УДК 514.74

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В РАБОТАХ А. М. ВАСИЛЬЕВА И ЕГО НАУЧНОЙ ШКОЛЫ

С. Х. Арутюнян, П. Я. Грушко, Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте

Настоящий обзор посвящается анализу развития инвариантных методов исследования дифференциально-геометрических структур в крупнейшей в нашей стране школе дифференциальной геометрии С. П. Финикова — Г. Ф. Лаптева в том ее направлении, которое связано с именем Анатолия Михайловича Васильева, профессора Московского университета, признанного научного руководителя одного из старейших и наиболее крупных геометрических центров страны — семинара по классической дифференциальной геометрии при МГУ. Семинар был организован в 1933 году С. П. Финиковым и явился своего рода организационно-научным оформлением московской дифференциально-геометрической школы, берущей свое начало от геометрических работ основателей современной московской математической школы Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина. Многие годы руководителями семинара по классической дифференциальной геометрии были С. П. Фиников и Г. Ф. Лаптев. С 1974 года работу семинара возглавил А. М. Васильев — ученик С. П. Финикова и последователь новых геометрических идей и методов Г. Ф. Лаптева.

Научное содержание деятельности семинара с начала пятидесятых годов далеко уходит от первоначальных границ классической тематики теории поверхностей, конгруэнций и проблем изгибания. Отправляясь от этой тематики и первыми в мировой геометрической практике взяв на вооружение метод внешних дифференциальных форм и подвижного репера Э. Картана, С. П. Фиников и затем Г. Ф. Лаптев прозорливо увидели возможности дальнейшего развития этих методов на основе идей современной теории групп преобразований и теории расслоенных пространств. Г. Ф. Лаптев в пятидесятые годы создает свой универсальный инвариантный метод продолжений и охватов и дает вместе со своими учениками яркие образцы применения метода в решении трудных проблем построения инвариантных оснащений подмногообразий в классических однородных пространствах, в исследованиях разнообразных новых структур на гладких многообразиях. Становится сразу ясным соответствие метода широте категории дифференциально-геометрических структур в современном понимании.

В последние годы жизни Г. Ф. Лаптева, в конце шестидесятых годов А. М. Васильев начинает свою плодотворную деятельность по дальнейшему развитию методов геометрических исследований с привлечением арсенала современной алгебры и это направление становится главной линией творчества А. М. Васильева. Другой чертой его творчества является широта научных интересов, стремление вовлечь в орбиту исследований самые разнообразные структуры геометрии, а также структуры математики и физики, имеющие геометрическую сущность. Вокруг разнообразных геометрических проблем, поставленных А. М. Васильевым, создается и его собственная большая научная школа. Следует отметить, что на всех этапах своей деятельности семинар по классической дифференциальной геометрии играл роль ведущей школы по подготовке специалистов-геометров высшей квалификации для самых различных регионов страны и свою большую лепту в эту благородную деятельность внес А. М. Васильев, воспитавший через аспирантуру около сорока высококвалифицированных специалистов по дифференциальной геометрии, из числа которых вырос ряд известных, имеющих немало своих учеников профессоров — Ю. Г. Лумисте, А. С. Феденко, Н. В. Степанов, докторов наук — П. Я. Грушко, В. Ф. Кириченко, Р. В. Восилюс. Первым из фактических учеников А. М. Васильева был ныне один из крупнейших китайских математиков Гу Чао-хао, защитивший 20 лет назад в МГУ докторскую диссертацию по теории псевдогрупп преобразований. В последние годы научная и педагогическая деятельность А. М. Васильева не только не ослабевала, но по всем ее направлениям приобретала новый размах. Тем более горько сознавать, что эта деятельность так внезапно оборвалась и нам, последователям и ученикам Анатолия Михайловича Васильева приходится подводить некоторые предварительные итоги его научных трудов с тем, чтобы попытаться в дальнейшем обозначить какие-то из направлений развития исследований, группирующихся вокруг семинара по классической дифференциальной геометрии при Московском университете.

Анатолий Михайлович Васильев (1923—1987) начал учебу на механико-математическом факультете МГУ в 1940 году. Учеба была прервана участием в боях Великой Отечественной войны. После завершения учебы на механико-математическом факультете и в аспирантуре А. М. Васильев был оставлен в Московском университете и работал в нем до последних дней своей жизни. Уже в студенческие годы он глубоко воспринял геометрические идеи своего учителя Сергея Павловича Финикова и выполнил ряд серьезных работ по классической теории конгруэнций. Работая над своей кандидатской диссертацией, А. М. Васильев вслед за Г. Ф. Лаптевым включается в разработку новых мощных и универсальных методов геометрических исследований.

Идеи метода подвижного репера, основанного на исчислении внешних дифференциальных форм Э. Картана, первым и лучшим пропагандистом и последователем которых был С. П. Фиников, были органически соединены в методе Г. Ф. Лаптева с теорией геометрических объектов, групп Ли и расслоенных пространств. Метод был рассчитан на исследование подмногообразий любого однородного или неоднородного пространства с любой группой Ли преобразований, а также расслоенного пространства с соответствующей групповой связностью и сразу же нашел блестящие применения в геометрии подмногообразий классических однородных пространств. А. М. Васильев в своей кандидатской диссертации (1952 г.) без какой-либо основательной модификации приложил новый метод и к самой общей ситуации, когда подмногообразие лежит в пространстве представления бесконечной псевдогруппы Ли, которое порождает бесконечную последовательность расслоенных над исходным пространством пространств с расширяющейся структурной группой. Таким образом, в орбиту метода продолжений и охватов были включены любые дифференциально-геометрические структуры как конечного, так и бесконечного типа, в частности любые поля геометрических объектов, самые общие системы дифференциальных уравнений, структуры, связанные с геометрическими аспектами вариационного исчисления и других разделов математики и физики, имеющих координатный аналитический аппарат. После периода работы над докторской диссертацией (до 1968 года), посвященной изучению инвариантных связностей в некоторых важных классах однородных пространств, А. М. Васильев возвращается к разработке на более высоком алгебраическом уровне дифференциально-алгебраического аппарата построения и изучения самых общих дифференциально-геометрических структур и их отображений. С этого времени разработка оригинальной теории внешних дефференциальных алгебр, их геометрических реализаций и конкретных приложений в самых современных геометрических теориях становится магистральным направлением исследований А. М. Васильева, синтезирующим картановскую методику канонизации подвижного репера (редуцирование главных расслоений реперов различных порядков) с методом продолжений и охватов. Это направление в семинаре классической дифференциальной геометрии привлекло многих учеников и последователей А. М. Васильева. Геометрия однородных пространств, римановы, обобщенные эрмитовы многообразия и их отображения, теория тканей, теория связностей, общая теория дифференциально-геометрических структур различных порядков, ее приложения к геометрии систем дифференциальных уравнений, теории солитонов, преобразований Ли — Бэклунда, построению законов сохранения, геометрии лагранжианов и интегралов с параметрами — таков беглый перечень проблем, исследуемых в работах А. М. Васильва и его школы, отражающих современное направление семинара по классической дифференциальной геометрии, связанное с именем А. М. Васильева.

В научной деятельности А. М. Васильева четко выделяются четыре неравнозначных по времени и объему работы периода.

Начальный период — период классической тематики теории конгруэнций и комплексов прямых, освоения на конкретной геометрической практике исчисления внешних дифференциальных форм и метода подвижного репера Э. Картана. Следующий период, связанный с разработкой темы кандидатской диссертации, отражает появившийся активный интерес к развитию новых инвариантных методов в геометрии самых различных структур на основе теоретико-группового метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева. Третий период прерывает на несколько лет эту основную линию творчества А. М. Васильева и возвращает его к конкретным исследованиям в области геометрии однородных пространств и аффинных связностей в них. Эти исследования составили докторскую диссертацию А. М. Васильева. В дальнейшем А. М. Васильев окончательно возвращается к разработке общих методов в геометрии на основе своих широких исследований дифференциально-алгебраических моделей структур геометрии. Объектом конкретных геометрических работ самого А. М. Васильева становится теперь геометрия систем дифференциальных уравнений с постановкой самых актуальных в настоящем времени вопросов. Первый раздел нашего обзора будет касаться конкретных геометрических исследований первого и третьего циклов.

1. Первые научные результаты А. М. Васильева были опубликованы еще в его студенческие годы. В [1*][*)] он рассматривает такую четверку комплексов прямых в трехмерном проективном пространстве, которая при перенесении Плюккера дает 4-ортогональную систему гиперповерхностей гиперквадрики Q_4 в P_5, рассматриваемой с ее естественной конформной метрикой. Доказывается существование такой четверки и свойство 6 конгруэнций, получаемых при попарном пересечении ее комплексов, быть конгруэнциями W, при этом две из них эллиптические, остальные четыре — гиперболические. Характеризуется взаимное расположение фокусов этих конгруэнций и инфлекционных центров комплексов на произвольно фиксированном

[*)] «Звездочка» отсылает к литературе из списка трудов А. М. Васильева.

луче. Эти результаты А. М. Васильева были затем изложены и развиты в монографиях других авторов (см. [14], гл. XVIII; [6], часть II, гл. IV, § 5).

Исследования, составляющие предмет дипломной работы А. М. Васильева при окончании МГУ, были впервые опубликованы в монографии [13], в ее главе XII, озаглавленной «Конгруэнции А. М. Васильева». Так С. П. Фиников называет конгруэнции в P_3, у которых поверхности Ли, присоединенные к фокальным поверхностям в фокусах одного луча, касаются друг друга вдоль общей прямолинейной образующей. Она является конгруэнцией W, так же как и конгруэнция этих прямых касания. При перенесении Плюккера эти две конгруэнции изображаются поверхностями на Q_4, каждая из которых получается двухкратным преобразованием Лапласа другой, причем это последнее свойство является характерным для них. Затем в [4*] это свойство было принято за основу, причем сообщались новые подробности о строении такой пары конгруэнций W.

Начиная с 1958 г. стали появляться публикации А. М. Васильева, результаты которых составили предмет его докторской диссертации.

В [8*] он рассматривал однородное пространство G/H с компактной G, которое по П. К. Рашевскому и К. Номидзу обладает редуктивной структурой, и установил, что подмногообразие в G/H вполне геодезическое относительно инвариантной связности П. К. Рашевского (канонической связности 2-го рода) тогда и только тогда, когда оно является орбитой такой подгруппы F, которая ортогональна в метрике Картана к стационарной подгруппе H точки в G/H. В связи с этим результатом в [7*] перечислен ряд классов ортогональных пар подгрупп группы $O(N)$, изоморфных прямым произведениям групп $O(l_a)$, $U(m_k)$, $\mathrm{Sp}(2n_r)$, действующих независимо в попарно вполне ортогональных $E(l_a)$, $\overline{E}(2m_k)$, $\tilde{E}(4n_r)$ в $E(N)$ и тождественно в их ортогональном дополнении. В частном случае, когда участвуют лишь $O(l_a)$, эти классы были выведены в [8*]. Подробное расширенное изложение общего случая дано в [13*].

Далее вышеуказанный результат был перенесен на общий случай редуктивного однородного пространства G/H с оснащающим m (т. е. $g=h\oplus m$, $[h, m]\subset m$). Условие ортогональности подгруппы F к H (в случае компактного G) обобщается в [10*] в виде условия нормальности F, требующего, чтобы имело место $f=(f\cap h)\oplus(f\cap m)$. Это условие равносильно вполне геодезичности орбиты подгруппы F относительно связности Рашевского.

В последующих своих работах А. М. Васильев видел возможность ввести целые семейства инвариантных аффинных связностей без кручения в такой ситуации, когда H не является максимальной редуктивно оснащенной подгруппой группы G. Постепенно углубляясь в предмет, начиная с [11*], он дошел в [12*] и [14*] до такой постановки, когда в случае G/H с редуктивным оснащением m имеются последовательности $G \supset H_1 \supset \ldots \supset H_p \supset H$ и $m_1 \subset \ldots \subset m_p \subset m$ подгрупп и подпространств, такие что любая пара (H_λ, m_λ) редуктивна при $1 \leqslant \lambda \leqslant p$, т. е. $g = h_\lambda \oplus m_\lambda$, $[h_\lambda, m_\lambda] \subset m_\lambda$. В этом случае можно базисные левоинвариантные 1-формы на G выбрать и группировать в виде $\omega^{i_0}, \omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_p}, \omega^i$ так, чтобы уравнения $\omega^{i_0} = \ldots = \omega^{i_{\lambda-1}} = 0$ определяли подгруппу H_λ, уравнения $\omega^{i_0} = \ldots = \omega^{i_p} = 0$ — подгруппу H, а уравнения $\omega^{i_\lambda} = \ldots = \omega^{i_p} = \omega^i = 0$ определяли оснащение m_λ, уравнения $\omega^i = 0$ — оснащение m. Установлено, что тогда при любом выборе постоянных $\zeta_{\nu\lambda}$ $(\lambda = 0, \ldots, p;\ \nu = \lambda + 1, \ldots, p)$ уравнения

$$d_t \omega^{i_\lambda} = C^{i_\lambda}_{k_\lambda l} \omega^{k_\lambda} \omega^l + \zeta_{\nu\lambda} C^{i_\lambda}_{k_\lambda l_\nu} \omega^{k_\lambda} \omega^{l_\nu}$$

определяют в G/H геодезические линии вполне определенной инвариантной связности без кручения. Полученное семейство связностей названо семейством C'-связностей, соответствующих заданным последовательностям. Частный случай так называемых C-связностей, когда $\zeta_{\nu\lambda} = 1 - \xi_{\lambda+1} \cdot \xi_{\lambda+2} \cdot \ldots \cdot \xi_\nu$, был рассмотрен в [11*]. Исследован также и вопрос о вполне геодезических подмногообразиях C'-связностей [14*]. Сводное изложение этого цикла работ дано в [16*].

В качестве примера применения развитой общей теории в [15*] определены геодезические и вполне геодезические подмногообразия в пространстве линейных элементов (точка, единичный вектор) евклидова пространства E_3 при различных редуктивных оснащениях и связностях. Получились наглядные иллюстрации почти всех основных положений общей теории. В [17*] затем перечисляются все семейства линейных элементов, огибаемые вполне геодезическими подмногообразиями, найденными в [15*]. В вводной части дается общий подход к задаче нахождения подмногообразий однородного пространства, огибаемых максимальными интегральными многообразиями некоторой вполне интегрируемой системы, зависящей от параметров и заданной на этом пространстве.

2. Описанные в первом пункте две группы работ А. М. Васильева: по классической линейчатой геометрии и по геометрии однородных пространств редуктивного типа — базируются на картановском методе подвижного репера и внешнем дифференциальном исчислении, дающем алгебраический аппарат структурных форм и уравнений однородного пространства и действующей в нем группы Ли. Эти две группы работ разделяют во времени работы, составляющие содержание кандидатской работы А. М. Васильева, в которых в связи с созданием метода продолжений и охватов начинает проявляться его глубокий интерес к развитию инвариантных теоретико-групповых и алгебраических методов исследования самых различных дифференциально-геометрических структур. Итоги этого этапа становления, развития и приложений нового инвариантного метода были подведены в обзорном докладе Г. Ф. Лаптева [7] на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 году, а также в докладе А. М. Васильева [6*]. Как отмечалось в докладе Г. Ф. Лаптева, целью дифференциальной геометрии является изучение свойств многообразий, вложенных в пространства, преобразуемые либо конечномерной группой Ли, либо псевдогруппой Ли, как правило, бесконечного типа. Первоначальный вариант метода продолжений и охватов был сформулирован Г. Ф. Лаптевым для пространств с соответствующей групповой связностью. Картановская теория структурных уравнений инвариантных форм псевдогрупп Ли позволила А. М. Васильеву без каких-либо широких обобщений приложить метод продолжений и охватов к случаю псевдогрупп Ли, среди которых прежде всего выделяется псевдогруппа всех локальных диффеоморфизмов многообразия. Как заметил Г. Ф. Лаптев, этот вклад А. М. Васильева в новый метод придал ему завершенность и универсальность.

Пусть M_n — гладкое n-мерное многообразие, на котором действует псевдогруппа (группа) Ли G. Над M_n выстраивается бесконечная последовательность (для группы конечная) главных расслоенных пространств реперов различных порядков с транзитивным послойным действием G

$$M_n \underset{\omega^{\alpha_0}}{\longleftarrow} H(M_n) \underset{\omega^{\alpha_0},\,\omega^{\alpha_1}}{\longleftarrow\!\!-\!\!-} H^2(M_n) \underset{\omega^{\alpha_0},\,\omega^{\alpha_1},\,\omega^{\alpha_2}}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-} \ldots,$$

где дифференциальные формы $\omega^{\alpha_0}, \omega^{\alpha_1}, \ldots, \omega^{\alpha_p}$ для каждого $p=0, 1, 2, \ldots$ определяют соответствующие инвариантные семейства кореперов на M_n, $H(M_n), \ldots, H^{p+1}(M_n)$. Дифференциально-геометрические свойства подмногообразия $S \subset M_n$ характеризуются уравнениями

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_a \omega^a, \quad (\omega^\alpha, \omega^a) = \omega^{\alpha_0}, \quad a = 1, 2, \ldots, \dim S, \quad \alpha_0 = 1, 2, \ldots, n,$$

и их дифференциальными продолжениями

$$\nabla \lambda^\alpha_a = d\lambda^\alpha_a + \theta^\alpha_a = \lambda^\alpha_{ab}\omega^b, \quad \nabla \lambda^\alpha_{ab} = d\lambda^\alpha_{ab} + \theta^\alpha_{ab} = \lambda^\alpha_{abc}\omega^c, \ldots,$$

получаемыми на каждом шаге внешним дифференцированием предыдущей системы с последующим применением леммы Картана. При этом используются структурные уравнения для внешних дифференциалов форм $\omega_{\alpha_0}, \omega_{\alpha_1}, \ldots$.

$$d\dot{\omega}^{\alpha_0} C^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0}\omega^{\beta_0} \wedge \omega^{\gamma_0} + C^{\alpha_0}_{\beta_0\alpha_1}\omega^{\beta_0} \wedge \omega^{\alpha_1},$$

$$d\omega^{\alpha_1} = C^{\alpha_1}_{\alpha_1\beta_1}\omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\beta_1} + C^{\alpha_1}_{\alpha_0\alpha_1}\omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_1} + C^{\alpha_1}_{\alpha_0\alpha_2}\omega^{\alpha_0} \wedge \omega^{\alpha_2}, \ldots$$

с постоянными структурными коэффициентами $C^{\alpha_0}_{\beta_0\gamma_0} C^{\alpha_0}_{\beta_0\alpha_1}, \ldots$. Дифференциальные формы θ^α_a, θ^α_{ab}, ... линейно выражаются через линейные дифференциальные формы ω^{α_1}, ω^{α_2}, ... с коэффициентами — многочленами возрастающей степени относительно λ_a^α, λ_{ab}^α, ... В каждой точке подмногообразия S λ_a^α, λ_{ab}^α ... образуют координаты касательного элемента порядка $1, 2, \ldots, p$ (относительно свободного репера соответствующего порядка), который сам является элементом некоторого расслоенного над M_n пространства $\Lambda^p(M_n)$, ассоциированного с соответствующим главным расслоением $H^p(M_n)$, с послойным и, вообще говоря, нетранзитивным действием G.

Пусть $F(M_n)$ — произвольное расслоенное над M_n пространство, ассоциированное с каким-то $H^p(M_n)$. Его элементами являются геометрические объекты определенного типа порядка p относительно G. Если Y^i — координаты элемента $y \in F(M_n)$ относительно произвольного репера из $H^p(M_n)$, то структура $F(M_n)$ характеризуется вполне интегрируемой системой структурных дифференциальных форм вида

$$\nabla Y^i = dY^i + F^i_\alpha(Y)\,\omega^\alpha,\ \ \omega^{\alpha_0}\,(\omega^\alpha = \omega^{\alpha_1}, \omega^{\alpha_2}, \ldots, \omega^{\alpha_p}).$$

На $F(M_n)$ также определено послойное действие G, сохраняющее относительные координаты Y^i преобразуемых элементов $F(M_n)$. Если $\Phi(M_n)$ — другое, ассоциированное с $H^p(M_n)$ расслоение меньшей, чем $F(M_n)$, размерности со структурными формами $\nabla Z^s = dZ^s + \Phi_\alpha{}^s(Z)\,\omega^\alpha$, ω^{α_0}, то послойное, тождественное по M_n отображение

$$\varphi : F(M_n) \to \Phi(M_n),$$

инвариантное относительно действия G, определяется отображением типовых слоев

$$Z^s = Q^s(Y^i)$$

и называется отображением охвата. Г. Ф. Лаптев сформулировал критерий охвата, который выражается в терминах структурных форм ∇Y, ∇Z условием

$$\nabla Z^s = \frac{\partial Q^s}{\partial Y^i}\nabla Y^i.$$

Искусство отыскания отображений Q, подчиняющихся приведенному условию, составляют основу практического владения методом продолжений и охватов. Изучение дифференциально-геометрических свойств подмногообразия $S \subset M_n$ состоит прежде всего в отыскании всевозможных охватов

$$\varphi : \Lambda^p(M_n) \to \Phi(M_n),\ \ p = 1, 2, \ldots,$$

то есть в построении в инвариантной форме всех геометрических объектов, определяемых касательными элементами различных порядков на основе критерия охвата и структурных форм $\nabla\lambda_a{}^\alpha$, $\nabla\lambda_{ab}{}^\alpha$, ...

Используя алгебраическую теорию инвариантов, А. М. Васильев обосновывал применение лишь рациональных алгебраических операций при построении формул охвата Q^s. Если система уравнений

$$Q^s(\lambda^\alpha_a, \lambda^\alpha_{ab}, \ldots)=0$$

имеет инвариантный относительно действия G смысл, то подмногообразия S, для которых в каждой точке $Q^s(\lambda)\equiv 0$, образуют специальный класс, характеризуемый некоторым общим для этого класса геометрическим свойством.

Аналогичной схеме поддается изучение подмногообразий, вложенных в $H(M_n)$, $H^2(M_n), \ldots$ и любое ассоциированное расслоение $F(M_n)$, в частности, подрасслоения этих расслоений и их сечения — поля геометрических объектов. Например, подмногообразия в расслоениях $\Lambda^p(M_n)$ различных порядков, или в расслоениях p-струй $T^p(M_n, F(M_n))$ сечений $M_n \to F(M_n)$, являясь системами дифференциальных уравнений, могут изучаться геометрическими методами, как и любая другая геометрическая структура, подвергаясь в частности инвариантной классификации, с построением присоединенных объектов, групп инвариантности, преобразований Ли—Бэклунда, законов сохранения и других свойств. Этими же методами могут исследоваться лагранжианы различных порядков, соответствующие различным вариационным задачам (геометрия Финслера, Кавагучи, метрических пространств Картана). Связности в расслоенных пространствах также представляют собой сечения некоторых надстроек над исходным расслоением.

В упомянутом докладе Г. Ф. Лаптева приведены имевшиеся к тому времени весьма успешные реализации нового метода в широком спектре дифференциально-геометрических структур. С тех пор каждый год приносил новые достижения на этом пути. Однако, и картановский метод канонизации подвижного репера с целью получения дифференциальных инвариантов, особенно в сочетании с методом продолжений и охватов, не исчерпал всех своих возможностей и как вспомогательный прием временного характера, и как метод, неизбежный в особо сложных ситуациях. Поскольку процесс канонизации, означающий сужение расслоений реперов, протекает не однозначно, а для различных классов подмногообразий данного типа имеет существенно различный характер, включающий в себя вопросы существования тех или иных классов, возникает задача изучения и реализации всех внешних дифференциальных алгебр, подобных алгебрам, образованным структурными формами тех или иных дифференциально-геометрических структур. А. М. Васильев приступил к разработке указанных выше дифференциально-алгебраических вопросов теории дифференциально-геометрических структур лишь после завершения цикла работ по теории инвариантных аффинных связностей в редуктивных однородных пространствах, не требовавших большого разнообразия инвариантных алгебраических методов, ограничивавшихся аппаратом структурных уравнений инвариантных форм группы Ли однородного пространства, а также аппарата вполне приводимых матричных ассоциативных алгебр.

Первая работа А. М. Васильева по разработке своей теории внешних дифференциальных алгебр и их геометрических реализаций появляется в 1966 году [21*], затем следует большой цикл работ в этом направлении [24*], [25*], [26*], [27*], [28*], [31*], [32*], [33*], [34*], [35*], [38*], завершаемый книгой [48*]. Среди этого цикла работ мы видим работы [36*], [37*], [39*], в которых начата разработка двойственного контравариантного алгебраического аппарата. В следующем пункте нашего обзора дано более детальное обозрение цикла дифференциально-алгебраических исследований А. М. Васильева.

3. Всякий геометр, выполняющий работу, основанную на методе внешних форм Картана, видит преимущественно алгебраический характер используемых средств, и необходимость постоянно прибегать к дифференцированию не говорит о сколько-нибудь значительной роли аналитического аппарата. Многие исследования посвящены выявлению в достаточно полном объеме границ алгебраической части в изучении дифференциально-геометрических образов достаточно широкого класса. Наибольшая преемственность обеспечивается при исследованиях в рамках дифференциальной алгебры.

В 1964—1965 гг. была опубликована работа Зингера и Стернберга о бесконечных группах Ли—Картана [16] и примыкающая к ней работа Гиемина и Стернберга [15].

В этих работах локально транзитивным (однородным) геометрическим объектам сопоставлены алгебраические объекты — бесконечномерные фильтрованные алгебры Ли, содержащие в себе всю информацию о локальных свойствах исходных геометрических объектов. Однако роль ассоциативных (внешних) алгебр здесь невелика. Кроме того, этот аппарат фактически бесполезен при изучении интранзитивных геометрий общего вида.

В период 1965—1975 гг. в указанной серии работ А. М. Васильева была существенно развита теория бесконечномерных внешних дифференциальных градуированных алгебр (внешнее дифференциальное исчисление), моделирующих чрезвычайно широкий класс объектов локальной дифференциальной геометрии, содержащий все ранее рассмотренные обобщенные пространства. Тем самым был создан универсальный метод изучения дифференциально-геометрических структур.

Была выдвинута программа исследования геометрических образов, содержащая следующие этапы:

1) точное описание категории $\mathfrak{M}$ изучаемых структур;

2) определение категории $\mathfrak{U}$ алгебраических систем, служащих для их изучения;

3) задание обладающего функториальными свойствами отображения, реализующего алгебраические системы из $\mathfrak{U}$ в множестве аналитических объектов (дифференциальных форм, векторных полей и т. д.) на многообразиях, составляющих категорию $\mathfrak{M}$.

3.1. Инволютивность. Понятие инволютивности в смысле Картана и Спенсера получило широкое обобщение в [25*], [31*]. Представляя и самостоятельный интерес, оно позволило найти условия построения бесконечной последовательности продолжений заданной внешней дифференциальной алгебры.

Рассматриваются градуированные модули над внешними алгебрами. Под внешней алгеброй понимается градуированное векторное пространство $F=\sum\limits_{p\geq 0} F^{(p)}$ с ассоциативным умножением, причем, если $\omega\in F^{(p)}$, $\theta\in F^{(q)}$, то $\omega\wedge\theta\in F^{(p+q)}$ и $\omega\wedge\theta=(-1)^{pq}\theta\wedge\omega$. Простейшим примером является свободная внешняя алгебра F_n с n образующими $\omega^1,\ldots,\omega^n$ первой степени и единицей. Естественным образом определяются гомоморфизм, подалгебра, идеалы. Внешним левым F-модулем M называется градуированное векторное пространство с билинейным отображением $F\times M\to M$, такое что $F^{(p)}M^{(q)}\subset M^{(p+q)}$ и $\alpha(\beta x)=(\alpha\wedge\beta)x$ при $\alpha,\beta\in F$, $x\in M$.

Гомоморфизмы и подмодули рассматриваются обычно градуированные. Свободный внешний F-модуль представляет тензорное произведение $F\otimes Z$, где Z — градуированное векторное пространство. Заметим, что $M^*=\operatorname{Hom}_F(M,F)$ будет правым F-модулем. Кроме того, $(F\otimes Z)^*=F\otimes Z^*$, так что сопряженный к свободному модулю также будет свободным. Определено естественное билинейное отображение $M\times M^*\to F$, называемое скалярным произведением и обозначаемое через $\langle x,a\rangle_F$, $x\in M$, $a\in M^*$.

Если $M\subset F\otimes Z$ — подмодуль, то ортогональный подмодуль $M^\perp\subset F\times Z^*$ по определению равен

$$M^\perp=\{x\in F\otimes Z^*/\ \langle x,\ M\rangle_F=0\}. \tag{1}$$

Имеется естественный изоморфизм $(F\otimes Z^*)/M^\perp=M^*$. Кроме того, $(M^\perp)^\perp=M$, так что $(M^*)^*=M$.

Рассмотрим модули над свободной внешней алгеброй $F=F_n$ с выделенной системой образующих $\omega^1,\ldots,\omega^n$ первой степени и пусть φ_p — идеал в F_n, порожденный элементами $\omega^p,\ldots,\omega^n$ $(p=1,\ldots,n)$, так что $F=\varphi_1\supset\varphi_2\supset\ldots\supset\varphi_n=\omega^n\wedge F$.

Пусть M — подмодуль свободного модуля $F\otimes L_0$, а $M^\perp$ — ортогональное дополнение в $F\otimes L_0^*$. Вводится обозначение

$$C_p=\{a\in F\otimes L_0/\ \langle a,\ M^\perp\rangle_F\subset\varphi_p\}. \tag{2}$$

Очевидно, $M\subset C_p$, $\varphi_p\otimes L_0\subset C_p$.

Определение 1. Подмодуль $M\subset F\otimes L_0$ называется инволютивным в степени h в проективном смысле, если

1) L_0 не имеет ненулевых элементов степени выше $h-1$;

2) $C_p^{(h)}=(M+\varphi_p\otimes L_0)^{(h)}$ при всех $p=1, 2, \ldots, n$.

Пример 1. Пусть $M=0$, $L_0=\sum_{j<m} L_0^{(j)}$. Тогда $M^1=L_0^*\otimes F$, $C_p=L_0\otimes\varphi_p$ и модуль инволютивен в любой степени $h>m$.

Пример 2. Пусть $M=L_0\otimes F$. Тогда $M^\perp=0$, $C_p=L_0\otimes F$ и модуль инволютивен в любой степени $h>m$.

Пример 3. Пусть $L_0=L_0^{(-1)}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а модуль M порожден образующими $\omega^1 e_1, \ldots, \omega^n e_n$. Если $\gamma\in M^\perp$, $\gamma e_i=\Omega_i\in F$, то $\omega^i\wedge\Omega_i=0$, то есть $\Omega_i=\omega^i\Omega_i$, где $\Omega_i\in F$. Из этого следует, что $C_p/(M+\varphi_p\otimes L_0)$ изоморфно пространству $\wedge\{\omega^1, \ldots, \omega^{p-1}\}\otimes\{e_p, \ldots, e_n\}$. Значит M будет инволютивен в степени h, если $h>n-2$.

Определение 2. Фактормодуль $M=(L_0\otimes F)|_l$ называется инволютивным в степени l в инъективном смысле, если сопряженный модуль $M^*\subset L_0^*\otimes F$ инволютивен в степени $h=-l$ в проективном смысле.

Пример 1. Если $L_0=\sum_{j>m} L_0^{(j)}$, $I=0$, то фактормодуль $L_0\otimes F=(L_0\otimes F)|_0$ инволютивен в степени $l<m$ в инъективном смысле.

Пример 2. Нулевой фактормодуль $0=(L_0\otimes F)/(L_0\otimes F)$ инволютивен в степени $l<m$ в инъективном смысле.

Пример 3. Пусть $K=K^{(1)}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$, а $M=(K\otimes F)|_I$ является фактормодулем по подмодулю $\sum_i F\omega^i e_i$ с образующими второй степени. Тогда сопряженный модуль $M^*\subset K^*\otimes F$ изоморфен ортогональному подмодулю $I^\perp\subset K^*\otimes F$. Его образующими являются $\omega^1 e_1^*, \ldots, \omega^n e_1^*$, где $\{e_i^*\}$ — базис, дуальный к $\{e_i\}$. Так как такой модуль инволютивен в степени $h>n-2$ в проективном смысле, то исходный фактормодуль инволютивен в степени $l>2-n$ в инъективном смысле.

При построении реализаций внешних алгебр используются следующие результаты об инволютивных модулях, [35*].

Предложение 1. Пусть F_n-модуль $M\subset K\otimes F_n$ инволютивен в степени h в проективном смысле, причем $K=\bigoplus_{\alpha\geqslant q} K^{(\alpha)}$, $K^{(+)}=\bigoplus_{\alpha>q} K^{(\alpha)}$ и задан линейный изоморфизм $\varepsilon:\overline{K}\to K^{(q)}\otimes F_n^{(1)}$. Пусть $\tilde{K}=\overline{K}\oplus K^{(+)}$, а $f=\tilde{K}\otimes F_n\to K\otimes F_n$ — гомоморфизм, такой что $f|_{\overline{K}\otimes F_n}=\varepsilon\otimes id$, $f|_{K^{(+)}\otimes F_n}=id$. Тогда модуль $\tilde{M}=f^{-1}(M)\subset \subset K\otimes F_n$ инволютивен в степени h.

Предложение 2. Пусть модуль $M\subset K\otimes F_n$ инволютивен в степени h в проективном смысле относительно базиса

$\omega^1, \ldots, \omega^n \in F_n^{(1)}$. Тогда подмодуль $\overline{M} \subset K \otimes F_{m+n} = K \otimes (F_m \wedge F_n)$, порожденный $M \subset K \otimes F_n \subset K \otimes (F_n \wedge F_m) = K \otimes F_{n+m}$, инволютивен в степени h относительно любого базиса в $F_{n+m}^{(*)}$, содержащего $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

3.2. Продолжения внешних модулей. В трудах А. М. Васильева для целей локальной дифференциальной геометрии впервые стали использоваться такие понятия гомологической алгебры, как инъективные, проективные модули и резольвенты.

Определение 1. Проективным продолжением модуля M называется эпиморфизм $\delta: K \otimes F \to M$. Ядро $M_1 = \operatorname{Ker} \delta$ этого эпиморфизма также называется проективным продолжением модуля M.

Таким образом, имеется точная последовательность

$$0 \to M_1 \to K \otimes F \xrightarrow{\delta} M \to 0 \qquad (3)$$

гомоморфизмов модулей, причем $K \otimes F$ — свободный модуль. Проективное продолжение обладает свойством универсальности: для любого гомоморфизма $\delta_0: L \otimes F \to M$ существует гомоморфизм $\delta_0^0: L \otimes F \to K \otimes F$, такой что $\delta_0 = \delta \cdot \delta_0^0$. Построив семейство проективных продолжений вида

$$0 \to M_{l+1} \to K_{l+1} \otimes F \xrightarrow{\delta_l} M_l \to 0 \qquad (4)$$

и применив операцию умножения точных последовательностей, получим длинную точную последовательность

$$\ldots \to K_2 \otimes F \xrightarrow{\delta_2} K_1 \otimes F \xrightarrow{\delta_1} M \to 0, \qquad (5)$$

называемую резольвентой модуля M.

Определение 2. Сокращением проективного продолжения (3) называется эндоморфизм $\varepsilon: K \otimes F \to \tilde{K} \otimes F \subset K \otimes F$, такой что $\delta\varepsilon = \delta$.

Тогда имеем проективное продолжение $\tilde{K} \otimes F \xrightarrow{\tilde{\delta}} M \to 0$. При сокращении продолжений δ_l в $\tilde{K} \otimes F$ получаем сокращение резольвенты $\ldots \xrightarrow{\tilde{\delta}_2} \tilde{K}_2 \otimes F \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \tilde{K}_1 \otimes F \to 0$. Роль сокращений заключается в том, что резольвента, полученная каким-либо грубым стандартным приемом, заменяется резольвентой с меньшим числом образующих.

Определение 3. Инъективным продолжением модуля M называется точная последовательность модулей вида

$$0 \to M \xrightarrow{\Delta} K \otimes F \to M_1 \to 0. \qquad (6)$$

Очевидным образом конструируется инъективная резольвента

$$0 \to M \to K_1 \otimes F \to K_2 \otimes F \to \ldots \qquad (7)$$

из последовательности инъективных продолжений

$$0 \to M_i \xrightarrow{\Delta i} K_{i+1} \otimes F \to M_{i+1} \to 0. \tag{8}$$

Определение 4. Сокращение инъективного продолжения (6) это эндоморфизм ε модуля $K \otimes F$, для которого $\Delta(K \otimes F) = \tilde{K} \otimes F$, $\varepsilon\Delta = \Delta$. При сокращении инъективных продолжений (8) получается сокращение инъективной резольвенты.

При переходе к сопряженным модулям инъективные продолжения и резольвенты переходят в проективные и наоборот.

Теорема 1. Всякая проективная резольвента модуля, инволютивного в степени h в проективном смысле, сократима до резольвенты, в которой степени элементов из K_i не превосходят $h+i-1$.

Теорема 2. Всякая инъективная резольвента модуля, инволютивного в степени l в инъективном смысле, сократима до резольвенты, в которой степени элементов из K_i не ниже $l+i-1$.

Эти теоремы играют ключевую роль в теории продолжений внешних дифференциальных алгебр.

Важным примером проективного продолжения является натуральное, получаемое сокращением продолжения $\Delta_0 : M \otimes F \to M \to 0$. Таким образом, здесь $K_0 = M$ рассматривается как свободный модуль над основным полем скаляров f, а $\Delta_0(x \otimes \omega) = \omega \cdot x$ при $x \in M$, $\omega \in F$.

Применяя функтор Hom, получаем точную последователь ность $0 \to M^* = \underset{F}{Hom}(M, F) \to \underset{F}{Hom}(M \otimes F, F) = \underset{f}{Hom}(M, F) \otimes F$

Таким образом, получаем для F-модуля M^* инъективное продолжение. Заменяя M на M^*, получаем инъективное продолжение

$$0 \to M \to \underset{f}{Hom}(M^*, F) \otimes F \tag{9}$$

F-модуля M, то есть $K = \underset{f}{Hom}(M^*, F)$.

Натуральное инъективное продолжение определяется как двойственное к натуральному проективному продолжению, то есть получается сокращением (9).

3.3. Реализации внешних алгебр. Примером внешней алгебры является алгебра $\Lambda(M)$ внешних дифференциальных форм на многообразии M. Отметим, что $\Lambda(M \times N) = \Lambda(M) \wedge \Lambda(N)$.

Определение 1. Гладкой реализацией внешней алгебры $A = \underset{i}{\oplus} A^{(i)}$ называется мономорфизм $\Phi : A \to \Lambda(M)$, сохраняющий градуировку.

Пример 1. Если G — группа Ли, $\hat{G}$ — ее алгебра Ли, $\{e_i\}$ — базис $\hat{G}$, $\{\theta^i\}$ — дуальный базис из левоинвариантных дифференциальных форм на G, то соответствие $\omega^i \to \theta^i$ определяет реализацию алгебры F_n на многообразии G.

Пример 2. Если $M = \mathcal{F}(M_0)$ — расслоение реперов n-мерного многообразия M_0, то формы смещения $\omega^1, \ldots, \omega^n$ задают реализацию алгебры F_n на M.

Пример 3. Если $\pi: X \to M = \mathcal{F}(M_0)$ — субмерсии, то формы $\omega^i = \omega^i \pi^*$ задают реализацию F_n на многообразии X.

Реализация называется дифференциальной, если $\Phi d_A = d_M \Phi$, где d_A — дифференциал в алгебре A, d_M — внешний дифференциал формы в $\Lambda(M)$.

Реализация в примере 1 будет дифференциальной, если определить оператор d_A в алгебре F_n с помощью уравнений Маурера—Картана. Алгебра левоинвариантных дифференциальных форм на группе G обозначается через $A_{\hat{G}}$. Отметим, что $A_{\widehat{G \times H}} = A_{\hat{G}} \wedge A_{\hat{H}}$.

Реализация из примера 2 не является дифференциальной ни при каком выборе d_A, так как подалгебра в $\Lambda(F(M.))$, порожденная формами смещения, не является дифференциальной.

Естественно поставить вопрос о наличии реализации данной внешней (дифференциальной) алгебры и о классификации таких реализаций. Для успешного решения такой задачи необходимо наложить некоторые ограничения на строение алгебры A.

Определение 2. Геометрической тройкой называется расслоение $\tau: G \times V \to F$, инвариантное относительно действия группы G на $G \times V$ и на F, [48*].

Таким образом, группа G действует слева на F, причем $\tau(g_1 g_2, v) = g_1 \tau(g_2, v)$, $g_1, g_2 \in G$, $v \in V$.

Типичный пример геометрической тройки получается, если имеется действие группы Ли G на многообразии V. Тогда $\tau(g, v) = gv$.

Алгебра дифференциальных форм на $G \times V$ изоморфна $\Lambda(G) \wedge \Delta(V)$. Подалгебра G-инвариантных форм изоморфна $A_{\hat{G}} \wedge (\Lambda(V))$. Таким образом, $A_{\hat{G}} \wedge (\Delta(V))$ реализуется на многообразии $G \times V$. Слои расслоения определяются уравнением $gv = \mathrm{const}$, откуда $dg \cdot v + g \cdot dv = 0$, $g^{-1} dg \cdot v + dv = 0$. Таким образом, они являются интегральными многообразиями распределения, порожденного линейными дифференциальными формами $(g^{-1} dg) v + dv$. В результате, факторалгебра $A_{\hat{G}} \wedge (\Lambda(V))$ по дифференциальному идеалу I, порожденному $g^{-1} dg \cdot v + dv$, реализуется на базе расслоения.

Мы видим, что реализации проще всего находятся для алгебр вида $(A_{\hat{G}} \wedge B)|_I$, где I — дифференциальный идеал, порожденный элементами первой степени. Они называются внешними дифференциальными тройками [48*].

3.4. Продолжения внешних алгебр. Пусть модуль M является фактором свободного модуля $K \otimes F$ по подмодулю $L: M =$

$=(K\otimes F)|_L$. Градуировка в K индуцирует градуировку в свободной внешней алгебре $[K]$ модуля K. Далее, $[K]\wedge F$ является внешней алгеброй, содержащей F в качестве подалгебры. Вложение K в $[K]$ определяет вложение $K\otimes F$ в $[K]\wedge K$. Подмодуль $L\subset K\otimes F$ порождает идеал $\{L\}\subset[K]\wedge F$. Фактор-алгебра $A(M)=([K]\wedge F)|_{\{L\}}$ содержит F в качестве подалгебры и $M=(K\otimes F)|_L$ в качестве F-подмодуля.

Эта конструкция определяет класс внешних алгебр, играющий большую роль в общей теории. Для реализации алгебр более общего вида необходимо сначала исследовать вопрос о вложении их в алгебры; для которых легко находятся подобные реализации. Такие вложения называются универсальными проекциями.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{B}^F$ — категория внешних алгебр, содержащих F, а $\mathfrak{U}^F$ — категория внешних алгебр вида $C\wedge F$. Универсальной проекцией алгебры $A\in\mathfrak{B}^F$ в категорию $\mathfrak{U}^F$ называется гомоморфизм $\varphi: A\to C\in\mathfrak{U}^F$, обладающий универсальным свойством.

Теорема 1. Пусть $M=(K_0\otimes F)|_L$, а $\Delta: M\to K\otimes F$ — инъективное продолжение, причем $K^{(i)}=0$ при $i<0$. Тогда естественное отображение $K_0\otimes F\to K\otimes F$ определяет гомоморфизм $\varphi(\Delta): A(M)\to[K]\wedge F$, обладающий универсальным свойством и потому задающий универсальную проекцию алгебры $A(M)$ в категорию $\mathfrak{U}^F$.

Если I — идеал в алгебре $A(M)$, аннулируемый универсальной проекцией, то факторалгебра $A(M)|_I$ называется квазилинейной. Она содержит F в качестве подалгебры и M в качестве подмодуля.

Приведенная теорема указывает способ реализации квазилинейных алгебр. Более сложной является задача о нахождении дифференциальных реализаций.

3.5. Продолжения внешних дифференциальных алгебр.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{B}_d^F$ — категория дифференциальных алгебр, содержащих F в качестве подалгебры, а $\mathfrak{A}_d^F$ — категория дифференциальных алгебр вида $A=C\wedge F$. Универсальной проекцией алгебры $B\in\mathfrak{B}_d^F$ в категории $\mathfrak{A}_d^F$ называется морфизм $\Phi: B\to A\in\mathfrak{A}_d^F$, обладающий универсальным свойством.

Наличие универсальной проекции позволяет получить дифференциальную реализацию алгебры $B\in\mathfrak{B}_d^F$. Универсальная проекция может быть получена с помощью многократного применения конструкции дифференциального продолжения с использованием предельного перехода [31*].

Определение 2. Дифференциальным продолжением алгебры $B\in\mathfrak{B}_d^F$ называется последовательность $B\xrightarrow{\varphi}A\xrightarrow{\nabla}B_1$, такая что $A\in\mathfrak{U}^F$, $B_1\in\mathfrak{B}_d^F$, φ, ∇ являются F-гомоморфизмами, а $\nabla\cdot\varphi$ —

дифференциальный гомоморфизм с выполнением универсального свойства.

Теорема 1. Пусть внешняя дифференциальная алгебра B имеет вид $B=C\wedge D$, где $D=A(M)|_l$ — квазилинейная алгебра, $M=(K_0\otimes F)|_L$. Если $\Delta: M\to K\otimes F$ — инъективное продолжение, причем K обладает образующими неотрицательных степеней, то существует дифференциальное продолжение

$$B=C\wedge D\xrightarrow{\varphi} A=C\wedge[K]\wedge F\xrightarrow{\nabla} B_1=C\wedge[K]\wedge A(\tilde{M}_1), \qquad (10)$$

где $\tilde{M}_1=(\tilde{K}\otimes\tilde{F})|_{L_1}$, причем $\tilde{K}$ изоморфно K в силу изоморфизма d, повышающего степени всех элементов на единицу, а L_1 — образ Δ при соответствующем изоморфизме $K\otimes F\to\tilde{K}\otimes F$.

Теорема 2. Пусть внешняя дифференциальная алгебра B имеет вид $B=C\wedge D$, причем $D=A(M)|_l$ — квазилинейная алгебра, а модуль $M=(K_0\otimes F)|_L$ инъективен в инъективном смысле в нулевой степени. Тогда всякая инъективная резольвента

$$0\to M\to K_1\otimes F\to K_2\otimes F\to\ldots, \qquad (11)$$

в которой все элементы из K_i имеют степени не ниже $i-1$, определяет универсальную проекцию $\Phi: B\to A\in\mathfrak{U}_d^F$, причем $A=G\wedge F$, G — индуктивный предел алгебр $G_i=C\wedge\wedge[K_1']\wedge\ldots[K_i']$, а K_i' получено из K_i повышением степеней всех элементов на $i-1$.

Определение 3. Внешняя дифференциальная алгебра называется главной, если она имеет вид $B=C\wedge D$, где $D=A(M)|_l$ — квазилинейная, причем $M=(K_0\otimes F)|_L$ инволютивен в инъективном смысле в нулевой степени, $K_0=K_0^{(2)}+K_0^{(1)}$, $K_0^{(2)}\otimes\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^n\subset L$, а $C=[C^{(1)}]\wedge C_0$, где C_0 — алгебра с конечным числом образующих нулевой степени.

Теорема 3. Всякое дифференциальное продолжение, главной дифференциальной алгебры, описанное в теореме 1, является главной дифференциальной алгеброй, если инъективное продолжение $\Delta: M\to K\otimes F$, используемое при этом, является натуральным.

3.6. Дифференциально-алгебраические структуры. Подходящими объектами для реализации главных дифференциальных алгебр являются главные дифференциальные структуры, рассмотренные А. М. Васильевым в [32*]. Такие реализации согласованы с дополнительными структурами, имеющимися в алгебрах и расслоениях.

Пусть $E\xrightarrow{p} M_n$ — произвольное расслоение. Горизонтальный репер в точке $x\in E$ — это мономорфизм $b: R^n\to T_x$, такой что $p_*b: R^n\to T_{px}$ является изоморфизмом, то есть репером в точке $px\in M_n$. Полным продолжением первого порядка расслоения (E, p, M_n) называется многообразие $p^{[1]}(E)$ всех горизонтальных реперов. Определяется последовательность

$$\ldots \to p^{[k+1]}(E) \xrightarrow{p_{k+1}} p^{[k]}(E) \to \ldots \xrightarrow{p_2} p^{[1]}(E) \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} M_n \qquad (12)$$

полных продолжений произвольного порядка по индукции: $p^{[k+1]}(E)$ состоит из мономорфизмов $b: R^n \to T_x(p^{[k]}(E))$, $x \in p^{[k]}_{(E)}$, таких что $x = p_{k*} \cdot b: R^n \to T_{px} p^{[k-1]}(E)$.

Определение 1. Главной дифференциальной структурой на расслоении (E, p, M_n) называется подрасслоение

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & E \arrow[r, "p"] & M_n, \\ p^{[1]}(E) \arrow[ur, "p_1"'] & & \end{tikzcd} \qquad (13)$$

то есть μ — иммерсия, $p_1\mu$ — субмерсия.

Например, $p^{[2]}(E)$ является главной дифференциальной структурой на $(p^{[1]}(E), p_1 E)$.

Определение 2. Продолжением первого порядка главной дифференциальной структуры (13) называется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}^{(1)} \arrow[r, "\bar{p}_2"] \arrow[d, "\mu^{(1)}"'] & \mathscr{E} \arrow[dr, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\mu"'] & & \\ p^{[2]}(E) \arrow[r, "p_2"] & p^{[1]}(E) \arrow[r, "p_1"'] & E \arrow[r, "p"] & M_n \end{tikzcd}$$

где $\mu^{(1)}$, μ — иммерсии, $p, p_1, p_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2$ — субмерсии, $\mu^{(1)}(\mathscr{E}^{(1)}) \subset \subset \mathscr{E}^{[1]}$ и для всякого $q \in \mathscr{E}$ $\mu^{(1)} p_2^{-1}(q)$ является плоским подпространством в $p_2^{-1}\mu(q) \subset p^{[2]}(E)$.

Продолжение порядка k определяется по индукции как расслоение $\mathscr{E}^{(k)}$ над M_n, для которого задана коммутативная диаграмма морфизмов

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}^{(k)} \arrow[r, "\bar{p}_{k+1}"] \arrow[d, "\mu^{(k)}"'] & \mathscr{E}^{(k-1)} \arrow[r] \arrow[d, "\mu^{(k-1)}"'] & \cdots \arrow[r] & \mathscr{E}^{(1)} \arrow[r] \arrow[d, "\mu^{(1)}"'] & \mathscr{E} \arrow[dr, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\mu"'] & & \\ p^{[k+1]}(E) \arrow[r, "p_{k+1}"] & p^{(k)}(E) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p^{[2]}(E) \arrow[r] & p^{[1]}(E) \arrow[r, "p_1"'] & E \arrow[r, "p"] & M_n \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки — иммерсии, а остальные — субмерсии, $\mathscr{E}^{(l)}$ — продолжение порядка l структуры $\mathscr{E}$ при $l \leqslant k-1$, а слой $\mathscr{E}^{(k)}$ над элементом $q \in \mathscr{E}^{(k-1)}$ является плоским аффинным подпространством пространства элементов $\mathscr{E}^{[k]} \subset p^{[k+1]}(E)$, проектирующихся в тот же элемент $q \in \in \mathscr{E}^{(k-1)} \subset \mathscr{E}^{[k-1]}$.

Определение 3. Дифференциально-алгебраической структурой называется фундаментальная реализация главной дифференциальной алгебры на главной дифференциальной структуре (точное определение фундаментальной реализации см. в [32*]).

Теорема 1. Пусть $B=C\wedge D$ — главная дифференциальная алгебра, $D=A(M)|_l$, причем выполнены следующие дополнительные условия: а) модуль M инволютивен в нулевой степени в инъективном смысле; б) идеал, порожденный подалгеброй $F_n\subset B$, является дифференциальным; в) существует подпространство $S^{(0)}\subset C_0$, порождающее алгебру C_0, такое, что $d\{F_n^{(1)}\oplus C^{(1)}\oplus S^{(0)}\}\subset C\wedge F_n+k_0$. Тогда алгебра B имеет фундаментальную реализацию.

Отметим, что условия б), в) являются необходимыми, то есть для всякой алгебры, допускающей фундаментальную реализацию, они выполняются.

Теорема 2. Пусть $(B, \mathscr{E})$ — дифференциально-алгебраическая структура, $B=C\wedge D$, $D=A(M)|_l$, $M=(K_0\otimes F_n)/L$, $B\xrightarrow{\varphi}A\xrightarrow{\nabla}B_1$ — дифференциальное продолжение алгебры B, определенное натуральным инъективным продолжением $\Delta: M\to K_1\otimes F_n$. Существует фундаментальная реализация алгебры B_1 на $\mathscr{E}^{(1)}$, такая что гомоморфизм $\nabla\varphi: B\to B_1$ коммутирует с гомоморфизмом реализации этих алгебр на $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}^{(1)}$, индуцированным проекцией $\mathscr{E}^{(1)}\to\mathscr{E}$.

Теорема 2 определяет продолжение дифференциально-алгебраической структуры. Продолжение любого порядка можно определить по индукции.

Теорема 3. Пусть дифференциально-алгебраическая структура $(B, \mathscr{E})$ такова, что модуль $M\subset K\otimes F_n$ инволютивен в нулевой степени в инъективном смысле. Тогда $(B,\mathscr{E})$ обладает продолжениями любого порядка ([32*]).

Мы заканчиваем этот достаточно предметный обзор дифференциально-алгебраических работ А. М. Васильева, выявляющих чисто алгебраическую сущность операций, которыми оперируют при исследованиях любых геометрических образов на гладких многообразиях современными методами, основанными в основном на исчислении внешних дифференциальных форм. Разумеется в конкретных геометрических исследованиях такими методами оперирование алгебраической терминологией не является неизбежным, и это ярко иллюстрируют чисто геометрические работы А. М. Васильева этого же периода. Основные геометрические интересы последнего периода деятельности А. М. Васильева лежат в исследованиях систем дифференциальных уравнений, трактуемых как геометрические структуры на многообразии. Основной круг вопросов здесь: вопросы классификации, отыскания законов сохранения, геометрической трактовки и отыскания преобразований Ли—Бэклунда, геометрической трактовки вопросов теории солитонов. Таковой была и тематика последних учеников и аспирантов А. М. Васильева.

В следующем пункте приводится никоим образом не претендующий на полноту обзор некоторых направлений, представленных в научной школе А. М. Васильева.

4. Разработанные А. М. Васильевым новые методы дифференциально-геометрических исследований требовали постановки и новых задач более глубокого изучения различного рода дифференциально-геометрических структур. А. М. Васильев был, пожалуй, первым среди крупных специалистов в области дифференциальной геометрии в СССР, который начал систематически ставить такие задачи. Как правило, эти задачи уходили своими корнями в классическую проблематику дифференциальной геометрии, что надежно обеспечивало их геометрический характер, но в современной постановке оказывались на стыке различных математических теорий, одной из которых неизменно являлась дифференциальная геометрия. Решение этих задач требовало от исследователя не только высокой математической культуры, но и порождало новые актуальные задачи, в том числе и в смежных областях.

Поэтому говоря о школе А. М. Васильева, возникшей в результате реализации многих интереснейших идей ее руководителя и насчитывающей к настоящему времени свыше четырех десятков докторов и кандидатов наук, очень трудно кратко охарактеризовать всю тематику проведенных исследований. Единственное, что объединяет эти работы, — это их современность, выражающаяся в постановке задач, их глубине, полноте исследования, и в методе.

Сделаем попытку очень кратко выделить некоторые направления, принадлежащие геометрической школе А. М. Васильева.

Довольно большая группа работ связана с геометрией дифференциальных уравнений (Н. В. Степанов, Р. В. Восилюс, Х. О. Кильп, Г. М. Кузьмина, Д. К. Петрушкевичуте, С. И. Билчев, Э. М. Шварцбурд, Л. Н. Орлова, Е. В. Ферапонтов).

Под изучением геометрии дифференциального уравнения подразумевается задание на дифференцируемом многообразии M, на котором действует псевдогруппа Ли G, некоторого дифференциального уравнения E; требуется выделить те свойства множества интегральных многообразий уравнения E, которые сохраняются при действиях псевдогруппы G. Для работ Н. В. Степанова [10] характерно стремление выделять геометрические инварианты, связанные с уравнением. Для изучения геометрии обыкновенного дифференциального уравнения он построил специальный дифференциально-алгебраический аппарат, с помощью которого удалось обобщить результат Э. Картана о том, что пространство интегральных элементов уравнения $y^{(3)}=0$ имеет структуру трехмерного псевдоевклидова пространства (с подобием): пространство интегральных кривых дифференциального уравнения

$$y^{(n)}=0 \qquad (1)$$

обладает структурой n-мерного аффинного пространства A_n, несобственной гиперплоскостью которого является $(n-1)$-мерное проективное пространство с фиксированной норм-кривой.

Была найдена также интерпретация геометрии этого уравнения в проективном пространстве P_n, причем оказалось, что A_n и P_n двойственны, и выделена максимальная группа инвариантности рассматриваемого уравнения — $(n+4)$-параметрическая группа Ли $g_{2,6}(n)$. Было дано описание групп инвариантности уравнения — это подгруппы

$$g_{2,13}(n);\ g_{3,3}(n);\ g_{3,5}(n);\ g_{3,6}(n);\ g_{3,7}(n);\ g_{5,4}(n);\ g_{6,1}(n).$$

К каждому уравнению (1) может быть присоединена некоторая связность, но лишь вышеперечисленные группы $g_{k,m}(n)$ могут быть фундаментальными группами этих фундаментально-групповых связностей при $n \geqslant 7$. Каждая из этих групп может быть определена как группа инвариантности определенного дифференциального уравнения порядка n, в некоторых координатах имеющего канонический вид

$$y^{(n)}=m_2y^{(n-2)}+\ldots+m_ny,\ m_k=\mathrm{const};\ k=2,\ldots,n.$$

Решена задача определения по данной группе $g_{m,k}(n)$ уравнения, для которого эта группа является группой инвариантности. Найден произвол, с которым группа $g_{m,k}(n)$ определяет уравнение (1): если уравнение порядка $n>1$ допускает группу инвариантности $g_{m,k}(n)$, то оно отличается от канонического уравнения, определяющего данную группу $g_{m,k}(n)$, на преобразование нормализатора этой группы.

Изучены строение и взаимосвязи инвариантов и инвариантных объектов дифференциального уравнения (1) и построена инвариантная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений. Выделены неизвестные ранее инвариантные классы таких уравнений.

Геометрия систем дифференциальных уравнений была одним из объектов исследований Р. В. Восилюса [2], который предложил новый способ построения внутренних связностей, представляющих собой их промежуточные интегралы (связности Лихнеровича). Отсюда Р. В. Восилюс пришел к разработке метода изучения дифференциально-геометрических структур, позволяющего изучать их с помощью современной теории дифференциальных операторов в расслоенных пространствах, который дал возможность получить различные дифференциально-геометрические связности, внутренним образом присоединяемые к дифференциально-геометрическим структурам конечного типа, и применить их к изучению геометрии дифференциальных уравнений.

Нетрудно заметить, что в этих исследованиях активно используется теория связностей, как теория некоторого класса дифференциально-геометрических структур. Изучением собственно теории связностей в однородных расслоениях и на однородных подмногообразиях занимался Ю. Г. Лумисте [8]. Им подробно изучены объекты кручения и кривизны связности, описывающие действие инфинитезимальной группы голономии на однородном слое. Особенность этих работ — направленность в сторону приложений. Недавние работы Ю. Г. Лумисте относятся к выяснению глубоких связей между теорией главных и присоединенных расслоений и связностей в них, с одной стороны, и калибровочными теориями — с другой. Им систематизированы, например, построение вспомогательных расслоений и разработка правоинвариантного формализма: вместо алгебры фундаментальных полей $\operatorname{fund} P$ рассматривается алгебра Ли $\operatorname{cal} P$ правоинвариантных вертикальных полей на главном расслоении P — подалгебра Ли в алгебре Ли инфинитезимальных автоморфизмов $\operatorname{aut} P$ [9].

А. С. Феденко [11] разработал метод отыскания симметрических пространств Картана с полупростой группой движений и нашел все такие пространства, группа которых — простая неспециальная. Им же найден и изучен класс римановых симметрических пространств с неполупростой группой движений, получающихся из пространств с простыми группами некоторым предельным переходом.

Как известно, в симметрическом римановом пространстве M с каждой точкой $x \in M$ связана инволютивная изометрия $S_x : M \to M$, для которой x является изолированной неподвижной точкой. А. С. Феденко ввел [12] понятие пространства с симметриями как такого многообразия M, с каждой точкой которого связано отображение S_x, оставляющее точку x неподвижной. Аналогично определяется пространство с локальными симметриями. Если пространство с симметриями снабжено какими-либо дополнительными структурами и каждая симметрия S_x сохраняет эти структуры, то M называется пространством с автосимметриями. Все разновидности симметрических пространств, а также некоторых их обобщений суть частные случаи пространств с (локальными) симметриями. Им же найдена классификация периодических локальных однородных пространств с простыми основными группами классических серий и с особыми простыми основными группами. Наконец, метод предельного перехода при изучении групп Ли перенесен на случай пространств с симметриями.

Изучение различных геометрий, многих задач, связанных со всевозможными дифференциально-геометрическими структурами на многообразиях, эквивалентно изучению G-структур с какой-нибудь конкретной группой G. П. Я. Грушко рассмотрел [3] категорию геометрических структур, являющихся некоторым обобщением понятия структуры по Чженю, и изучил отображения сопряженно транзитивных структур, обладающих некоторым сходством с однородными. Структура сопряженно транзитивна, если группа сопряженных автоморфизмов транзитивна на пространстве этой структуры. Класс сопряженно транзитивных структур обладает определенными преимуществами по отношению к классу транзитивных структур (например, устойчивость относительно расширения структурной группы или относительно операции неголономного расширения) и является более удобным для изучения с помощью техники структурных функций. Для этого класса был построен новый инвариант и с его помощью сформулирован критерий однородности геометрической структуры. Среди приложений отметим обобщение теории симметрических и периодических пространств, не выходящее за пределы теории сопряженно транзитивных структур.

В. Ф. Кириченко исследовал [4], [5] дифференциальную геометрию почти эрмитовых многообразий. Для этого был построен специальный математический аппарат, активно использующий понятие Q-алгебры над кольцом с инволюцией. Условие согласованности операции композиции с метрикой почти эрмитова многообразия превратило этот аппарат в более эффективное средство изучения этого класса многообразий, а развитие его дало возможность решить ряд трудных задач, например, теории почти контактных метрических структур классического и гиперболического типов. В результате были найдены примеры таких структур, которые по своим свойствам существенно отличались от классических почти эрмитовых структур.

Не ставя задачи перечислить здесь полученные результаты, заметим лишь, что удалось опровергнуть известную гипотезу о том, что сфера S^6 является единственным примером шестимерного приблизительно кэлерова многообразия с неинтегрируемой структурой, выделить класс таких многообразий и построить его классификацию. Следующий пример также характерен для геометрической школы А. М. Васильева.

Задача изучения геометрии интегралов, зависящих от параметров, была поставлена еще Э. Картаном, но систематические исследования в нашей стране были проведены С. Х. Арутюняном. Подынтегральному выражению n-кратного интеграла, зависящего от n параметров, можно поставить в соответствие внешнюю n-форму Ω на многообразии $2n$-мерного двойного расслоения переменных интегрирования и параметров M и изучение геометрии интеграла свести к рассмотрению геометрии этой формы на M. Было установлено [1], что на $\mathbf{M}$ порождается псевдориманова структура, причем соответствующая метрика имеет нулевую сигнатуру, а также были выделены пространства Эйнштейна такого же типа, в случае которых имеет смысл ставить задачу обращения интеграла. Для отдельных классов решена обратная задача выделения классов интегралов, задающих на M заданные дифференциально-геометрические структуры допустимого типа. В частности, было показано, что геометрия $2n$-мерного псевдоевклидова пространства $E_{2n}{}^n$ порождается на M интегралом n-формы

$$\Omega=P(x^1,\ldots,x^n)\,Q(y_1,\ldots,y_n)\ \exp\,(x^i y_i)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n,$$

где $x^1,\ldots,x^n$ — переменные, $y_1,\ldots,y_n$ — параметры.

Отметим, что многие ученики А. М. Васильева не только стали ведущими геометрами в СССР, но и возглавили созданные ими новые дифференциально-геометрические школы, где важную роль играют традиции геометрической школы их учителя — Анатолия Михайловича Васильева.

Завершая наш обзор, предлагаем в п. 5 изложение доклада А. М. Васильева, сделанного им в марте 1987 г. на семинаре по дифференциально-геометрическим структурам, содержание которого публикуется впервые. Доклад А. М. Васильева отражает его научные интересы в последний период.

5. Преобразования Бэклунда, как средство построения частных решений систем дифференциальных уравнений, находят широкое применение в рамках теории солитонов. Тем не менее ощутима нехватка геометрической интерпретации этой конструкции. На конкретном примере преобразований Бэклунда, определяемых двумя уравнениями Пфаффа в четырехмерном пространстве, дано четкое геометрическое описание процедуры размножения решений, а также так называемых «соотношений переместительности», широко используемых в математической физике. При этом соответствие между кривыми, которое определяет рассмотренное преобразование, есть не что иное как ограничение классического преобразования Бэклунда для уравнения Sine-Gordon на характеристики, определенные на его решении.

5.1. Два уравнения Пфаффа в четырехмерном пространстве. Конструкция преобразования Бэклунда. Рассмотрим на четырехмерном многообразии M^4 два неинтегрируемых уравнения Пфаффа

$$\omega^3=0,\quad \omega^4=0.$$

Пусть $\bar e_4$, $\bar e_3$ — характеристические направления для первого и второго уравнений соответственно, то есть

$$\omega^3\,|\,\bar e_4=0,\quad \omega^4\,|\,\bar e_3=0,$$

$$d\omega^3\,|\,\bar e_4=0 \mod \omega^3,\quad d\omega^4\,|\,\bar e_3=0 \mod \omega^4.$$

Характеристические направления $\bar{e}_4$ и $\bar{e}_3$ задают расслоения пространства M^4 над двумя трехмерными базами, для которых мы введем обозначения $M^3(\omega^3)$ и $M^3(\omega^4)$. При этом слоями первого расслоения являются интегральные траектории поля направлений $\bar{e}_4$, второго — интегральные траектории поля направлений $\bar{e}_3$.

Пусть p_3 и p_4 — соответствующие проекции

$$\begin{tikzcd} & M^4 \arrow[dl, "p_3"'] \arrow[dr, "p_4"] & \\ M^3(\omega^3) & & M^3(\omega)^4 \end{tikzcd}$$

Из самой конструкции $M^3(\omega^3)$ и $M^3(\omega^4)$ мы можем заключить, что уравнение $\omega^3=0$ фактически задано на $M^3(\omega^3)$, а уравнение $\omega^4=0$ — на $M^3(\omega^4)$. Решениями уравнения $\omega^3=0$, рассматриваемого как уравнение на $M^3(\omega^3)$, будут при этом кривые, касающиеся распределения $\omega^3=0$. Аналогично для $\omega^4=0$, рассматриваемого на $M^3(\omega^4)$, решениями будут кривые, касающиеся распределения $\omega^4=0$.

Опишем конструкцию преобразования Бэклунда, которое позволяет по произвольному решению уравнения $\omega^3=0$ на $M^3(\omega^3)$ построить однопараметрическое семейство решений уравнения $\omega^4=0$ на $M^3(\omega^4)$.

Пусть j — некоторая кривая в $M^3(\omega^3)$, касающаяся распределения $\omega^3=0$. Тогда прообраз $p_3^{-1}(j)$ — двумерное многообразие в M^4, удовлетворяющее уравнению $\omega^3=0$ (рассматриваемому уже в M^4). Ограничивая уравнение $\omega^4=0$ на $p_3^{-1}(j)$, мы получим однопараметрическое семейство кривых, проекция которых с помощью p_4 на $M^3(\omega^4)$ даст однопараметрическое семейство решений уравнения $\omega^4=0$. Указанная процедура размножения решений является приспособлением к данному частному случаю общей методики, предложенной в книге [48*].

В п. **5.2** получены структурные уравнения дифференциально-геометрического объекта, определяемого двумя уравнениями Пфаффа в M^4. В результате полной канонизации репера выделен один наиболее интересный случай, который затем подвергается более подробному геометрическому исследованию. Отмечена справедливость «теоремы переместительности», что позволяет рассматривать данный пример как преобразование Бэклунда, которое, несмотря на кажущуюся простоту, сохраняет все типичные свойства преобразований, применяемых в теории солитонов.

5.2. Структурные уравнения. К дифференциально-геометрической структуре, задаваемой двумя уравнениями Пфаффа

$$\omega^3=0, \quad \omega^4=0,$$

на четырехмерном многообразии M^4 присоединим инвариантным образом семейство реперов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ таким образом, чтобы векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ лежали в двумерном распределении $\omega^3 = \omega^4 = 0$, а $\bar{e}_4$ $(\bar{e}_3)$ были направлены вдоль характеристических направлений уравнений $\omega^3 = 0$ и $\omega^4 = 0$ соответственно. Для уравнений инфинитезимального перемещения репера будем иметь

$$
\begin{aligned}
d\bar{e}_3 &= \omega_3^3 \bar{e}_3, \\
d\bar{e}_4 &= \omega_4^4 \bar{e}_4, \\
d\bar{e}_1 &= \omega_1^1 \bar{e}_1 + \omega_1^2 e_2, \\
d\bar{e}_2 &= \omega_2^1 \bar{e}_1 + \omega_2^2 e_2.
\end{aligned}
$$

Переходя к двойственному кореперу ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, получим структурные уравнения

$$
\begin{aligned}
d\omega^3 &= \omega_3^3 \wedge \omega^3 + a\omega^1 \wedge \omega^2, \\
d\omega^4 &= \omega_4^4 \wedge \omega^4 + b\omega^1 \wedge \omega^2, \\
d\omega^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega^1 + \omega_2^1 \wedge \omega^2 + b^1 \omega^3 \wedge \omega^4, \\
d\omega^2 &= \omega_1^2 \wedge \omega^1 + \omega_2^2 \wedge \omega^2 + b^2 \omega^3 \wedge \omega^4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Дифференцируя (1), найдем разложения для da, db:

$$
\begin{aligned}
da + a(\omega_1^1 + \omega_2^2 = \omega_3^3) &= \ldots, \\
db + b(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_4^4) &= \ldots,
\end{aligned}
$$

где здесь и ниже многоточие обозначает некоторую комбинацию базисных форм ω^1, ω^2, ω^3, ω^4.

В силу неинтегрируемости распределений $\omega^3 = 0$ и $\omega^4 = 0$, a и b не равны нулю, и, значит, возможна канонизация $a = b = 1$, в результате чего уравнения (1) примут вид:

$$
\begin{aligned}
d\omega^3 &= (\omega_1^1 + \omega_2^2) \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2 + (a_1\omega^1 + a_2\omega^2) \wedge \omega^3 + c^3 \omega^3 \wedge \omega^4, \\
d\omega^4 &= (\omega_1^1 + \omega_2^2) \wedge \omega^4 + \omega^1 \wedge \omega^2 - (a_1\omega^1 + a_2\omega^2) \wedge \omega^4 + c^4 \omega^3 \wedge \omega^4, \\
d\omega^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega^1 + \omega_2^1 \wedge \omega^2 + b_1 \omega^3 \wedge \omega^4, \\
d\omega^2 &= \omega_1^2 \wedge \omega^1 + \omega_2^2 \wedge \omega^2 + b_2 \omega^3 \wedge \omega^4.
\end{aligned} \tag{2}
$$

При этом для дифференциалов da_1, da_2, db_1, db_2 получим разложения

$$
\begin{aligned}
da_1 + a_1\omega_1^1 + a_2\omega_1^2 &= \ldots, \\
da_2 + a_1\omega_2^1 + a_2\omega_2^2 &= \ldots, \\
db_1 + b_1(2\omega_2^2 + \omega_1^1) - b_2\omega_2^1 &= \ldots, \\
db_2 + b_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2) - b_1\omega_1^2 &= \ldots.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем, что величина $(a_1b_1 + a_2b_2)$ является относительным инвариантом

$$d(a_1b_1+a_2b_2)+2(a_1b_1+a_2b_2)(\omega_1{}^1+\omega_2{}^2)=\ldots.$$

Дальнейшая канонизация уже зависит от того, равен или не равен нулю указанный относительный инвариант:

1) $(a_1b_1+a_2b_2)\neq 0$. Канонизация дает: $a_1=b_1=0$, $a_2=b_2=1$.

2) $(a_1b_1+a_2b_2)=0$. Канонизация дает: $a_2=b_1=0$, $a_1=b_2=1$.

Случаи 1), 2) имеют существенно различную геометрическую интерпретацию. Достаточно заметить, что в первом случае все оставшиеся вторичные формы $\omega_1{}^1$, $\omega_2{}^1$, $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^2$ выражаются в результате канонизации через главные, и мы приходим к дифференциально-геометрической структуре конечного порядка, в то время как второй случай дает бесконечную структуру.

Остановимся более подробно на случае 1). При этом, как уже отмечалось, все вторичные формы выразятся через главные. Потребуем, чтобы полученная дифференциально-геометрическая структура допускала группу автоморфизмов, транзитивно действующую на многообразии M^4 (такое требование в точности означает постоянство всех компонент структурного тензора). Это дополнительное требование позволяет уже совершенно однозначно определить уравнения дифференциально-геометрической структуры, которые с точностью до несущественных переобозначений примут вид:

$$\begin{gathered} d\omega^3=2(\omega^1-\omega^3)\wedge\omega^2, \quad d\omega^4=2(\omega^4+\omega^1)\wedge\omega^2, \\ d\omega^2=(\omega^3-\omega^1)\wedge(\omega^4+\omega^1), \quad d\omega^1=0. \end{gathered} \tag{3}$$

Вводя обозначения

$$\omega^1-\omega^3=\Omega_1^2, \quad \omega^4+\omega^1=\Omega_2^1, \quad \omega^2=\Omega, \quad \omega^1=\theta,$$

перепишем (3) в виде

$$\begin{aligned} d\Omega_1^2&=2\Omega\wedge\Omega_1^2, \\ d\Omega_2^1&=-2\Omega\wedge\Omega_2^1, \\ d\Omega&=\Omega_1^2\wedge\Omega_2^1, \\ d\theta&=0, \end{aligned}$$

что позволяет отождествить базисное многообразие M^4 с прямым произведением $SL(2,\mathbf{R})\times\mathbf{R}$.

Уравнения Пфаффа в новых обозначениях перепишутся так

$$\Omega_1^2-\theta=0, \quad \Omega_2^1-\theta=0.$$

В следующем п. 5.3 мы дадим простую «двумерную» интерпретацию для преобразования Бэклунда, определяемого этими уравнениями, которая реализует его в виде некоторого специального соответствия между двумя параметризованными кривыми на плоскости.

5.3. Геометрическая интерпретация. Реализуем $SL(2,\mathbf{R})$ как группу сохраняющих объем движений плоскости $\mathbf{R}^2$:

$$d\bar{e}_1=\Omega\bar{e}_1+\Omega_1^2\bar{e}_2,$$
$$d\bar{e}_2=\Omega_2^1\bar{e}_1-\Omega\bar{e}_2,$$

Поскольку решение уравнения $\Omega_1^2-\theta=0$ задается произвольной дополнительной зависимостью между Ω_1^2 и Ω, ему однозначно соответствует некоторая кривая, описываемая радиус-вектором $\bar{e}_1$. (Заметим, что характеристическая система для уравнения $\Omega_1^2-\theta=0$ имеет вид $\Omega_1^2=\Omega=\theta=0$ и оставляет вектор $\bar{e}_1$ неподвижным). Аналогично второму уравнению $\Omega_2^1-\theta=0$ соответствует кривая, описываемая радиус-вектором $\bar{e}_2$.

Подставляя $\Omega_1^2=\Omega_2^1=\theta$, получим

$$d\bar{e}_1=\Omega\bar{e}_1+\theta\bar{e}_2,$$
$$d\bar{e}_2=\theta\bar{e}_1-\Omega\bar{e}_2.$$

Положим

$$\theta=cdu,$$

(где $c=\mathrm{const}$ будет впоследствии интерпретироваться как «спектральный параметр» преобразования Бэклунда), и

$$\Omega=\lambda du,$$

(где λ — произвольная функция). Тогда уравнения инфинитезимального перемещения репера примут вид

$$\frac{d\bar{e}_1}{du}=\lambda\bar{e}_1+c\bar{e}_2,$$
$$\frac{d\bar{e}_2}{du}=c\bar{e}_1-\lambda\bar{e}_2.$$

Дифференцируя эти уравнения по u еще раз, получим

$$\frac{d^2\bar{e}_1}{du^2}=(\lambda'+\lambda^2+c^2)\,\bar{e}_1,$$
$$\frac{d^2\bar{e}_2}{du^2}=(-\lambda'+\lambda^2+c^2)\,\bar{e}_2,$$

где $\lambda'=\dfrac{d\lambda}{du}$.

Следовательно, u — натуральный параметр на кривых, описываемых радиус-векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. Кривизны этих кривых задаются формулами

$$k_1=\lambda'+\lambda^2+c^2,$$
$$k_2=-\lambda''+\lambda^2+c^2,$$

откуда

$$k_2 = k_1 - 2\lambda'.$$

Резюмируя сказанное, придадим преобразованию Бэклунда следующую «двумерную» интерпретацию:

Выберем кривую с радиус-вектором $\bar{e}_1(u)$, параметризованную натуральным параметром u

$$\frac{d^2\bar{e}_1}{du^2} = k_1\bar{e}_1,$$

где k_1 — кривизна кривой.

Поставим ей в соответствие кривую с радиус-вектором $\bar{e}_2(u)$ такую, что:

а) Площадь параллелограмма, натянутого на $\bar{e}_1(u)$ и $\bar{e}_2(u)$, постоянна.

б) Параметр u — натуральный для обеих кривых.

в) $$d(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = c(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) \bmod (\bar{e}_1 - \bar{e}_2),$$

$$d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) = -c(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \bmod (\bar{e}_1 + \bar{e}_2).$$

(Как легко видеть, из б) следует, что $c = \mathrm{const}$).

При этом кривизна k_2 второй кривой вычисляется по формуле

$$k_2 = -\lambda' + \lambda^2 + c^2,$$

где функция λ является решением уравнения Рикатти

$$\lambda' + \lambda^2 + c^2 = k_1.$$

Заметим, что по исходной кривой $\bar{e}_1(u)$ кривая $\bar{e}_2(u)$ определяется наложенными требованиями не однозначно, а с произволом в одну константу.

Для рассмотренного преобразования имеют место классические «соотношения переместительности», которые заключаются в том, что композиция преобразований с параметрами c_1 и c_2 не зависит от порядка их выполнения.

Таким образом, несмотря на простоту конструкции, преобразование Бэклунда сохраняет все типичные свойства, характерные для преобразований Бэклунда уравнений в частных производных, которые изучаются в математической физике.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ВАСИЛЬЕВА АНАТОЛИЯ МИХАЙЛОВИЧА

1. Инволютивные системы комплексов прямых. ДАН СССР, 1948, 61, № 2, 189—191
2. Инволютивные системы комплексов прямых. УМН, 1948, 3 : 4, 154—155
3. Общие инвариантные методы в дифференциальной геометрии. ДАН, 1951, 79, № 1, 5—7
4. Об одной паре конгруэнций. Уч. зап. МГУ, 1952, мат. 6, 137—145

5. Об алгебраических операциях, применяемых в дифференциальной геометрии. ДАН, 1952, 82, № 4, 509—511
6. О зависимости между дифференциально-геометрическими свойствами. Труды 3-го Мат. съезда, 1956, 144
7. Об ортогональных подгруппах классических компактных групп Ли. ДАН 121 : 1 (1958), 18—21
8. Ортогональные пары подгрупп группы $O(n)$. Изв. вузов. Математика, 2 (1958), 17—28
9. Дифференциальная геометрия. В сб. «Математика в СССР за 40 лет», I. М. (1959), 899—925. Совместно с Норденом А. П. и Финиковым С. П.
10. О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств. ДАН СССР, 128 : 2 (1959), 223—226
11. Об одном классе аффинных связностей в однородных пространствах. Изв. вузов. Математика, 2 (1959), 41—49
12. Инвариантные аффинные связности в однородных пространствах. ДАН СССР, 131 : 3 (1960), 489—492
13. Об одном классе ортогональных пар подгрупп группы $O(l)$. Матем. сб., 52 : 4 (1960), 917—946
14. C^1 — 2 связности в однородных пространствах и их вполне геодезические подмногообразия. ДАН СССР, 140 : 2 (1961), 281—283
15. Инвариантные аффинные связности в пространстве линейных элементов. Матем. сб., 60 : 4 (1963), 411—424
16. Аффинные связности в однородных пространствах. Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда 2 (1964), 182—186
17. Семейства линейных элементов, огибаемые вполне геодезическими семействами. Изв. вузов. Математика, 3 (1964), 28—35
18. Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии. Тезисы кр. науч. сообщений Международ, конгресса математиков. Секция 9. М. (1966), 24
19. Инвариантные связности в пространстве линейных элементов, Тезисы 1-ой Всесоюзной геометрической конф. 1962, Киев
20. Геометрия системы трех уравнений с частными производными. Тезисы 2-ой Всесоюзной геом. конф. 1964, Харьков
21. Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии. Труды геометрического семинара 1966, 33—61
22. Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория). Матем. сб. 70 : 4 (1966), 457—480
23. Исследования по дифференциальной геометрии в Московском Университете в советский период. М., Вестник ун-та. Мат. 5 (1967), 12—23 (Совместно с Ефимовым Н. В. и Рашевским П. К.)
24. Структурные теоремы для дифференциальных алгебр и их геометрическое значение. Тезисы 3-ей Всесоюз. геом. конф. Казань, 1967.
25. Инволютивные дифференциальные алгебры. Сиб. мат. журн. 9, № 4 (1968)
26. К алгебраическим основаниям дифференциальной геометрии. УМН, 24, № 4, (1969)
27. О некоторых дифференциальных алгебрах Тезисы 4-ой Всесоюзн. конф. Тбилиси, 1969
28. Дифференциальные алгебры с линейной системой образующих. 2-я Прибалт. геом. конф. Тарту, 1965
29. Об интранзитивных псевдогруппах преобразований. 3-я Прибалт. геом. конф., 1968
30. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. УМН, 26, № 5 (1971)
31. Инволютивные модули и инволютивные дифференциальные алгебры. Труды геометрич. семинара ВИНИТИ, № 4, 1973
32. Дифференциальные алгебры и дифференциально-геометрические структуры. Труды геом. семинара ВИНИТИ, № 4, 1973

33. Продолжения градуированных модулей и продолжения дифференциально-геометрических структур. 5-я Всесоюзн. геом. конф. Самарканд, 1972
34. Алгебраические вопросы дифференциальной геометрии. О продолжении дифференциальных алгебр. Изв. вузов. Математика, № 5 (1974)
35. О реализации внешних дифференциальных алгебр. Труды геом. сем. ВИНИТИ, № 5, 1974
36. Полувекторные поля в расслоениях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. 1975, *7*
37. Контравариантные алгебраические модели дифференциальной геометрии. Тезисы 6-ой Всесоюзн. геом. конф. Вильнюс, 1975
38. О реализации внешних дифференциальных алгебр основного типа. Конф. 150 лет геом. Лобачевского. Казань, 1976
39. Дифференциальная алгебра. Контравариантные аналитические методы в дифференциальной геометрии. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1978, *10*
40. Вопросы дифференциального исчисления в продолженных расслоениях. Коллоквиум по диф. геом. Будапешт. 1979
41. Глобальные инварианты дифференциально-геометрических структур и дифференциальная алгебра. 5-я Прибалт. геом. конф. Друскенинкай, 1978
42. О дифференциальном исчислении в продолженных расслоениях. 7-я Всесоюзн. геом. конф. Минск, 1979
43. Дифференциальная геометрия. Методические указания. Изд-во МГУ. (Совместно с Соловьевым Ю. П.)
44. Линейные дифференциальные системы и инвариантные реализации дифференциально-геометрических структур. Изв. вузов. Мат., № 7, 1984
45. Обобщенные преобразования Петерсона и нелинейные дифференциальные уравнения. Тезисы 8-ой Всесоюзн. геом. конф. Одесса, 1984
46. Об одном классе дифференциальных систем, связанном с теорией солитонов. УМН, 1986
47. Нелинейные дифференциальные уравнения, связанные с теорией солитонов, и обобщенные преобразования Петерсона в группах Ли. Сб.: Теория функций и ее приложения. Кемерово, 1985, 38—43
48. Теория дифференциально-геометрических структур. Книга, Изд-во МГУ, М., 1987, 1—190
49. Дифференциальные инварианты и расслоения. Сб. «Расслоенные пространства». МГУ, в печати.
50. Виктор Владимирович Вагнер (некролог.). Успехи мат. наук, 1982, 37 : 2 (224), 171—173 (совместно с Н. В. Ефимовым, А. И. Кострикиным, А. Е. Либером, А. М. Лопшицем, Е. С. Ляпиным, П. К. Рашевским).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян С. Х.,* Геометрия n-кратного интеграла, зависящего от n параметров. Докл. АН АрмССР, 1975, *61*, № 1, 7—14 (РЖМат, 1976, 6А656)
2. *Восилюс Р. В.,* Контравариантная теория дифференциального продолжения в модели пространства со связностью. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1983, *14*, 101—176 (РЖМат, 1983, 5А585)
3. *Грушко П. Я.,* Отображения геометрических структур. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1986, *18*, 3—23 (РЖМат, 1987, 5А709)
4. *Кириченко В. Ф.,* Дифференциальная геометрия K-пространств. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1977, *8*, 139—161 (РЖМат, 1978, 1А641)
5. —, Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1986, *18*, 25—71 (РЖМат, 1987, 5А713)

6. *Кованцов Н. Н.,* Теория комплексов. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. н., МГУ, Запорожье, 1958 (РЖМат, 1959, 8463Д)
7. *Лаптев Б. Л.,* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 2. М.; АН СССР, 1956, 60—62 (РЖМат, 1957, 6642)
8. *Лумисте Ю. Г.,* Канонические расслоения над пространствами орбит и внутренние связности. Тр. Геометр. семинары. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 285—307 (РЖМат, 1974, 5А756)
9. —, Дифференциально-геометрические структуры и калибровочные теории. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1985, *17*, 153—171 (РЖМат, 1986, 4А904)
10. *Степанов Н. В.,* Геометрия дифференциальных уравнений. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1981, *12*, 127—164 (РЖМат, 1981, 10А562)
11. *Феденко А. С.,* Пространства, определяемые эндоморфизмами групп Ли (Ф-пространства). Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, 4, 231—267 (РЖМат, 1974, 3А551)
12. —, Пространства с симметриями. Минск, БГУ, 1977, 168 с. (РЖМат, 1977, 11А 595К)
13. *Фиников С. П.,* Теория конгруэнций. М.: Гостехиздат, 1950, 528 с.
14. —, Теория пар конгруэнций. М.: Гостехиздат, 1956, 443 с. (РЖМат, 1958, 4175К)
15. *Guillemin V.,* Sternberg S., An algebraic model of transitive differential geometry. «Bull. Amer. Math. Soc.», 1964, 70, N 1, 16—47 (РЖМат, 1966, 6А399)
16. *Singer I. M., Sternberg S.,* The infinite groups of Lie and Cartan. Part I. The transitive groups. J. anal. math., 1965, *15*, 1—114 (РЖМат, 1966, 10А167)