы относительно разложения (1.1):

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} b_0(\varphi) & a_0^*(\varphi) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0(\varphi) & b_1(\varphi) & a_1^*(\varphi) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1(\varphi) & b_2(\varphi) & a_2^*(\varphi) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ $a_n(\varphi) : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_{n+1}(H)$, $b_n(\varphi) : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H)$, $a_n^*(\varphi) = (a_n(\varphi))^* : \mathcal{F}_{n+1}(H) \to \mathcal{F}_n(H)$ — линейные вещественные операторы, действующие в конечномерных пространствах $\mathcal{F}_m(H)$. Таким образом, $\forall \varphi \in H$

$$\begin{aligned} (A(\varphi)f)_n &= a_{n-1}(\varphi)f_{n-1} + b_n(\varphi)f_n + a_n^*(\varphi p)f_{n+1}, \\ & f \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H), \ n \in \mathbb{Z}_+, \ a_{-1}(\varphi) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

и оператор $A(\varphi)$ вещественен относительно инволюции — в пространстве Фока (т.е. $A(\varphi)\bar{f} = \overline{A(\varphi)f}$, $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H)$).

[F2] Отображения $H \ni \varphi \mapsto a_n(\varphi)$, $b_n(\varphi)$ (а значит, и $H \ni \varphi \mapsto a_n^*(\varphi)$) являются линейными отображениями в соответствующие пространства операторов $a_n(\varphi)$, $b_n(\varphi)$ и $a_n^*(\varphi)$; $n \in \mathbb{Z}_+$.

[F3] Рассмотрим $\forall n \in \mathbb{N}$ вещественный оператор $V_{n,n} : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H)$, определенный равенством

$$\begin{gathered} a_{n-1}(\varphi)P_{n-1}(x) + b_n(\varphi)P_n(x) + a_n^*(\varphi)P_{n+1}(x) = (x,\varphi)_H P_n(x), \quad P_0(x) = 1; \\ n \in \mathbb{Z}_+, \quad x, \varphi \in H. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Предполагается, что этот оператор имеет обратный, определенный на всем $\mathcal{F}_n(H)$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что определение (2.3) оператора $V_{n,n}$, записанное в базисе (1.6) БЧЗ, эквивалентно равенству: $\forall f_n \in \mathcal{F}_n(H)$

$$\begin{aligned} V_{n,n}f_n &= V_{n,n}\Bigg(\sum_{|\alpha|=n} f_{n,\alpha}e_\alpha\Bigg) \\ &= \sum_{|\alpha|=n} f_{n,\alpha}(A^{\alpha_1}(e_1)\dots A^{\alpha_d}(e_d)\Omega)_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Положим также $V_{0,0}f_0 = f_0$, $f_0 \in \mathbb{C}^1$.

По заданной скалярной (классической) самосопряженной якобиевой матрице $J = \{a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots\}$ с элементами $b_0, b_1, \dots \in \mathbb{R}^1$ на главной диагонали и ненулевыми $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}^1$ на двух смежных диагоналях можно построить якобиево поле с $d = 1$, полагая $a_n(\varphi) = a_n\,\varphi$, $b_n(\varphi) = b_n\,\varphi$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in H = \mathbb{R}^1$ $(e_1 = 1)$, т.е. $A(\varphi) = \varphi\, J$. Сейчас $\forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{n,n}h = a_{n-1}\dots a_0 h, \quad h \in H_c^{\widehat{\otimes} n} = \mathbb{C}^1.$$

Аналогично можно строить поле по d коммутирующим самосопряженным матрицам в $\mathcal{F}(H)$ $J_1, \dots, J_d$, полагая

$$A(\varphi) = \varphi_1\, J_1 + \dots + \varphi_\alpha\, J_\alpha, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha) \in H = \mathbb{R}^d.$$

По заданному полю $(A(\varphi))_{\varphi \in H}$ введем операторы „рождения", „нейтральный" и „уничтожения" $A_+(\varphi)$, $B(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$, оставляя в матрице (2.1) для $A(\varphi)$ соответственно нижнюю, среднюю и верхнюю диагонали, а остальные элементы заменяя нулями. Таким образом,

$$A(\varphi) = A_+(\varphi) + B(\varphi) + A_-(\varphi), \quad \varphi \in H, \tag{2.5}$$

где операторы $A_+(\varphi)$, $B(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ считаются заданными на $\mathcal{F}_{\text{fin}}(H)$ и переводят соответственно $\mathcal{F}_n(H)$ в $\mathcal{F}_{n+1}(H)$, в $\mathcal{F}_n(H)$ и $\mathcal{F}_{n+1}(H)$ в $\mathcal{F}_n(H)$. Ясно также, что $A_-(\varphi) = (A_+(\varphi))^* \restriction \mathcal{F}_{\text{fin}}(H)$ и

$$(A(\varphi_1)\dots A(\varphi_n)\Omega)_n = A_+(\varphi_1)\dots A_+(\varphi_n)\Omega, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in H, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

К семейству коммутирующих самосопряженных операторов $(\tilde{A}(\varphi))_{\varphi \in H}$ ($\sim$ означает замыкание) можно применить общие факты о разложении по обобщенным совместным собственным векторам операторов $\tilde{A}(\varphi)$, линейно зависящих от параметра $\varphi \in H$ [5, гл. 4, теорема 1.6; гл. 3, теорема 3.2], [19, гл.2, теорема 4.4 и 2.10], см. также [20, гл. 15].

Для этой цели нужно построить квазиядерную цепочку пространств, оснащающих $\mathcal{H} = \mathcal{F}(H) : \mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+ \supset D$ и стандартно связанных с операторами семейства. Цепочка в нашем случае имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}(H, p^{-1}) & \supset & \mathcal{F}(H) & \supset & \mathcal{F}(H, p) & \supset & \mathcal{F}_{\text{fin}}(H), \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \mathcal{H}_- & & \mathcal{H} & & \mathcal{H}_+ & & D \end{array} \tag{2.7}$$

где вес p выбран так, чтобы выполнялось условие (1.5), обеспечивающее квазиядерность вложения $\mathcal{H}_+ \hookrightarrow \mathcal{H}$.

Сформулируем результат о спектральном разложении, получаемый на этом пути.

Теорема 2.1. *Для якобиева поля $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ и оснащения* (2.7) *существует борелевская вероятностная мера ρ на пространстве H (спектральная мера) такая, что преобразование Фурье*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H,p) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \hat{f}(x) &= (If)(x) = (f, P(x))_{\mathcal{F}(H)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x))_{\mathcal{F}_n(H)} \in L^2(H, d\rho(x)) \end{aligned} \tag{2.8}$$

после расширения по непрерывности является унитарным оператором из пространства $\mathcal{F}(H)$ на все пространство $L^2(H, d\rho(x))$.

В (2.8) $P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность вещественных векторных полиномов 1-го рода $H \ni x \mapsto P_n(x) \in \mathcal{F}_n(H)$, связанных с полем A; $P_0(x) = 1, x \in H$. Они удовлетворяют $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ рекуррентному отношению, их определяющему:*

$$\begin{gathered} P_n(x) = W_{n,n} x^{\otimes n} + \sum_{j=0}^{n-1} W_{n,j} P_j(x); \\ W_{n,n} = (V_{n,n}^*)^{-1}, \qquad W_{n,j} = -(V_{n,n}^*)^{-1} V_{j,n}^* : \mathcal{F}_j(H) \to \mathcal{F}_n(H). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь $\forall j = 0, \ldots, n-1$ линейные операторы $V_{j,n} : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_j(H)$ задаются равенством типа (2.3):

$$V_{j,n}(\varphi_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \varphi_n) = (A(\varphi_1) \ldots A(\varphi_n)\Omega)_j, \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H. \tag{2.10}$$

Эти векторные полиномы $P_n(x)$ являются решением системы операторных уравнений

$$\begin{gathered} a_{n-1}(\varphi) P_{n-1}(x) + b_n(\varphi) P_n(x) + a_n^*(\varphi) P_{n+1}(x) = (x, \varphi)_H P_n(x), \quad P_0(x) = 1; \\ n \in \mathbb{Z}_+, \quad x, \varphi \in H. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Последовательность $P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ для ρ-почти каждого $x \in H$ входит в негативное пространство $\mathcal{F}(H, p^{-1})$ и является обобщенным совместным собственным вектором семейства $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$, отвечающему собственному значению $x \in H$ (и поэтому $P(x)$ — обобщенный собственный вектор оператора $A(\varphi)$ с собственным значением $(x, \varphi)_H$).

Унитарное отображение (2.8) *отображает оператор $A(\varphi)$ в оператор умножения на функцию $H \ni x \mapsto (x, \varphi)_H \in \mathbb{R}^1$ в пространстве $L^2(H, d\rho(x))$. Ряд* (2.8) *абсолютно сходится для ρ-почти всех $x \in H$.*

В одномерном случае скалярной якобиевой матрицы, т.е. при $d = 1$, полиномы (2.9), (2.11) действительно являются классическими полиномами 1-го рода.

Доказательство. Надо проверить выполнение условий упомянутых теорем из [5, 19]. Каждый оператор $A(\varphi)$ вида (2.2) стандартно связан с цепочкой (2.7): он непрерывно действует из D в $\mathcal{H}_+$ ввиду характера сходимости в D (векторы последовательности должны быть равномерно финитны) и конечномерности пространств $\mathcal{F}_n(H)$. Ясно также, что $\forall f \in D$ отображение $H \ni \varphi \mapsto A(\varphi)f \in \mathcal{H}_+$ линейно и непрерывно.

Более сложно доказывается, что Ω является сильным циклическим вектором для семейства A. Этот факт является следствием требования [F3], и мы его докажем несколько позже.

Докажем, что если решение $P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $P_n(x) \in \mathcal{F}_n(H)$, $x \in H$, системы (2.11) существует, то оно имеет вид (2.9).

Эта система может быть переписана в виде

$$(P(x), A(\varphi)f)_{\mathcal{F}(H)} = (x, \varphi)_H (P(x), f)_{\mathcal{F}(H)}, \quad f \in \mathcal{F}_{\text{fin}}(H), \ \ x, \varphi \in H. \tag{2.12}$$

Полагая в (2.12) $f \in \Omega$ и итерируя это равенство, получим $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(P(x), (A(\varphi))^n \Omega)_{\mathcal{F}(H)} &= (x, \varphi)_H (P(x), (A(\varphi))^{n-1}\Omega)_{\mathcal{F}(H)} \\ &= \cdots = (x, \varphi)_H^n (P(x), \Omega)_{\mathcal{F}(H)} = (x^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n})_{\mathcal{F}_n(H)} 1.\end{aligned} \tag{2.13}$$

С другой стороны, замечая, что $(A(\varphi))^n \Omega \in \bigoplus_{j=0}^n \mathcal{F}_j(H)$, и раскладывая этот вектор по компонентам $\mathcal{F}_j(H)$, получим, используя операторы $V_{j,n}$ и равенство (2.13):

$$\begin{aligned}(x^{\otimes n}, \varphi^{\otimes n})_{\mathcal{F}_n(H)} &= (P(x), (A(\varphi))^n \Omega)_{\mathcal{F}(H)} \\ &= \sum_{j=0}^n (P_j(x), ((A(\varphi))^n \Omega)_j)_{\mathcal{F}_j(H)} = \sum_{j=0}^n (P_j(x), V_{j,n}(\varphi^{\otimes n}))_{\mathcal{F}_j(H)} \\ &= \sum_{j=0}^n (V_{j,n}^* P_j(x), \varphi^{\otimes n})_{\mathcal{F}_n(H)}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Так как векторы $\varphi^{\otimes n}$, $\varphi \in H$, образуют тотальное множество в пространстве $\mathcal{F}_n(H)$, то из (2.14) следует:

$$x^{\otimes n} = \sum_{j=0}^n V_{j,n}^* P_j(x), \quad x \in H, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Применяя к (2.15) оператор $W_{n,n} = (V_{n,n}^*)^{-1}$, получим (2.9).

Обратно, построим $P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $P_n(x) \in \mathcal{F}_n(H)$, $x \in H$, последовательно применяя соотношения (2.9). Так как (2.9) и (2.15) эквивалентны, то для

$P(x)$ будет выполняться (2.15), а значит, и равенство (2.14) с заменой $\varphi^{\otimes n}$ на $\varphi_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \varphi_n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$, и соответствующее обобщение (2.13):

$$(P(x), A(\varphi)A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)\Omega)_{\mathcal{F}(H)} = (x,\varphi)_H (x,\varphi_1)_H \ldots (x,\varphi_n)_H \tag{2.16}$$

Используя (2.16) и такое же равенство для $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, найдем

$$\begin{aligned}(P(x), A(\varphi)(A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)\Omega))_{\mathcal{F}(H)} &= (x,\varphi)_H ((x,\varphi_1)_H \ldots (x,\varphi_n)_H) \\ &= (x,\varphi)_H (P(x), A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)\Omega)_{\mathcal{F}(H)}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Выбирая в (2.17) произвольные $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и $n \in \mathbb{N}$, мы, согласно сильной цикличности вакуума Ω, получим равенство

$$(P(x), A(\varphi)f)_{\mathcal{F}(H)} = (x,\varphi)_H (P(x), f)_{\mathcal{F}(H)}$$

для тотального в $\mathcal{F}(H,p)$ множества векторов f. Отсюда вытекает справедливость (2.12), и, следовательно, построенная последовательность $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет системе уравнений (2.11).

Итак, существование решения системы (2.11) и вид (2.9) этого решения установлены.

Согласно применяемым теоремам о разложении для семейства $(\tilde{A}(\varphi))_{\varphi\in H}$, существуют борелевская вероятностная мера ρ на H и ρ-почти для каждого $x \in H$ полная система обобщенных собственных векторов $\xi(x) \in \mathcal{H}_-$, удовлетворяющих равенству

$$(\xi(x), A(\varphi)f)_{\mathcal{F}(H)} = (x,\varphi)_H (\xi(x), f)_{\mathcal{F}(H)}, \quad f \in D. \tag{2.18}$$

Ее полнота следует из того, что преобразование Фурье

$$\mathcal{H}_+ \ni f \mapsto \hat{f}(x) = (f, \xi(x))_{\mathcal{F}(H)} \in L^2(H, d\rho(x)) \tag{2.19}$$

действует изометрично из $\mathcal{H}$ в $L^2(H, d\rho(x))$ и образы $\hat{f}(x)$ образуют плотное множество в этом пространстве.

В нашем случае $\xi(x) \in \mathcal{H}_- = \mathcal{F}(H, p^{-1})$, и поэтому имеет вид $\xi(x) = P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$. Соотношение (2.18) эквивалентно равенству (2.12), т.е. $P(x)$ есть решение системы (2.11). При этом ρ-почти для каждого $x \in H$ имеем $P(x) \neq 0$, откуда, как следует из (2.13), и $P_0(x) \neq 0$. Поэтому решение $P(x)$ всегда можно умножением на $(P_0(x))^{-1}$ превратить в такое, что $P_0(x) = 1$, и записать его в виде (2.9).

Общее преобразование Фурье (2.19) сейчас имеет вид (2.8) благодаря виду пространств цепочки (2.7), с использованием которой строилось разложение.

Остальные утверждения теоремы — интерпретация соответствующих фактов из [5, 19].

Осталось доказать сильную цикличность вакуума Ω, т.е. нужно доказать, что $\Omega \in \mathrm{Dom}(A(\varphi_1)\dots A(\varphi_n))$ при произвольных $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in H$ и векторы $A(\varphi_1)\dots A(\varphi_n)\Omega$ (при изменении $n \in \mathbb{N}$) и Ω образуют тотальную систему в пространстве $\mathcal{H}_+ = \mathcal{F}(H,p)$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, множество $\{\varphi^{\otimes n} \mid \varphi \in H\}$ является тотальным в $\mathcal{F}_n(H)$. Благодаря обратимости оператора $V_{n,n}$ эта тотальность влечет тотальность в $\mathcal{F}_n(H)$ и множества

$$\{V_{n,n}(\varphi^{\otimes n}) = a_{n-1}(\varphi)\dots a_0(\varphi)1 = ((A_+(\varphi))^n\Omega)_n \mid \varphi \in H\}, \tag{2.20}$$

где $A_+(\varphi)$ определено в (2.5). Из тотальности (2.20) следует тотальность множества

$$\{\Omega, A_+(\varphi_1)\dots A_+(\varphi_n)\Omega \mid \varphi_1,\dots,\varphi_n \in H, n = 1,\dots,m\} \tag{2.21}$$

в $\bigoplus_{n=0}^{m} \mathcal{F}_n(H) = F_m$, $m \in \mathbb{Z}_+$ (более удобно использовать различные φ в (2.20)).

Докажем, что множество, полученное из (2.21) заменой операторов $A_+(\varphi_j)$ на $A(\varphi_j)$, тотальное в F_m. Для этого предположим по индукции, что множество

$$\{\Omega, A(\varphi_1)\dots A(\varphi_n)\Omega \mid \varphi_1,\dots,\varphi_n \in H, n = 1,\dots,m\} \tag{2.22}$$

тотальное в F_m для $m = 0,\dots,k$ и докажем тотальность для $m = k+1$.

Пусть f — вектор из F_{k+1} и $\varepsilon > 0$. Так как множество (2.21) тотальное для $m = k+1$, то существует вектор g, являющийся линейной комбинацией векторов Ω, $A_+(\varphi_1^{(1)})\Omega,\dots,A_+(\varphi_1^{(k+1)})\dots A_+(\varphi_{k+1}^{(k+1)})\Omega$, такой, что $\|f-g\|_{F_{k+1}} < \varepsilon$.

Используя равенство $A_+(\varphi) = A(\varphi) - B(\varphi) - A_-(\varphi)$, сконструируем по вектору g вектор h, заменяя в представлении g операторы $A_+(\varphi)$ на $A(\varphi)$. В результате можно написать, что $g = h + r$, где h является линейной комбинацией векторов Ω, $A(\varphi_1^{(k+1)})\Omega,\dots,A(\varphi_1^{(k+1)})\dots A(\varphi_{k+1}^{(k+1)})\Omega$, а r конструируется с использованием операторов $B(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ вместо $A(\varphi)$. Следовательно, $r \in F_k$ в соответствии с действием операторов $B(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$. Согласно предположению индукции, вектор r может быть аппроксимирован линейной комбинацией s векторов из (2.21) для $m = k : \|r-s\|_{F_k} < \varepsilon$.

В результате получаем $\|f-(h+s)\|_{F_{k+1}} \leqslant \|f-(h+r)\|_{F_{k+1}} + \|r-s\|_{F_k} < 2\varepsilon$ и $h+s$ является линейной комбинацией векторов (2.21) для $m = k+1$.

Так как утверждение верно для $k = 1$, то множество (2.21) будет тотальным в F_m для произвольного $m \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда и из конструкции пространства $\mathcal{F}(H,p)$ следует, что множество (2.21) при $m = \infty$ является тотальным в этом пространстве. Иными словами, Ω является сильным циклическим вектором. •

§3. Изучение преобразования Фурье

Согласно теореме 2.1 преобразование Фурье $\mathcal{F}(H) \ni f \mapsto \hat{f}(x) \in L^2(H, d\rho(x))$ определяется на $f \in \mathcal{F}(H,p) \subset \mathcal{F}(H)$ посредством формулы (2.8), а затем распространяется по непрерывности до унитарного оператора I, отображающего все $\mathcal{F}(H)$ на все $L^2(H, d\rho(x)) =: (L^2)$.

Обозначим через $\mathcal{P}_n(H)$ множество всех полиномов на H степени, меньшей или равной n, т.е. функций

$$H \ni x \mapsto p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (x^{\otimes j}, a_j)_{F_j(H)} \in \mathbb{C}^1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.1}$$

с коэффициентами $a_j \in F_j(H)$. Если $a_n \neq 0$, то (3.1) — полином степени n; $\mathcal{P}(H) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(H)$ является множеством всех полиномов.

Из рекуррентных соотношений (2.9) получаем выражения для векторных полиномов $P_n(x)$:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= W_{1,1}x + W_{1,0}1, \\
P_2(x) &= W_{2,2}x^{\otimes 2} + W_{2,1}P_1(x) + W_{2,0}1 \\
&= W_{2,2}x^{\otimes 2} + W_{2,1}(W_{1,1}x + W_{1,0}1) + W_{2,0}1 \\
&= W_{2,2}x^{\otimes 2} + W_{2,1}W_{1,1}x + (W_{2,1}W_{1,0} + W_{2,0})1, \\
P_3(x) &= W_{3,3}x^{\otimes 3} + W_{3,2}P_2(x) + W_{3,1}P_1(x) + W_{3,0}1 = \dots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставляя эти формулы в выражение (2.8) для финитного вектора $f = (f_0, \dots, f_n, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(H) \subset \mathcal{F}(H,p)$ и перебрасывая операторы $W_{n,n}$, $W_{n,n-1}W_{n-1,n-1}, \dots$ с $x^{\otimes n}$, $x^{\otimes(n-1)}, \dots$ на $f_n, f_{n-1}, \dots$, заключаем, что $\hat{f}(x) \in \mathcal{P}_n(H)$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ множество $\mathcal{P}_n(H)$ является линейным подпространством в (L^2), совпадающим с Фурье-образом подпространства $\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{F}_j(H) \subset \mathcal{F}(H)$, т.е.*

$$I\left(\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{F}_j(H)\right) = \mathcal{P}_n(H), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.3}$$

Доказательство. Требуется лишь доказать включение

$$I\left(\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{F}_j(H)\right) \subset \mathcal{P}_n(H), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.4}$$

так как противоположное включение было только-что пояснено (замкнутость $\mathcal{P}_n(H)$ будет вытекать из того, что $\mathcal{P}_n(H)$ равно Фурье-образу замкнутого в $\mathcal{F}(H)$ линейного множества $\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{F}_j(H)$).

Включение (3.4) при $n = 0$ имеет место; предположим, что оно имеет место при $n \leqslant k$ и докажем его при $n = k + 1$.

Пусть $p_{k+1}(x)$ — полином типа (3.1) с коэффициентами $a_0, \dots, a_{k+1}$;

$$f = (\delta_{j,k+1}(W^*_{k+1,k+1})^{-1}\bar{a}_{k+1})_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{k+1}(H) \subset \mathcal{F}(H,p),$$

где $\delta_{j,j}$ — символ Кронекера. Тогда в силу (2.8) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= ((W^*_{k+1,k+1})^{-1}\bar{a}_{k+1}, P_{k+1}(x))_{\mathcal{F}_{k+1}(H)} \\
&= ((W^*_{k+1,k+1})^{-1}\bar{a}_{k+1}, W_{k+1,k+1}x^{\otimes(k+1)} + W_{k+1,k}W_{k,k}x^{\otimes k} + \dots)_{\mathcal{F}_{k+1}(H)} \\
&= (\bar{a}_{k+1}, x^{\otimes(k+1)})_{\mathcal{F}_{k+1}(H)} + q_k(x) \\
&= (x^{\otimes(k+1)}, a_{k+1})_{\mathcal{F}_{k+1}(H)} + q_k(x),
\end{aligned}$$

где $q_k(x) = (W^*_{k,k}W^*_{k+1,k}(W^*_{k+1,k+1})^{-1}\bar{a}_{k+1}, x^{\otimes k})_{\mathcal{F}_k(H)} + \dots$ Полином $q_k(x)$ степени $\leqslant k$ имеет вид (3.1). Следовательно, разность $p_{k+1}(x) - \hat{f}(x)$ принадлежит к $\mathcal{P}_k(H)$ и, по предположению индукции, принадлежит левому множеству в (3.4) при $n = k$. Но тогда и $p_{k+1}(x)$ принадлежит этому множеству при $n = k + 1$. •

Ортогональное разложение $\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(H)$ пространства Фока и унитарность оператора I приводят к ортогональному разложению пространства (L^2) („хаотическому разложению“):

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(L^2_n), \quad (L^2_n) = I(\mathcal{F}_n(H)), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.5}$$

Отсюда и из теоремы 3.1 (равенство (3.3)) заключаем, что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(L^2_n) = I(\mathcal{F}_n(H)) = I\Bigl(\bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{F}_j(H) \ominus \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{F}_j(H)\Bigr) = \mathcal{P}_n(H) \ominus \mathcal{P}_{n-1}(H).$$

Итак, *наряду с* (3.5) *имеем в пространстве* $(L^2) : \forall n \in \mathbb{N}$

$$(L^2_n) = \mathcal{P}_n(H) \ominus \mathcal{P}_{n-1}(H); \quad \mathcal{P}_n(H) = \bigoplus_{j=0}^{n}(L^2_j), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.6}$$

Обозначим через Pr_n ортогональный проектор в пространстве (L^2) на (L^2_n), $n \in \mathbb{Z}_+$. Как и в классическом одномерном случае его действие на степенях x просто записывается посредством полиномов 1-го рода:

Теорема 3.2. *Справедлива формула*: $\forall a_n \in \mathcal{F}_n(H)$

$$\Pr_n(x^{\otimes n}, a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} = (P_n(x), V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу (2.8) функция

$$(P_n(x), V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} = (V_{n,n}\bar{a}_n, P_n(x))_{\mathcal{F}_n(H)} \in (L_n^2).$$

Поэтому для доказательства (3.7) достаточно проверить, что разность

$$(x^{\otimes n}, a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} - (P_n(x), V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)}$$

будет ортогональной к подпространству (L_n^2). Пользуясь формулами (3.2) и равенством $W_{n,n} = (V_{n,n}^*)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}
&(x^{\otimes n}, a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} - (P_n(x), V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} \\
&\quad = (x^{\otimes n}, a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} \\
&\qquad - (W_{n,n}x^{\otimes n} + W_{n,n-1}W_{n-1,n-1}x^{\otimes(n-1)} + \dots, V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} \\
&\quad = (x^{\otimes n}, a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} - (W_{n,n}x^{\otimes n}, V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} - q_{n-1}(x) \\
&\quad = -q_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Здесь $q_{n-1}(x) = (W_{n,n-1}W_{n-1,n-1}x^{\otimes(n-1)} + \dots, V_{n,n}a_n)_{\mathcal{F}_n(H)}$ есть некоторый полином типа (3.1) степени $\leqslant n-1$, т.е. $q_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}(H) = \bigoplus_{j=0}^{n-1}(L_j^2) \perp (L_n^2)$. •

Перейдем к построению естественного ортонормированного базиса в (L^2). Из теоремы 2.1 следует равенство Парсеваля: $\forall f, g \in \mathcal{F}(H)$

$$(f, g)_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{n=0}^{\infty}(f_n, g_n)_{\mathcal{F}_n(H)} = \int_H \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}d\rho(x) = (\hat{f}, \hat{g})_{(L^2)}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим в пространстве Фока $\mathcal{F}(H)$ БЧЗ $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d}$, имеющий вид (1.6). Образы векторов e_α относительно унитарного оператора Фурье I образуют вещественный ортонормированный базис в пространстве (L^2), который в соответствии с (2.8) имеет вид

$$(\hat{e}_\alpha)(x) = (Ie_\alpha)(x) = (e_\alpha, P(x))_{\mathcal{F}(H)} = (e_\alpha, P_{|\alpha|}(x))_{\mathcal{F}_{|\alpha|}(H)}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{3.9}$$

В силу (3.2) $(\hat{e}_\alpha)(x)$ имеет вид (3.1) с отличным от нуля старшим коэффициентом, т.е. является полиномом степени $|\alpha|$.

Заменяя g через e_α в (3.8), мы получим формулу для нахождения вектора f в терминах его БЧЗ — координат по его преобразованию Фурье $\hat{f}(x)$:

$$f_\alpha = \int_H \hat{f}(x)(\hat{e}_\alpha)(x)d\rho(x), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{3.10}$$

Из (3.8) и (3.9) следуют соотношения ортогональности для $(\hat{e}_\alpha)(x)$, которые обобщают классические соотношения для ортогональных полиномов. Именно

$$\int_H (\hat{e}_\alpha)(x)(\hat{e}_\beta)(x)d\rho(x) = \delta_{\alpha,\beta}; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{3.11}$$

Преобразование Фурье (2.8) в терминах БЧЗ-координат f_α вектора f выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(H,p) \ni f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \mapsto \hat{f}(x) &= (If)(x) = (f, P(x))_{\mathcal{F}(H)} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} f_\alpha(\hat{e}_\alpha)(x) \in (L^2).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Наконец, запишем в терминах пространства (L^2) действие образа оператора $V_{n,n}$, т.е. оператор $IV_{n,n}I^{-1}$; $n \in \mathbb{N}$. В соответствии с (2.4) и (3.6) он переводит функцию $I(\sum_{|\alpha|=n} f_{n,\alpha}e_\alpha) = \sum_{|\alpha|=n} f_{n,\alpha}(\hat{e}_\alpha)(x)$ в

$$I\left(\sum_{|\alpha|=n} f_{n,\alpha}(A^{\alpha_d}(e_1)\dots A_d^{\alpha}(e_d)\Omega)_n\right) = \sum_{|\alpha|=n} f_{n,\alpha}\operatorname{Pr}_n(x_1^{\alpha_1}\dots x_d^{\alpha_d}) \in (L_n^2)$$

(мы воспользовались тем, что образом оператора $A(\varphi)$ в (L^2) является оператор умножения на $(x,\varphi)_H$ и равенством $(x,e_j)_H = x_j$, $j = 1,\dots,d$). В результате можно утверждать, что $IV_{n,n}I^{-1}$ *является оператором в* $(L_n^2) = \mathcal{P}_n(H)\ominus\mathcal{P}_{n-1}(H)$, *полученным расширением по линейности преобразования*

$$\begin{aligned}(\hat{e}_\alpha)(x) \mapsto &(IV_{n,n}I^{-1})(\hat{e}_\alpha)(x) = \operatorname{Pr}_n(x_1^{\alpha_1}\dots x_d^{\alpha_d}), \\ &x\in H, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad |\alpha| = n.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Отметим еще некоторые общие формулы, связанные с преобразованием Фурье (2.8).

Так как это преобразование $I : \mathcal{F}(H) \to (L^2)$ переводит оператор $A(\varphi)$ в оператор умножения на функцию $H \ni x \mapsto (x,\varphi)_H \in \mathbb{R}^1$, то резольвента этого оператора $R_z(\varphi) = (A(\varphi) - z1)^{-1}$ переходит в оператор умножения на $H \ni x \mapsto ((x,\varphi)_H - z)^{-1} \in \mathbb{C}^1$, $\varphi \in H$, $z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$. Разложение единицы $E(\Delta,\varphi)$ оператора $A(\varphi)$ ($\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ борелевское множество из $\mathbb{R}^1$) переходит в оператор умножения на $H \ni x \mapsto \varkappa_\Delta((x,\varphi)_H) \in \mathbb{R}^1$, где $\varkappa_\Delta(s)$ — индикатор множества Δ, $s \in \mathbb{R}^1$.

Из того, что совместное разложение единицы семейства $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ строится перемножением разложений единицы операторов $A(\varphi_1), \dots, A(\varphi_d)$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in H$ и линейно независимы, вытекает, что совместное разложение единицы $E(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{B}(H)$ семейства A переходит в оператор умножения на функцию $H \ni x \mapsto \varkappa_\gamma(x) \in \mathbb{R}^1$, где $\varkappa_\gamma(\cdot)$ — индикатор γ.

Эти факты, равенство $\widehat{\Omega}(x) = 1$, $x \in H$, и равенство Парсевалл (3.8) приводят к следующим формулам:

$$(E(\gamma)\Omega, \Omega)_{\mathcal{F}(H)} = P(\gamma), \qquad \gamma \in \mathcal{B}(H); \tag{3.14}$$

$$(E(\Delta,\varphi)\Omega, \Omega)_{\mathcal{F}(H)} = \int_H \varkappa_\Delta((x,\varphi)_H)d\rho(x), \quad \varphi \in H, \ \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1); \tag{3.15}$$

$$(R_z(\varphi)\Omega, \Omega)_{\mathcal{F}(H)} = \int_H \frac{1}{(x,\varphi)_H - z} d\rho(x), \quad \varphi \in H, z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1. \tag{3.16}$$

§4. Обратная задача

Обратная задача для скалярной якобиевой матрицы $\{a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots\}$ с положительными a_n заключается в восстановлении этой матрицы по ее спектральной мере ρ на оси $\mathbb{R}^1$, т.е. чисел a_n, b_n; $n \in \mathbb{Z}_+$. Она решается весьма просто: произведем ортогонализацию по Шмидту в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1, d\rho(x)) = (L^2)$ функций $1, x, x^2, \dots$ В результате получим ортонормированные полиномы $P_0(x)$, $P_1(x), \dots$; тогда

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^1} xP_n(x)P_{n+1}(x)d\rho(x), \quad b_n = \int_{\mathbb{R}^1} xP_n^2(x)d\rho(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.1}$$

Обратно, если есть борелевская вероятностная мера ρ на оси $\mathbb{R}^1$, для которой существуют все моменты и $\operatorname{supp} \rho$ — бесконечное множество, то описанная процедура дает якобиеву матрицу с положительными a_n, для которой ρ будет спектральной мерой. Поясним, что условие на $\operatorname{supp} \rho$ эквивалентно линейной независимости степеней $1, x, x^2, \dots$, а формулы (4.1) могут быть записаны в явном виде через моменты $s_n = \int_{\mathbb{R}^1} x^n d\rho(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, меры ρ.

Подобным же образом можно решать и обратную задачу для якобиевых полей.

Теорема 4.1. *Пусть задано якобиево поле $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$, $(V_{n,n})_{n=0}^\infty$ — последовательность его операторов (2.3), (2.4), а ρ — спектральная мера. Это поле однозначно восстанавливается по ρ и последовательности $(V_{n,n})_{n=0}^\infty$.*

Доказательство. В пространстве (L^2) построим замкнутые подпространства $\mathcal{P}_n(H)$ полиномов степени $\leqslant n$ и затем посредством процедуры ортогонализации найдем разности $\mathcal{P}_n(H) \ominus \mathcal{P}_{n-1}(H) = (L_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$.

Далее, из формулы (3.7) следует, что

$$(P_n(x), a_n)_{\mathcal{F}_n(H)} = \mathrm{Pr}_n(x^{\otimes n}, V_{n,n}^{-1} a_n), \quad a_n \in \mathcal{F}_n(H), \tag{4.2}$$

где Pr_n — ортопроектор на (L_n^2). Так как $V_{n,n}$ нам известно, то (4.2) дает возможность найти $(P_n(x), a_n)_{\mathcal{F}_n(H)}$ при произвольном a_n, т.е. $P_n(x)$, $x \in H$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тогда формула (2.8) определяет унитарный оператор I на $\mathcal{F}(H,p)$ и поэтому дает возможность восстановить операторы $A(\varphi)$, т.е. элементы $a_n(\varphi)$, $b_n(\varphi)$ их якобиевой матрицы, если известен образ этого оператора в (L^2). Но он известен — согласно теореме 2.1, этот образ — оператор умножения в (L^2) на функцию $H \ni x \mapsto (x, \varphi)_H \in \mathbb{R}^1$.

Тем самым поле A однозначно восстанавливается. •

В одномерном случае эта процедура не противоречит приведенной ранее классической. Сейчас $\dim(\mathcal{F}_n(H)) = 1$ и оператор $V_{n,n}^{-1}$ — умножение в $\mathbb{R}^1$ на вещественное число $c_n \neq 0$. Поэтому из (4.2) следует, что $P_n(x) = c_n \mathrm{Pr}_n x^n$ и сами полиномы $P_n(x)$ ортогональны. Они в обычном подходе строятся ортогонализацией по Шмидту, а эта процедура такова, что числа c_n положительны и точно определяются из условия нормированности. Тем самым мы находим якобиеву матрицу с положительными a_n. Можно было бы ее находить по p и с a_n, знак которых зависит от n: c_n (т.е. $V_{n,n}$) сейчас будут знакопеременны и выбор последовательности их знаков определяет знаки a_n (величину $|c_n|$ можно не задавать, так как она определяется из нормированности $P_n(x)$).

Возвратимся к построению поля по мере ρ. Пусть задана борелевская вероятностная мера ρ на $H, \dim H = d$. Предположим, что для этой меры существуют все моменты, т.е. все полиномы (3.1) интегрируемы, и что она не выраждена: функции (3.1) линейно независимы в пространстве $L^2(H, d\rho(x)) =: (L^2)$ и их совокупность тотальна.

Как и ранее, построим подпространства $\mathcal{P}_n(H)$ всех полиномов степени $\leqslant n$ и затем найдем в (L^2) разности $\mathcal{P}_n(H) \ominus \mathcal{P}_{n-1}(H) = (L_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$; $\dim(L_n^2) = C_{n+d-1}^n$. Поясним, что $\mathcal{P}_n(H)$ автоматически замкнуты в (L^2), это вытекает из конечномерности H. Зафиксируем ортонормированный базис $(e_j)_{j=1}^d$ в H, пусть x_j — координаты вектора $x \in H$ в этом базисе.

Рассмотрим бесконечную последовательность степеней

$$1; \ x_1^{\alpha_1} \dots x_\alpha^{\alpha_d}, \ |\alpha| = 1; \ x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}, \ |\alpha| = 2; \ \dots, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{4.3}$$

и упорядочим ее каким-либо образом в каждой ее конечной части $x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = n$. В результате получим некоторое упорядочение последовательности (4.3). Ортогонализируя эту последовательность по Шмидту, образуем некоторый ортонормированный базис $h_\alpha(x)$ в (L^2), где $h_\alpha(x)$ обозначает орт, получаемый из вектора $x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} + q(x)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \alpha$, $q(x)$ — сумма предыдущих степеней в смысле нашего упорядочивания. Из этой конструкции следует, что h_α при $|\alpha| \leqslant n$ образуют базис в $\mathcal{P}_n(H)$, а h_α при $|\alpha| = n$ — базис в $\mathcal{P}_n(H) \ominus \mathcal{P}_{n-1}(H) = (L^2)$.

В соответствии с (3.13) рассмотрим отображение

$$(L_n^2) \ni h_\alpha(x) \mapsto \mathrm{Pr}_n(x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}) \in (L_n^2), \quad x \in H, \ |\alpha| = n \tag{4.4}$$

и продолжим его по линейности на все конечномерное (L_n^2). Так как $\dim(L_n^2) = C_{n+d-1}^n = \dim \mathcal{F}(H)$, то это отображение можно рассматривать как действующее в $\mathcal{F}_n(H)$, отождествляя $h_\alpha(x)$ с базисным ортом e_α БЧЗ в $\mathcal{F}_n(H)$, $|\alpha| = n$. Обозначим этот оператор через $V_{n,n}$. Он будет обратимым, так как векторы в левой и правой частях (4.4) линейно независимы и их количество равное.

Отождествляя $h_\alpha(x)$ с e_α, $|\alpha| = n$, при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$, мы получим, что (L_n^2) изометрично $\mathcal{F}_n(H)$, а $\bigoplus_{n=0}^\infty (L_n^2) = (L^2)$ изометрично Фоковскому пространству $\bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n(H) = \mathcal{F}(H)$.

Рассмотрим в $(L^2) \forall \varphi \in H$ оператор умножения на $(x, \varphi)_H : (L^2) \supset \mathcal{P}(H) \ni f(x) \mapsto (x,\varphi)_H f(x) \in (L^2)$. Очевидно, он будет иметь якобиевую структуру относительно разложения $(L^2) = \bigoplus_{n=0}^\infty (L_n^2)$, так как $(L_n^2) = \mathcal{P}_n(H) \ominus \mathcal{P}_{n-1}(H)$, и поэтому его запись как оператора в $\mathcal{F}(H)$ приведет к якобиевой матрице $A(\varphi)$ вида (2.1). Относительно φ она будет зависеть линейно в силу такой зависимости функции $(x, \varphi)_H$. Благодаря существенной самосопряженности и коммутируемости операторов умножения, мы получим якобиевое коммутативное поле $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ в $\mathcal{F}(H)$.

Оператором $V_{n,n}$ для этого поля будет построенный в (4.4) оператор. Это следует из того, что в базисе e_α, $|\alpha| = n$, отображение (4.4) примет вид:

$$F_n(H) \ni e_\alpha \mapsto (A^{\alpha_1}(e_1) \dots A^{\alpha_d}(e_d)\Omega)_n,$$

совпадающий с (2.3), (2.4).

Пространством Фурье-образов для построенного поля A будет наше исходное пространство (L^2) с заданной исходной мерой ρ в качестве спектральной, так как согласно конструкции, $\hat{e}_\alpha = h_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$.

Из сказанного следует, что оператор $V_{n,n}$ определяется по формуле (4.4) мерой ρ и заданным упорядочиванием части $x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = n$, из (4.3). Таким образом, *поле A строится по спектральной мере ρ и выбранным упорядочиванием в каждой конечной части $x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = n \in \mathbb{N}$, последовательности* (4.3).

Мы пришли к следующему результату.

Теорема 4.2. *По заданной борелевской вероятностной мере ρ на вещественном d-мерном пространстве H, для которой существуют все моменты и она невырождена (т.е. полиномы* (3.1), *$n \in \mathbb{Z}_+$, линейно независимы и плотны в $(L^2) := L^2(H, d\rho(x))$ и из равенства $\|p_n(x)\|_{(L^2)} = 0$ следует $p_n(x) = 0$ и по выбранным упорядочиваниям в каждой конечной части* (4.3) *можно построить* *якобиевое коммутативное поле* $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$ *в* $F(H)$, *для которого спектральной мерой будет* ρ, *а операторами* (2.2), (2.4).

Вместе с тем этот результат не решает обратную задачу в следующем смысле: пусть задано поле $A = (A(\varphi))_{\varphi \in H}$, построим его спектральную меру ρ, спрашивается, как восстановить поле по этой мере? Если применить теорему 4.2 с некоторым выбором упорядочивания, то нет никакой гарантии, что построенные операторы (2.3), (2.4), последовательность которых мы обозначим через $U = (U_{n,n})_{n=0}^{\infty}$, совпадают со связанными с A согласно [F3] операторами $V_{n,n}$; $V := (V_{n,n})_{n=0}^{\infty}$. Поэтому построенное поле может отличаться от исходного. Более того, неясно, можно ли вообще подобрать так упорядочивание, чтобы $U = V$.

Выясним возникающую здесь ситуацию. Обозначим поле, порожденное в пространстве (L^2) операторами умножения, через $B = (B(\varphi))_{\varphi \in H}$ (т.е. $\forall \varphi \in H(L^2) \supset \mathcal{P}(H) \ni f(x) \mapsto (B(\varphi)f)(x) = (x, \varphi)_H f(x) \in (L^2)$). Пусть $V = (V_{n,n})_{n=0}^{\infty}$ — последовательность операторов (2.3), (2.4), тогда, согласно (2.8), (3.7), (4.2), оператор $I_V := I$ на $\mathcal{F}(H,p)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(H,p) \ni f \mapsto (I_V f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, P_n(x))_{\mathcal{F}_n(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr{}_n(V_{n,n}^{-1} f_n, x^{\otimes n})_{\mathcal{F}_n(H)} \in (L^2), \tag{4.5}$$

а поле $A_V := A$ равно

$$A_V = (A_V(\varphi))_{\varphi \in H}, \quad A_V(\varphi) = I_V^{-1} B(\varphi) I_V. \tag{4.6}$$

Пусть $U = (U_{n,n})_{n=0}^{\infty}$ — другая последовательность операторов (2.3), (2.4) (например, построенная в теореме 4.2), а I_U — оператор, определенный формулой (4.5), в которой $V_{n,n}$ заменено на $U_{n,n}$, и $A_U = (A_U(\varphi))_{\varphi \in H}$, $A_U(\varphi) = I_U^{-1} B(\varphi) I_U$. Сравнивая эту формулу с (4.6), получаем

$$A_U(\varphi) = I_U^{-1} I_V A_V(\varphi) I_V^{-1} I_U, \quad \varphi \in H. \tag{4.7}$$

Преобразуем (4.7) следующим образом. Обозначим

$$T_n = V_{n,n} U_{n,n}^{-1} : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H), \quad T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{F}(H).$$

Используя (4.5), получим

$$\begin{aligned}(I_V T_f)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr_n(V_{n,n}^{-1} T_n f_n, x^{\otimes n})_{\mathcal{F}(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr_n(U_{n,n}^{-1} f_n, x^{\otimes n})_{\mathcal{F}_n(H)} \\ &= (I_U f)(x),\end{aligned}$$

т.е. $T = I_V^{-1} I_U$ и в силу (4.7) $A_U(\varphi) = T^{-1} A_V(\varphi) T$, $\varphi \in H$.

Эти преобразования резюмируем следующим образом.

Пусть $V = (V_{n,n})_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность операторов* (2.3), (2.4), *фигурирующая в* [F3], *а* $U = (U_{n,n})_{n=0}^{\infty}$ *— такая последовательность, построенная в теореме* 4.2; $A_V = (A_V(\varphi))_{\varphi \in H}$, $A_U = (A_U(\varphi))_{\varphi \in H}$ *— соответствующие поля. Тогда справедливо равенство*

$$A_U(\varphi) = T^{-1} A_V(\varphi) T, \quad \varphi \in H, \tag{4.8}$$

где оператор $T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{F}(H)$ *построен по операторам* $T_n = V_{n,n} U_{n,n}^{-1} : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H)$.

§5. Цепочка Тоды в пространстве Фока

Рассмотрим дифференциально-разностное операторное уравнение, обобщающее классическую цепочку Тоды, задача Коши которого может быть в некоторой степени изучена при помощи спектральной теории, развитой в п. 2–4.

Пусть $A(\varphi; t)$ — семейство якобиевых матриц вида (2.1), зависящих от параметра (времени) $t \in [0, T)$ и удовлетворяющих $\forall t$ требованиям [F1]–[F3]; $a_n(\varphi; t)$, $b_n(\varphi; t)$, $a_n^*(\varphi; t)$ — их элементы, являющиеся операторами, действующими соответствующим образом между конечномерными пространствами $\mathcal{F}_m(H)$. Предполагается, что зависимость этих операторов от t (т.е. элементов их конечномерных матриц) один раз непрерывно дифференцируема и $\forall t$ оператор $A(\varphi; t)$ ограничен в $\mathcal{F}(H)$ (т.е. $\forall \varphi \in H$, $t \in [0, T)$ нормы $\|a_n(\varphi; t)\|$, $\|b_n(\varphi; t)\|$ ограничены по $n \in \mathbb{Z}_+$).

Мы будем рассматривать следующую операторную (неабелеву) цепочку Тоды:

$$\begin{gathered} \dot{a}_n(\omega; t) = \frac{1}{2}(b_{n+1}(\omega; t) a_n(\omega; t) - a_n(\omega; t) b_n(\omega; t)), \\ \dot{b}_n(\omega; t) = a_n^*(\omega; t) a_n(\omega; t) - a_{n-1}(\omega; t) a_{n-1}^*(\omega; t), \\ \cdot = \partial/\partial t; \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad a_{-1}(\omega; t) = 0; \\ \omega \in K = \{\omega \in H \mid \|\omega\|_H = 1\}, \quad t \in [0, T) \end{gathered} \tag{5.1}$$

(заметим, что действия операторов в (5.1) согласованы, см. (2.1)).

Неизвестными в (5.1) служат элементы матрицы оператора $A(\varphi; t)$ поля, суженные по φ на K. Благодаря требованию [F2] линейности $A(\varphi; t) = \|\varphi\|_H A(\|\varphi\|_H^{-1} \varphi; t)$, поэтому знание $A(\omega; t)$ при $\omega \in K$ эквивалентно знанию $A(\varphi; t)$ при $\varphi \in H$ и (5.1) можно рассматривать как систему уравнений на операторы поля $A(\varphi; t)$, $\varphi \in H$.

Для системы (5.1) ставится задача Коши: при $t = 0$ задано начальное поле $(A(\omega; 0))_{\omega \in K}$, требуется найти поле $(A(\omega; t))_{\omega \in K}$ при $t \in [0, T)$, элементы $a_n(\omega; t)$, $b_n(\omega; t)$ которого удовлетворяют (5.1), при этом $\forall \omega \in K$, $t \in [0, T)$ операторы $A(\omega; t)$ ограничены и указанным образом дифференцируемы по t.

При $d = 1$ система (5.1) превращается в повторенную дважды (так как $\omega = 1, -1$) классическую цепочку Тоды

$$\begin{aligned}\dot a_n(t) &= \frac{1}{2} a_n(t)(b_{n+1}(t) - b_n(H),\\ \dot b_n(t) &= a_n^2(t) - a_{n-1}^2(t),\\ &\qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ a_{-1}(t) = 0; \quad t \in [0, T).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Отметим также, что в общем случае если ввести гильбертовы пространства $\mathcal{H}_n$ $\mathcal{F}_n(H)$-значных суммируемых с квадратом по лебеговой мере функций $f_n(\omega)$ переменной $\omega \in K$ и интерпретировать $a_n(\omega)$, $b_n(\omega)$ как операторы $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ умножения в этих пространствах (например, $\mathcal{H}_n \in f_n(\omega) \mapsto (\mathcal{A}_n f_n(\cdot))(\omega) = a_n(\omega) f_n(\omega) \in \mathcal{H}_{n+1}$), то (5.1) перепишется в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{A}}_n(t) &= \frac{1}{2}(\mathcal{B}_{n+1}(t)\mathcal{A}_n(t) - \mathcal{A}_n(t)\mathcal{B}_n(t)),\\ \dot{\mathcal{B}}_n(t) &= \mathcal{A}_n^*(t)\mathcal{A}_n(t) - \mathcal{A}_{n-1}(t)\mathcal{A}_{n-1}^*(t),\\ &\qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ \mathcal{A}_{-1}(t) = 0; \quad t \in [0, T).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Предположим, что в указанном классе существует решение задачи Коши для (5.1) и покажем, что подобно классической цепочке Тоды (5.2) его можно изучить при помощи спектральной техники п. 2-4. Однако в отличие от (5.2) мы получаем не процедуру нахождения решения $(A(\omega;t))_{\omega\in K}$, а лишь некоторый способ вычисления преобразованного поля $(T^{-1}(t)A(\omega;t)T(t))_{\omega\in K}$ с неизвестной операторной функцией $[0,T) \ni t \mapsto T(t)$ или тех инвариантов решения, которые сохраняются при таком преобразовании (например, $\operatorname{Det} b_n(\omega;t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$). Это отличие от классического случая связано с особенностями возникающими при решении обратной задачи, отмеченными в §4.

Теорема 5.1. *Пусть $[0,T) \ni t \mapsto (A(\omega;t))_{\omega\in K}$ решение из введенного класса задачи Коши для (5.1) с начальными данными $(A(\omega;0))_{\omega\in K}$. Тогда существует операторнозначная функция $[0,T) \ni t \mapsto T(t)$, значениями которой служат обратные диагональные операторы $T(t) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n(t)$, $T_n(t)$: $\mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_n(H)$ такая, что преобразованное решение $[0,T) \ni t \mapsto (T^{-1}(t)A(\omega;t)T(t))_{\omega\in K}$ может быть найдено следующим образом.*

Обозначим через $d\rho(x;t)$ (точнее, $\mathcal{B}(H) \ni \gamma \mapsto \rho(\gamma;t) \in [0,1]$) спектральную меру поля $(A(\varphi;t))_{\varphi\in H}$ в момент времени $t \in [0,T)$. Эта мера при $t = 0$ $d\rho(x;0)$ известна как спектральная мера начального поля $(A(\varphi;0))_{\varphi\in H}$, при $t > 0$ она может быть подсчитана по определенному правилу, которое будет описано ниже. Зная меру $d\rho(x;t)$ найдем преобразованное поле при помощи теоремы 4.2 с некоторым выбором упорядочивания последовательности (4.3).

Процедура подсчета меры $d\rho(x;t)$ при $t > 0$ по $d\rho(x;0)$ состоит в следующем. Пусть $f \in C^\infty(H)$ произвольная финитная функция $\check f(\omega,p)$, ее преобразование

Радона, т.е.

$$\check{f}(\omega, p) = \int\limits_{(x,\omega)_H = p} f(x)dx, \quad \omega \in K, \ p \in \mathbb{R}^1. \tag{5.4}$$

Тогда $\forall t \in [0, T)$ *в случае нечетного* d

$$\int\limits_H f(x)d\rho(x;t) = \frac{(-1)^{\frac{d-1}{2}}}{2(2\pi)^{d-1}} \int\limits_K \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} R(\omega, p; t) \left(\frac{\partial^{d-1} \check{f}}{\partial p^{d-1}} \right)(\omega, p) \right) d\omega, \tag{5.5}$$

$$R(\omega, p; t) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\int\limits_{(x,\omega)_H < p} \left(\int\limits_H e^{(x,\omega)_H t} d\rho(x;0) \right)^{-1} e^{(x,\omega)_H t} d\rho(x;0) \right), \tag{5.6}$$

и в случае четного d

$$\int\limits_H f(x)d\rho(x;t) = \frac{(-1)^{\frac{d}{2}}(d-1)!}{(2\pi)^d} \int\limits_K \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} R(\omega, p_1, t)\check{f}(\omega, p_2)(p_1 - p_2)^{-d} dp_1 dp_2 \right) d\omega. \tag{5.7}$$

Ввиду произвольности f *левые части в* (5.5), (5.7) *определяют меру* $dp(x;t)$.

Отметим, что для существования производной в (5.6) дополнительно нужно требовать некоторую регулярность начальной меры $d\rho(x;0)$.

Раньше, чем проводить доказательство теоремы, запишем систему (5.1) в форме Лакса, используя обычный коммутатор $[A, B] = AB - BA$:

$$\dot{A}(\omega; t) = [A(\omega; t), B(\omega; t)], \quad \omega \in K, \ t \in [0, T). \tag{5.8}$$

Здесь $B(\omega; t)$ якобиева матрица типа (2.1):

$$B(\omega; t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0(\omega; t) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_0(\omega; t) & 0 & \gamma_1(\omega; t) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_1(\omega; t) & 0 & \gamma_2(\omega; t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

где $\forall \omega, t \ \alpha_n(\omega; t) : \mathcal{F}_n(H) \to \mathcal{F}_{n+1}(H), \gamma_n(\omega; t) : \mathcal{F}_{n+1}(H) \to \mathcal{F}_n(H)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Поясним эту запись. Подставляя в (5.8) матрицы (2.1) с $\varphi = \omega$ и t и (5.9) и сравнивая элементы в левой и правой частях равенства, получим, опуская в обозначениях ω, t:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{n+1}\alpha_n - \alpha_{n+1}a_n, \\ \dot{a}_n &= b_{n+1}\alpha_n - \alpha_n b_n, \\ \dot{b}_n &= a_{n-1}\gamma_{n-1} + a_n^*\alpha_n - \alpha_{n-1}a_{n-1}^* - \gamma_n a_n, \\ \dot{a}_n^* &= b_n\gamma_n - \gamma_n b_{n+1}, \\ 0 &= a_n^*\gamma_{n+1} - \gamma_n a_{n+1}^*, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Полагая в (5.9), (5.10) $\forall n$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}a_n(\omega;t), \quad \gamma_n = -\frac{1}{2}a_n^*(\omega;t), \qquad \omega \in K, \quad t \in [0,T), \tag{5.11}$$

мы получим соотношения, эквивалентные (5.1). Таким образом, (5.1) можно записать в виде (5.8), где $B(\omega;t)$ задается формулой (5.9).

Доказательство теоремы основывается на двух леммах. Для решения $(A(\omega;t))_{\omega\in K}$ обозначим через $E(\gamma;t)$, $E(\Delta,\omega;t)$, $R_z(\omega;t)$ операторы, фигурирующие в (3.14)–(3.16) с $\varphi=\omega$.

Лемма 5.1. *Функция* $m(z,\omega;t) = (R_z(\omega;t)\Omega,\Omega)_{\mathcal{F}(H)}$ *удовлетворяет уравнению*

$$\dot m(z,\omega;t) = (z - b_0(\omega;t))m(z,\omega;t) + 1, \quad z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1, \ \omega \in K, \ t \in [0,T). \tag{5.12}$$

Доказательство. Из (5.8) вытекает, что

$$(A(\omega;t) - z1)^{\cdot} = [A(\omega;t) - z1, B(\omega;t)],$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \dot R_z(\omega,t) &= -R_z(\omega;t)(A(\omega;t) - z1)^{\cdot} R_z(\omega;t) \\ &= [R_z(\omega;t), B(\omega;t)], \quad z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1, \ t \in [0,T). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Из (5.13) и характера действия операторных матриц (5.9) с элементами (5.11), получаем

$$\begin{aligned} \dot m(z,\omega,t) &= (\dot R_z(\omega;t)\Omega,\Omega)_{F(H)} \\ &= (R_z(\omega;t)B(\omega;t)\Omega,\Omega)_{\mathcal{F}(H)} - (B(\omega;t)R_z(\omega;t)\Omega,\Omega)_{F(H)} \\ &= -(B(\omega;t)R_z(\omega;t)\Omega,\Omega)_{\mathcal{F}(H)} + \overline{(B^*(\Omega;t)R_z(\omega;t)\Omega,\Omega)}_{F(H)} \\ &= -\gamma_0(\omega;t)(R_z(\omega;t)\Omega)_1 + \alpha_0^*(\omega;t)\overline{(R_{\bar z}(\omega;t)\Omega)}_1. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Но

$$\begin{aligned} 1 &= ((A(\omega;t) - z1)R_z(\omega;t)\Omega)_0 \\ &= ((b_0(\omega;t) - z)R_z(\omega;t))_0 + a_0^*(\omega;t)(R_z(\omega;t)\Omega)_1, \end{aligned}$$

поэтому

$$a_0^*(\omega;t)(R_z(\omega;t)\Omega)_1 = 1 + (z - b_0(\omega;t))m(z,\omega;t), \quad \omega \in K, \ t \in [0,T). \tag{5.15}$$

Учитывая равенства (5.11) и (5.15), перепишем (5.14) в виде

$$\begin{aligned}\dot{m}(z,\omega;t) &= \frac{1}{2}a_0^*(\omega;t)(R_z(\omega;t)\Omega)_1 + \frac{1}{2}a_0^*(\omega;t)\overline{(R_{\bar z}(\omega;t)\Omega)_1} \\ &= 1 + (z - b_0(\omega;t))m(z,\omega;t), \quad z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1, \ \omega \in K, \ t \in [0,T). \quad \bullet\end{aligned}$$

Зафиксируем $\omega \in K$ и $t \in [0,T)$. Спектральная мера $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \Delta \mapsto \rho(\Delta,\omega;t) \in [0,1]$ в существенном самосопряженного оператора $A(\omega;t)$ равна $(E(\Delta,\omega;t)\Omega,\Omega)_{\mathcal{F}(H)}$, где $E(\cdot,\omega;t)$ — его разложение единицы. Заметим, что, согласно (3.15), она может быть также записана в виде

$$\begin{aligned}\rho(\Delta,\omega;t) &= (E(\Delta,\omega;t)\Omega,\Omega)_{\mathcal{F}(H)} = \int_H \varkappa_\Delta((x,\omega)_H)d\rho(x;t) \\ &= \rho(\{x \in H \mid (x,\omega)_H \in \Delta\};t), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1).\end{aligned} \tag{5.16}$$

Как и в случае классических якобиевых матриц, уравнение (5.12) влечет формулу для спектральной меры $d\rho(\lambda,\omega;t)$:

Лемма 5.2. *Имеет место формула*

$$d\rho(\lambda,\omega;t) = \left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t}d\rho(\lambda,\omega;0)\right)^{-1} e^{\lambda t}d\rho(\lambda,\omega;0), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \ \omega \in K, \ t \in [0,T). \tag{5.17}$$

Доказательство. Имеем $\forall z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$, $\omega \in K$, $t \in [0,T)$

$$m(z,\omega;t) = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\lambda - z}d\rho(\lambda,\omega;t),$$

поэтому, согласно (5.12),

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\lambda - z}d\rho(\lambda,\omega;t\right)^{\cdot} &= \dot{m}(z,\omega;t) = (z - b_0(\omega;t))m(z,\omega,t) + 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\lambda - b_0(\omega;t)}{\lambda - z}d\rho(\lambda,\omega;t), \quad z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1,\end{aligned}$$

и, следовательно, спектральная мера оператора $A(\omega;t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$d\dot{\rho}(\lambda,\omega;t) = (\lambda - b_0(\omega;t))d\rho(\lambda,\omega;t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^1, \ \omega \in K, \ t \in [0,T). \tag{5.18}$$

Интегрируя уравнение (5.18), найдем

$$d\rho(\lambda,\omega;t) = e^{\int_0^t(\lambda - b_0(\omega;\tau))d\tau} d\rho(\lambda,\omega;0), \quad \lambda\in\mathbb{R}^1, \ \omega\in K, \ t\in[0,T), \tag{5.19}$$

Отсюда следует

$$1 = \int_{\mathbb{R}^1} d\rho(\lambda,\omega;t) = e^{-\int_0^t b_0(\omega;\tau)d\tau}\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\rho(\lambda,\omega;0),$$

т.е.

$$e^{-\int_0^t b_0(\omega;\tau)d\tau} = \left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\rho(\lambda,\omega;0)\right)^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (5.19), придем к (5.17). •

Доказательство теоремы. Итак, пусть $(A(\omega;t))_{\omega\in K}$ — рассматриваемое в ней решение и $d\rho(x;t)$ — спектральная мера поля $(A(\varphi;t))_{\varphi\in H}$. Найдем прежде всего значение этой меры на полупространстве $\{x\in H \mid (x,\omega)_H < p\}$, $\omega\in K$, $p\in\mathbb{R}^1$.

С этой целью зафиксируем $\omega\in K$, $t\in[0,T)$ и рассмотрим отображение $H\ni x\mapsto (x,\omega)_H\in\mathbb{R}^1$. При этом отображении мера $d\rho(x;t)$ переходит в меру $\rho_{\omega,t}$ на $\mathbb{R}^1$, определяемую формулой

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)\ni\Delta\mapsto\rho_{\omega,t}(\Delta) = \rho(\{x\in H \mid (x,\omega)_H\in\Delta\};t) = \rho(\Delta,\omega;t), \tag{5.20}$$

где последнее равенство написано на основании (5.16).

Поэтому, согласно (5.20), (5.17) и правилу замены переменных в интегралах при отображении мер, имеем $\forall\omega\in K$, $p\in\mathbb{R}^1$, $t\in[0,T)$:

$$\begin{aligned}
&\rho(\{x\in H \mid (x,\omega)_H < p\};t) = \rho((-\infty,p),\omega;t)\\
&= \int_{\mathbb{R}^1}\left(\int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda t} d\rho(\lambda,\omega;0)\right)^{-1} \varkappa_{(-\infty,p)}(\lambda) e^{\lambda t} d\rho(\lambda,\omega;0)\\
&= \int_{(x,\omega)_H<p}\left(\int_H e^{(x,\omega)_H t} d\rho(x;0)\right)^{-1} e^{(x,\omega)_H t} d\rho(x;0).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Как известно [21], зная значения некоторой борелевской меры σ на всевозможных полупространствах из H при помощи преобразования Радона (5.4), можно восстановить ее значения на произвольном множестве из $\mathcal{B}(H)$ или, что то же, интеграл $\int_H f(x)d\sigma(x)$ для произвольной финитной функции $f\in C^\infty(H)$. Это делается при помощи формулы Планшереля для преобразования Радона. Формулы (5.5) и (5.7) являются формулами из [21, гл. 1, §1, п. 5, (1), (2); п. 1, (6)] в том случае, когда мера полупространства задается посредством (5.21).

Остальные утверждения теоремы вытекают из теоремы 4.2, а существование $T(t)$ — из формулы (4.8). •

Список литературы

[1] Berezansky Yu. M., *Commutative Jacobi fields in Fock space*, Integral Equations Operator Theory **22** (1997) (to appear); Preprint SFB288: Differentialgeometrie und Quantenphysik no. 258, Berlin, 1997.

[2] Litvinov E. V., *Multiple Wiener integrals and non-Gaussian white noises: a Jacobi field approach*, Methods Funct. Anal. Topology **1** (1995), no. 1, 61–85.

[3] Березанский Ю. М., Кошманенко В. Д., *Аксиоматическая теория поля в терминах операторных якобиевых матриц*, Теор. и мат. физ. **8** (1971), № 2, 175–191.

[4] Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J., Streit L., *White noise. An infinite-dimensional calculus*, Math. Appl., vol. 253, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[5] Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г., *Спектральные методы в бесконечномерном анализе*, Наук. думка, Киев, 1988; English transl., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[6] Гехтман М. И., Калюжный А. А., *Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных*, Укр. мат. ж. **43** (1991), № 10, 1437–1440.

[7] Gekhtman M. I., Kalyuzhnyĭ A. A., *On the orthogonal polynomials in several variables*, Integral Equations Operator Theory **19** (1994), 404–418.

[8] Xu Yuan, *Recurrence formulas for multivariate orthogonal polynomials*, Math. Comp. **62** (1994), no. 206, 687–702.

[9] Xu Yuan, *Block Jacobi matrices and zeros of multivariate orthogonal polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1994), no. 2, 855–866.

[10] Xu Yuan, *Multivariate orthogonal polynomials and operator theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), no. 1, 193–202.

[11] Крейн М. Г., *Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов*, Докл. АН СССР **69** (1949), № 2, 125–128.

[12] Березанский Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наук. думка, Киев, 1965; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[13] Berezanski Yu. M., *The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem*, Rep. Math. Phys. **24** (1986), no. 1, 21–47.

[14] Berezanskiĭ Yu., Shmoĭsh M., *Nonisospectral flows on semi-infinite Jacobi matrices*, J. Nonlinear Math. Phys. **1** (1994), no. 2, 116–146.

[15] Szczepanik M., *Integration of semi-infinite Toda chain in some class of unbounded solutions*, Rep. Math. Phys. **39** (1997), no. 3.

[16] Brucshi M., Manakov S. V., Ragnisco O., Levi D., *The nonabelian Toda lattice — discrete analogue of the matrix Schrödinger spectral problem*, J. Math. Phys. **21** (1980), 2749–2753.

[17] Кричевер И. М., *Периодичееская неабелева цепочка Тода и ее двумерное обобщение*, Успехи мат. наук **36** (1981), № 2, 72–80.

[18] Березанский Ю. М., Гехтман М. И., *Обратная задача спектрального анализа и неабелевы цепочки нелинейных уравнений*, Укр. мат. ж. **42** (1990), № 6, 730–747.

[19] Березанский Ю. М., *Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных*, Наук. думка, Киев, 1978; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[20] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. *Функциональный анализ*, Выща шк., Киев, 1990; English transl., Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[21] Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я., *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Физматгиз, М., 1962.

Институт математики НАН Украины
Терещенкивська ул., 3
252601 Киев, Украина
E-mail: BEREZAN@MATHBER.CARRIER.KIEV.UA

Поступило 2 июля 1997 г.