В. Е. Фёдоров, А. В. Панов, А. С. Карабаева, Симметрии одного класса квазилинейных уравнений псевдопараболического типа. Инвариантные решения, *Вестник ЧелГУ*, 2012, выпуск 15, 90–111

В. Е. ФЁДОРОВ, А. В. ПАНОВ, А. С. КАРАБАЕВА

СИММЕТРИИ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Проведен симметрийный анализ одного квазилинейного псевдопараболического уравнения со свободным элементом, зависящим от второй производной по пространственной переменной. Найдено четырехмерное ядро основных групп уравнения и спецификации свободного элемента, приводящие к пятым симметриям. Вычислены оптимальные системы одномерных подалгебр основных алгебр Ли уравнений и их некоторые инвариантные решения.

Ключевые слова: *группа симметрий дифференциального уравнения, групповой анализ, алгебра Ли, оптимальная система подалгебр, инвариантное решение.*

1. Введение

Допускаемая группа локальных преобразований характеризует свойства симметрии дифференциального уравнения, обыкновенного или в частных производных, и используется для его полного интегрирования или построения отдельных классов точных решений и качественного исследования уравнения [1–4]. Симметрии различных уравнений и систем уравнений механики, электродинамики, квантовой физики и других разделов естествознания исследовались такими авторами, как Л. В. Овсянников [1], Н. Х. Ибрагимов [2; 3], и многими другими исследователями (см., например, монографии [5–7] и ссылки там же).

Аналогичные исследования для псевдопараболических уравнений, часто встречающихся в теории фильтрации [8], в последнее время — при описании различных процессов в теории полупроводников [9], ранее не проводились, насколько это известно авторам. Данная работа посвящена проведению группового анализа квазилинейного псевдопараболического уравнения

$$\alpha u_t(t,x) - u_{txx}(t,x) = f(u_{xx}(t,x)) \tag{1.1}$$

с двумя независимыми переменными t, x, с одной зависимой переменной u, с произвольной константой $\alpha \neq 0$ и с произвольной функцией f. Такой вид при $f(z) = z$ имеет, например, уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной [10], моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде.

Методом Ли–Овсянникова [1; 7] в случае $\alpha \neq 0$ найдено четырехмерное ядро основных групп уравнения (1.1) и три спецификации свободного элемента

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Министерства образования и науки Челябинской области (грант 10-01-96007-р_урал_а).

f, дающие дополнительные, пятые симметрии. Для этих спецификаций исследована соответствующая пятимерная алгебра Ли, найдены внутренние автоморфизмы и оптимальные системы одномерных подалгебр. Последние использованы для нахождения некоторых инвариантных решений рассматриваемых квазилинейных уравнений. Затем, с помощью многомерных допускаемых групп преобразований в каждом случае из инвариантных решений получены многопараметрические семейства решений уравнений, применение которых удобно на практике при использовании дополнительной информации о решениях (начальные, краевые условия и др.).

2. Группа преобразований эквивалентности

Рассмотрим класс уравнений вида

$$\alpha u_t - u_{txx} - f(u_{xx}) = 0, \tag{2.1}$$

содержащий функцию $u = u(x,t)$ от двух переменных, ее частные производные, производный элемент $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и произвольную функцию f. Сразу заметим, что в случае линейной функции f или при $\alpha = 0$ рассматриваемое уравнение имеет бесконечномерную допускаемую группу и исследование этих случаев выходит за рамки интересов данной работы.

Найдем обобщенные преобразования эквивалентности уравнения (2.1). Для этого запишем его в виде

$$\alpha u_t - u_{txx} - f = 0, \tag{2.2}$$

подразумевая, что α, f — это дополнительные переменные, зависящие от t, x, u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}. Генераторы групп преобразований эквивалентности будем искать в виде

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial f} + \nu\frac{\partial}{\partial \alpha},$$

где функции τ, ξ, η зависят от t, x, u, функции μ, ν зависят от t, x, u, f, α, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}. Дополним уравнение (2.2) уравнениями

$$f_t = 0, \quad f_x = 0, \quad f_u = 0, \quad f_{u_t} = 0, \quad f_{u_x} = 0, \quad f_{u_{tt}} = 0, \quad f_{u_{tx}} = 0, \tag{2.3}$$

$$\alpha_t = 0, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_u = 0, \tag{2.4}$$

$$\alpha_{u_t} = 0, \quad \alpha_{u_x} = 0, \quad \alpha_{u_{tt}} = 0, \quad \alpha_{u_{tx}} = 0, \quad \alpha_{u_{xx}} = 0, \tag{2.5}$$

означающими, что в исходной постановке задачи f зависит только от u_{xx}, а α является постоянной величиной.

Будем рассматривать систему (2.2)–(2.5) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Подействуем на левые части уравнений системы (2.2)–(2.5) продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} + \mu^t\frac{\partial}{\partial f_t} + \mu^x\frac{\partial}{\partial f_x} + \mu^u\frac{\partial}{\partial f_u} +$$

$$+\mu^{u_t}\frac{\partial}{\partial f_{u_t}} + \mu^{u_x}\frac{\partial}{\partial f_{u_x}} + \mu^{u_{tt}}\frac{\partial}{\partial f_{u_{tt}}} + \mu^{u_{tx}}\frac{\partial}{\partial f_{u_{tx}}} + \nu^t\frac{\partial}{\partial \alpha_t} + \nu^x\frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \nu^u\frac{\partial}{\partial \alpha_u} +$$

$$+\nu^{u_t}\frac{\partial}{\partial\alpha_{u_t}}+\nu^{u_x}\frac{\partial}{\partial\alpha_{u_x}}+\nu^{u_{tt}}\frac{\partial}{\partial\alpha_{u_{tt}}}+\nu^{u_{tx}}\frac{\partial}{\partial\alpha_{u_{tx}}}+\nu^{u_{xx}}\frac{\partial}{\partial\alpha_{u_{xx}}},$$

сузим результат действия на многообразие $\mathfrak{N}$ и получим уравнения

$$\nu u_t+\alpha\varphi^t-\varphi^{txx}-\mu|_{\mathfrak{N}}=0, \tag{2.6}$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \mu^x|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \mu^u|_{\mathfrak{N}}=0, \tag{2.7}$$

$$\mu^{u_t}|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \mu^{u_x}|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \mu^{u_{tt}}|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \mu^{u_{tx}}|_{\mathfrak{N}}=0, \tag{2.8}$$

$$\nu^t|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \nu^x|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \nu^u|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \nu^{u_t}|_{\mathfrak{N}}=0, \tag{2.9}$$

$$\nu^{u_x}|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \nu^{u_{tt}}|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \nu^{u_{tx}}|_{\mathfrak{N}}=0,\quad \nu^{u_{xx}}|_{\mathfrak{N}}=0. \tag{2.10}$$

Коэффициенты оператора $\widetilde{Y}$ могут быть вычислены по формулам продолжения, использующим операторы дифференцирования:

$$D_t=\frac{\partial}{\partial t}+u_t\frac{\partial}{\partial u}+f_t\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_t\frac{\partial}{\partial\alpha}+u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t}+f_{tt}\frac{\partial}{\partial f_t}+\alpha_{tt}\frac{\partial}{\partial\alpha_t}+u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x}+f_{tx}\frac{\partial}{\partial f_x}+\ldots,$$

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+f_x\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_x\frac{\partial}{\partial\alpha}+u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t}+f_{tx}\frac{\partial}{\partial f_t}+\alpha_{tx}\frac{\partial}{\partial\alpha_t}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+f_{xx}\frac{\partial}{\partial f_x}+\ldots,$$

$$\widetilde{D}_t=\frac{\partial}{\partial t}+f_t\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_t\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,\ \widetilde{D}_x=\frac{\partial}{\partial x}+f_x\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_x\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,$$

$$\widetilde{D}_u=\frac{\partial}{\partial u}+f_u\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_u\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,\ \ \widetilde{D}_{u_t}=\frac{\partial}{\partial u_t}+f_{u_t}\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_{u_t}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,$$

$$\widetilde{D}_{u_x}=\frac{\partial}{\partial u_x}+f_{u_x}\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_{u_x}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,\ \ \widetilde{D}_{u_{tt}}=\frac{\partial}{\partial u_{tt}}+f_{u_{tt}}\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_{u_{tt}}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,$$

$$\widetilde{D}_{u_{tx}}=\frac{\partial}{\partial u_{tx}}+f_{u_{tx}}\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_{u_{tx}}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\ldots,$$

$$\widetilde{D}_{u_{xx}}=\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+f_{u_{xx}}\frac{\partial}{\partial f}+\alpha_{u_{xx}}\frac{\partial}{\partial\alpha}+f_{u_{xx}u_{xx}}\frac{\partial}{\partial f_{u_{xx}}}+\ldots$$

Согласно формулам продолжения

$$\varphi^t=D_t(\eta)-u_tD_t(\tau)-u_xD_t(\xi),\quad \varphi^x=D_x(\eta)-u_tD_x(\tau)-u_xD_x(\xi),$$

$$\varphi^{xx}=D_x(\varphi^x)-u_{tx}D_x(\tau)-u_{xx}D_x(\xi),\quad \varphi^{txx}=D_t(\varphi^{xx})-u_{txx}D_t(\tau)-u_{xxx}D_t(\xi),$$

поэтому

$$\begin{gathered}\varphi^t=\eta_t+u_t\eta_u-u_t\tau_t-u_t^2\tau_u-u_x\xi_t-u_tu_x\xi_u,\\ \varphi^x=\eta_x+u_x\eta_u-u_t\tau_x-u_tu_x\tau_u-u_x\xi_x-{u_x}^2\xi_u,\\ \varphi^{xx}=\eta_{xx}+2u_x\eta_{xu}+{u_x}^2\eta_{uu}+u_{xx}\eta_u-u_t\tau_{xx}-\\ -2u_xu_t\tau_{xu}-2u_{tx}\tau_x-u_t{u_x}^2\tau_{uu}-2u_xu_{tx}\tau_u-u_tu_{xx}\tau_u-\\ -u_x\xi_{xx}-2{u_x}^2\xi_{xu}-2u_{xx}\xi_x-{u_x}^3\xi_{uu}-3u_xu_{xx}\xi_u,\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\varphi^{txx}=\eta_{txx}+u_x\eta_{txu}-u_t\tau_{txx}-u_tu_x\tau_{txu}-u_x\xi_{txx}-{u_x}^2\xi_{txu}+\\ +u_x\eta_{txu}+{u_x}^2\eta_{tuu}-u_tu_x\tau_{txu}-u_t{u_x}^2\tau_{tuu}-{u_x}^2\xi_{txu}-{u_x}^3\xi_{tuu}-u_{tx}\tau_{tx}-\\ -u_xu_{tx}\tau_{tu}+u_{xx}\eta_{tu}-u_tu_{xx}\tau_{tu}-u_{xx}\xi_{tx}-2u_xu_{xx}\xi_{tu}-u_{tx}\tau_{tx}-\end{gathered}$$

$$-u_x u_{tx}\tau_{tu} - u_{xx}\xi_{tx} - u_x u_{xx}\xi_{tu} + u_t\eta_{xxu} + u_t u_x\eta_{xuu} - {u_t}^2\tau_{xxu} -$$
$$-{u_t}^2 u_x\tau_{xuu} - u_t u_x\xi_{xxu} - u_t {u_x}^2\xi_{xuu} + u_t u_x\eta_{xuu} + u_t {u_x}^2\eta_{uuu} -$$
$$-{u_t}^2 u_x\tau_{xuu} - {u_t}^2 {u_x}^2\tau_{uuu} - u_t {u_x}^2\xi_{xuu} - u_t {u_x}^3\xi_{uuu} - u_t u_{tx}\tau_{xu} -$$
$$-u_t u_x u_{tx}\tau_{uu} + u_t u_{xx}\eta_{uu} - {u_t}^2 u_{xx}\tau_{uu} - u_t u_{xx}\xi_{xu} - 2u_t u_x u_{xx}\xi_{uu} -$$
$$-u_t u_{tx}\tau_{xu} - u_t u_x u_{tx}\tau_{uu} - u_t u_{xx}\xi_{xu} - u_t u_x u_{xx}\xi_{uu} - u_{tt}\tau_{xx} -$$
$$-u_x u_{tt}\tau_{xu} - u_x u_{tt}\tau_{xu} - {u_x}^2 u_{tt}\tau_{uu} - u_{tt}u_{xx}\tau_u + u_{tx}\eta_{xu} - u_t u_{tx}\tau_{xu} -$$
$$-u_{tx}\xi_{xx} - 2u_x u_{tx}\xi_{xu} + u_{tx}\eta_{xu} + 2u_x u_{tx}\eta_{uu} - u_t u_{tx}\tau_{xu} - 2u_t u_x u_{tx}\tau_{uu} -$$
$$-2u_x u_{tx}\xi_{xu} - 3{u_x}^2 u_{tx}\xi_{uu} - {u_{tx}}^2\tau_u - 2u_{tx}u_{xx}\xi_u - {u_{tx}}^2\tau_u - u_{tx}u_{xx}\xi_u -$$
$$-u_{ttx}\tau_x - u_x u_{ttx}\tau_u - u_{ttx}\tau_x - u_x u_{ttx}\tau_u + u_{txx}\eta_u - u_t u_{txx}\tau_u -$$
$$-u_{txx}\xi_x - 3u_x u_{txx}\xi_u - u_{txx}\xi_x - u_{txx}\tau_t -$$
$$-u_t u_{txx}\tau_u - u_{xxx}\xi_t - u_t u_{xxx}\xi_u.$$

Аналогично,

$$\mu^t = \widetilde{D}_t(\mu) - f_t\widetilde{D}_t(\tau) - f_x\widetilde{D}_t(\xi) - f_u\widetilde{D}_t(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_t(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_t(\varphi^x) - f_{u_{tt}}\widetilde{D}_t(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_t(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_t(\varphi^{xx}),$$
$$\mu^x = \widetilde{D}_x(\mu) - f_t\widetilde{D}_x(\tau) - f_x\widetilde{D}_x(\xi) - f_u\widetilde{D}_x(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_x(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_x(\varphi^x) - f_{u_{tt}}\widetilde{D}_x(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_x(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_x(\varphi^{xx}),$$
$$\mu^u = \widetilde{D}_u(\mu) - f_t\widetilde{D}_u(\tau) - f_x\widetilde{D}_u(\xi) - f_u\widetilde{D}_u(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_u(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_u(\varphi^x) - f_{u_{tt}}\widetilde{D}_u(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_u(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_u(\varphi^{xx}),$$
$$\mu^{u_t} = \widetilde{D}_{u_t}(\mu) - f_t\widetilde{D}_{u_t}(\tau) - f_x\widetilde{D}_{u_t}(\xi) - f_u\widetilde{D}_{u_t}(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_{u_t}(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_{u_t}(\varphi^x) - f_{u_{tt}}\widetilde{D}_{u_t}(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_{u_t}(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_{u_t}(\varphi^{xx}),$$
$$\mu^{u_x} = \widetilde{D}_{u_x}(\mu) - f_t\widetilde{D}_{u_x}(\tau) - f_x\widetilde{D}_{u_x}(\xi) - f_u\widetilde{D}_{u_x}(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_{u_x}(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_{u_x}(\varphi^x) - f_{u_{tt}}\widetilde{D}_{u_x}(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_{u_x}(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_{u_x}(\varphi^{xx}),$$
$$\mu^{u_{tt}} = \widetilde{D}_{u_{tt}}(\mu) - f_t\widetilde{D}_{u_{tt}}(\tau) - f_x\widetilde{D}_{u_{tt}}(\xi) - f_u\widetilde{D}_{u_{tt}}(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_{u_{tt}}(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_{u_{tt}}(\varphi^x) - f_{u_{tt}}\widetilde{D}_{u_{tt}}(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_{u_{tt}}(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_{u_{tt}}(\varphi^{xx}),$$
$$\mu^{u_{tx}} = \widetilde{D}_{u_{tx}}(\mu) - f_t\widetilde{D}_{u_{tx}}(\tau) - f_x\widetilde{D}_{u_{tx}}(\xi) - f_u\widetilde{D}_{u_{tx}}(\eta) - f_{u_t}\widetilde{D}_{u_{tx}}(\varphi^t) -$$
$$-f_{u_x}\widetilde{D}_{u_{tx}}(\varphi^x) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_{u_{tx}}(\varphi^{tt}) - f_{u_{tx}}\widetilde{D}_{u_{tx}}(\varphi^{tx}) - f_{u_{xx}}\widetilde{D}_{u_{tx}}(\varphi^{xx}),$$
$$\nu^t = \widetilde{D}_t(\nu) - \alpha_t\widetilde{D}_t(\tau) - \alpha_x\widetilde{D}_t(\xi) - \alpha_u\widetilde{D}_t(\eta) - \ldots,$$
$$\nu^x = \widetilde{D}_x(\nu) - \alpha_t\widetilde{D}_x(\tau) - \alpha_x\widetilde{D}_x(\xi) - \alpha_u\widetilde{D}_x(\eta) - \ldots,$$
$$\nu^u = \widetilde{D}_u(\nu) - \alpha_t\widetilde{D}_u(\tau) - \alpha_x\widetilde{D}_u(\xi) - \alpha_u\widetilde{D}_u(\eta) - \ldots,$$
$$\nu^{u_t} = \widetilde{D}_{u_t}(\nu) - \alpha_t\widetilde{D}_{u_t}(\tau) - \alpha_x\widetilde{D}_{u_t}(\xi) - \alpha_u\widetilde{D}_{u_t}(\eta) - \ldots,$$
$$\nu^{u_x} = \widetilde{D}_{u_x}(\nu) - \alpha_t\widetilde{D}_{u_x}(\tau) - \alpha_x\widetilde{D}_{u_x}(\xi) - \alpha_u\widetilde{D}_{u_x}(\eta) - \ldots,$$

$$\nu^{u_{tt}} = \widetilde{D}_{u_{tt}}(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_{u_{tt}}(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_{u_{tt}}(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_{u_{tt}}(\eta) - \ldots,$$
$$\nu^{u_{tx}} = \widetilde{D}_{u_{tx}}(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_{u_{tx}}(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_{u_{tx}}(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_{u_{tx}}(\eta) - \ldots,$$
$$\nu^{u_{xx}} = \widetilde{D}_{u_{xx}}(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_{u_{xx}}(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_{u_{xx}}(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_{u_{xx}}(\eta) - \ldots$$

Уравнениям (2.7)–(2.10), таким образом, можно придать более простой вид, учитывая, что в определение многообразия $\mathfrak{N}$ входят уравнения (2.3)–(2.5):

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial u} = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u_t} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial u_t} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u_x} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial u_x} = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u_{tt}} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial u_{tt}} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u_{tx}} - f_{u_{xx}} \frac{\partial \varphi^{xx}}{\partial u_{tx}} = 0, \quad \nu = \nu(u_{xx}, f, \alpha), \tag{2.14}$$
$$\nu_{u_{xx}} + f_{u_{xx}} \nu_f = 0.$$

Перейдем к уравнению (2.6), подставив в него найденные φ^t и φ^{txx} и выразив u_{txx} из уравнения (2.2):

$$\nu u_t + \alpha(\eta_t + u_t\eta_u - u_t\tau_t - u_t^2\tau_u - u_x\xi_t - u_tu_x\xi_u) -$$
$$-\eta_{txx} - u_x\eta_{txu} + u_t\tau_{txx} + u_tu_x\tau_{txu} + u_x\xi_{txx} + {u_x}^2\xi_{txu} -$$
$$-u_x\eta_{txu} - {u_x}^2\eta_{tuu} + u_tu_x\tau_{txu} + u_t{u_x}^2\tau_{tuu} + {u_x}^2\xi_{txu} + {u_x}^3\xi_{tuu} + u_{tx}\tau_{tx} +$$
$$+u_xu_{tx}\tau_{tu} - u_{xx}\eta_{tu} + u_tu_{xx}\tau_{tu} + u_{xx}\xi_{tx} + 2u_xu_{xx}\xi_{tu} + u_{tx}\tau_{tx} +$$
$$+u_xu_{tx}\tau_{tu} + u_{xx}\xi_{tx} + u_xu_{xx}\xi_{tu} - u_t\eta_{xxu} - u_tu_x\eta_{xuu} + {u_t}^2\tau_{xxu} +$$
$$+{u_t}^2u_x\tau_{xuu} + u_tu_x\xi_{xxu} + u_t{u_x}^2\xi_{xuu} - u_tu_x\eta_{xuu} - u_t{u_x}^2\eta_{uuu} +$$
$$+{u_t}^2u_x\tau_{xuu} + {u_t}^2{u_x}^2\tau_{uuu} + u_t{u_x}^2\xi_{xuu} + u_t{u_x}^3\xi_{uuu} + u_tu_{tx}\tau_{xu} +$$
$$+u_tu_xu_{tx}\tau_{uu} - u_tu_{xx}\eta_{uu} + {u_t}^2u_{xx}\tau_{uu} + u_tu_{xx}\xi_{xu} + 2u_tu_xu_{xx}\xi_{uu} +$$
$$+u_tu_{tx}\tau_{xu} + u_tu_xu_{tx}\tau_{uu} + u_tu_{xx}\xi_{xu} + u_tu_xu_{xx}\xi_{uu} + u_{tt}\tau_{xx} +$$
$$+u_xu_{tt}\tau_{xu} + u_xu_{tt}\tau_{xu} + {u_x}^2u_{tt}\tau_{uu} + u_{tt}u_{xx}\tau_u - u_{tx}\eta_{xu} + u_tu_{tx}\tau_{xu} +$$
$$+u_{tx}\xi_{xx} + 2u_xu_{tx}\xi_{xu} - u_{tx}\eta_{xu} - 2u_xu_{tx}\eta_{uu} + u_tu_{tx}\tau_{xu} + 2u_tu_xu_{tx}\tau_{uu} +$$
$$+2u_xu_{tx}\xi_{xu} + 3{u_x}^2u_{tx}\xi_{uu} + {u_{tx}}^2\tau_u + 2u_{tx}u_{xx}\xi_u + {u_{tx}}^2\tau_u + u_{tx}u_{xx}\xi_u +$$
$$+u_{ttx}\tau_x + u_xu_{ttx}\tau_u + u_{ttx}\tau_x + u_xu_{ttx}\tau_u - (\alpha u_t - f)\eta_u + u_t(\alpha u_t - f)\tau_u +$$
$$+2(\alpha u_t - f)\xi_x + 3u_x(\alpha u_t - f)\xi_u + (\alpha u_t - f)\tau_t +$$
$$+u_t(\alpha u_t - f)\tau_u + u_{xxx}\xi_t + u_tu_{xxx}\xi_u - \mu = 0.$$

Сразу заметим, что коэффициентами при выражениях u_{ttx}, u_xu_{ttx}, u_{xxx}, u_tu_{xxx} являются соответственно выражения $2\tau_x$, $2\tau_u$, ξ_t, ξ_u. Поэтому $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x)$. Тогда многие производные в полученных выражениях обнулятся и останется уравнение

$$\nu u_t + \alpha(\eta_t + u_t\eta_u - u_t\tau_t) - \eta_{txx} - 2u_x\eta_{txu} - {u_x}^2\eta_{tuu} - u_{xx}\eta_{tu} -$$

$$-u_t\eta_{xxu} - 2u_tu_x\eta_{xuu} - u_t{u_x}^2\eta_{uuu} - u_{tx}\eta_{xu}+$$
$$+u_{tx}\xi_{xx} - u_{tx}\eta_{xu} - 2u_xu_{tx}\eta_{uu} - (\alpha u_t - f)\eta_u+$$
$$+2(\alpha u_t - f)\xi_x + (\alpha u_t - f)\tau_t - \mu = 0. \tag{2.16}$$

При этом уравнения (2.12)–(2.14), учитывая вид функции φ^{xx} в (2.11), можно расписать в виде

$$\mu_t - f'(u_{xx})\left(\eta_{txx} + 2u_x\eta_{txu} + {u_x}^2\eta_{tuu} + u_{xx}\eta_{tu}\right) = 0, \tag{2.17}$$

$$\mu_x - f'(u_{xx})\left(\eta_{xxx} + 2u_x\eta_{xxu} + {u_x}^2\eta_{xuu} + u_{xx}\eta_{xu} - u_x\xi_{xxx} - 2u_{xx}\xi_{xx}\right) = 0, \tag{2.18}$$

$$\mu_u - f'(u_{xx})\left(\eta_{xxu} + 2u_x\eta_{xuu} + {u_x}^2\eta_{uuu} + u_{xx}\eta_{uu}\right) = 0, \tag{2.19}$$

$$\mu_{u_x} - f'(u_{xx})\left(2\eta_{xu} + 2u_x\eta_{uu} - \xi_{xx}\right) = 0, \tag{2.20}$$

$$\mu_{u_t} = \mu_{u_{tt}} = \mu_{u_{tx}} = 0. \tag{2.21}$$

Учитывая, что в силу (2.21) в уравнении (2.16) u_{tx} — свободная переменная, приравняем коэффициент при ней к нулю:

$$\xi_{xx} - 2\eta_{xu} - 2u_x\eta_{uu} = 0.$$

Здесь свободной переменной уже является u_x, поэтому $\eta_{uu} = 0$, $\eta(t,x,u) = a(t,x)u + b(t,x)$, где a, b — некоторые функции. Тогда $\xi''(x) = 2a_x(t,x)$, $a_{tx}(t,x) \equiv 0$, $\eta(t,x,u) = c(t)u + \frac{1}{2}\xi'(x)u + b(t,x)$. Тогда уравнения (2.16)–(2.21) примут вид

$$\nu u_t + \alpha(\eta_t + u_t\eta_u - u_t\tau_t) - \eta_{txx} - u_{xx}\eta_{tu} - u_t\eta_{xxu}-$$
$$-(\alpha u_t - f)\eta_u + 2(\alpha u_t - f)\xi_x + (\alpha u_t - f)\tau_t - \mu = 0, \tag{2.22}$$
$$\mu_t - f'(u_{xx})\left(\eta_{txx} + u_{xx}\eta_{tu}\right) = 0,$$
$$\mu_x - f'(u_{xx})\left(\eta_{xxx} + u_{xx}\eta_{xu} - 2u_{xx}\xi_{xx}\right) = 0,$$
$$\mu_u - f'(u_{xx})\eta_{xxu} = 0,$$
$$\mu_{u_x} = 0.$$

Коэффициент при u_t в уравнении (2.22) дает равенство

$$\nu + 2\alpha\xi'(x) - \frac{1}{2}\xi'''(x) = 0.$$

Тогда $\nu_{u_{xx}} = \nu_f = 0$. В силу (2.14) $\nu_x = 0$, поэтому $\xi''''(x) - 4\alpha\xi''(x) = 0$,

$$\xi = 2c_1x + c_2 + c_3e^{2\sqrt{\alpha}x} + c_4e^{-2\sqrt{\alpha}x},$$

$$\eta = c(t)u + c_1u + c_3\sqrt{\alpha}e^{2\sqrt{\alpha}x}u - c_4\sqrt{\alpha}e^{-2\sqrt{\alpha}x}u + b(t,x), \quad \nu = -4\alpha c_1.$$

Остались уравнения

$$\alpha(b_t(t,x) + c'(t)u) - b_{txx}(t,x) - u_{xx}c'(t)+$$
$$+f(u_{xx})(c(t) - 3c_1 - 3c_3\sqrt{\alpha}e^{2\sqrt{\alpha}x} + 3c_4\sqrt{\alpha}e^{-2\sqrt{\alpha}x} - \tau'(t)) - \mu = 0, \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}\mu_t - f'(u_{xx})\left(b_{txx}(t,x) + u_{xx}c'(t)\right) = 0,\\ \mu_x - f'(u_{xx})(b_{xxx}(t,x) + 8c_3\alpha^2 e^{2\sqrt{\alpha}x}u + 8c_4\alpha^2 e^{-2\sqrt{\alpha}x}u -\\ -6u_{xx}c_3\alpha e^{2\sqrt{\alpha}x} - 6u_{xx}c_4\alpha e^{-2\sqrt{\alpha}x}) = 0,\\ \mu_u - f'(u_{xx})(4c_3\alpha\sqrt{\alpha}e^{2\sqrt{\alpha}x} - 4c_4\alpha\sqrt{\alpha}e^{-2\sqrt{\alpha}x}) = 0.\end{gathered} \tag{2.24}$$

Выразим μ из уравнения (2.23) и подставим в (2.24). Получим

$$c'(t) - f'(u_{xx})(4c_3\sqrt{\alpha}e^{2\sqrt{\alpha}x} - 4c_4\sqrt{\alpha}e^{-2\sqrt{\alpha}x}) = 0.$$

Продифференцировав по x, получим равенства $c_3 = c_4 = 0$, $c'(t) = 0$,

$$\xi = 2c_1x + c_2, \quad \eta = (c + c_1)u + b(t,x),$$

$$\begin{gathered}\mu = \alpha b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + f(u_{xx})(c - 3c_1 - \tau'(t)),\\ \mu_t - f'(u_{xx})b_{txx}(t,x) = 0,\\ \mu_x - f'(u_{xx})b_{xxx}(t,x) = 0.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Подставим μ в последнее уравнение. Если $b_{xxx} \neq 0$, то f линейно зависит от u_{xx}. Такой случай нас не интересует, поэтому $b_{xxx} = 0$, а значит, и $b_{tx}(t,x) = 0$. Следовательно, $b(t,x) = dx^2 + gx + h(t)$, $\eta(t,x,u) = (c + c_1)u + dx^2 + gx + h(t)$, и, подставив μ в уравнение (2.25), получим

$$\alpha h''(t) - f(u_{xx})\tau''(t) = 0.$$

Так как $f'(u_{xx}) \neq 0$, дифференцируя это уравнение по u_{xx}, получим $\tau''(t) = 0$, $\tau = kt + l$. Тогда $h = mt + n$, $\eta(t,x,u) = (c + c_1)u + dx^2 + gx + mt + n$,

$$\mu = \alpha m + (c - 3c_1 - k)f.$$

Получено девятимерное пространство решений. Отметим, что в процессе вычислений не выявилось нелинейных спецификаций функции f или ненулевых спецификаций α, приводящих к расширению искомой группы. Поэтому найденные обобщенные преобразования эквивалентности совпадают с универсальными преобразованиями эквивалентности. Выбирая в пространстве решений базис подходящим образом, получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Базис алгебры Ли инфинитезимальных операторов групп преобразований эквивалентности уравнения $\alpha u_t - u_{txx} = f(u_{xx})$ образуют операторы*

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_4 = x\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_5 = t\frac{\partial}{\partial t} - f\frac{\partial}{\partial f}, \quad Y_6 = t\frac{\partial}{\partial u} + \alpha\frac{\partial}{\partial f}, \quad Y_7 = u\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial f} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

$$Y_8 = x^2\frac{\partial}{\partial u} + 2\frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad Y_9 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u} - 2\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Отсюда следует, что базис ядра основных алгебр Ли уравнения (2.1) составляют операторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, которые не содержат дополнительных переменных f, α, u_{xx}.

Следствие 1. *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения $\alpha u_t - u_{txx} = f(u_{xx})$ образуют операторы*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial u}.$$

3. Дополнительные симметрии

Возьмем фактор-алгебру алгебры Ли из теоремы 1 по ядру основных алгебр. Она имеет базис

$$Z_1 = f\frac{\partial}{\partial f}, \quad Z_2 = \alpha\frac{\partial}{\partial f}, \quad Z_3 = \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad Z_4 = u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad Z_5 = \alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Заметим сразу, что для любого элемента Z этой алгебры с ненулевым коэффициентом при Z_5 при разложении по базису равенство $Z(A-\alpha)|_{f=F,\,\alpha=A} = 0$ означает, что $\alpha = A = 0$. Нас этот случай не интересует, поэтому сразу исключим Z_5 из рассмотрения. Таблица коммутаторов $[Z_i, Z_j] = Z_iZ_j - Z_jZ_i$ для оставшейся четырехмерной алгебры Ли имеет вид

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_1	0	$-Z_2$	0	0
Z_2	Z_2	0	0	0
Z_3	0	0	0	Z_3
Z_4	0	0	$-Z_3$	0

Ненулевыми структурными константами являются $c_{12}^2 = -1$, $c_{21}^2 = 1$, $c_{34}^3 = 1$, $c_{43}^3 = -1$. По формуле $E_\alpha = c_{\alpha\beta}^\gamma e^\beta \frac{\partial}{\partial e^\gamma}$ найдем генераторы внутренних автоморфизмов алгебры Ли

$$E_1 = -e^2\frac{\partial}{\partial e^2},\ E_2 = e^1\frac{\partial}{\partial e^2},\ E_3 = e^4\frac{\partial}{\partial e^3},\ E_4 = -e^3\frac{\partial}{\partial e^3}.$$

Интегрируя системы уравнений Ли, вычислим сами внутренние автоморфизмы

$$\bar{e}^2 = e^2e^{-a_1},\ \bar{e}^2 = e^2 + a_2e^1,\ \bar{e}^3 = e^3 + a_3e^4,\ \bar{e}^3 = e^3e^{-a_4}. \tag{3.1}$$

Найдем оптимальную систему одномерных подалгебр, базис которых будем задавать в виде $Z = \sum\limits_{k=1}^{4} e^kZ_k$ или, эквивалентно, $Z = (e^1, e^2, e^3, e^4)$.

1. Пусть $e^1 \neq 0$, тогда действием второго из внутренних автоморфизмов (3.1) можно добиться равенства $e^2 = 0$.

1.2. Если $e^4 \neq 0$, получается базисный вектор $Z = (1, 0, 0, b)$, где $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

1.2. Если $e^4 = 0$, то базисный вектор имеет вид $Z = (1, 0, 1, 0)$ или $Z = (1, 0, 0, 0)$.

2. Пусть $e^1 = 0$, тогда возможны следующие случаи.

2.1. При $e^4 \neq 0$ имеем $e^3 = 0$, $Z = (0, 1, 0, 1)$ или $Z = (0, 0, 0, 1)$.

2.2. Для случая $e^4 = 0$ получаем возможные значения базисного вектора $Z = (0, 1, 1, 0)$, $Z = (0, 1, 0, 0)$, $Z = (0, 0, 1, 0)$.

Оптимальную систему Θ_1 одномерных подалгебр образуют подалгебры с базисными векторами

$$Z_2,\ Z_3,\ Z_4,\ Z_1 + Z_3,\ Z_2 + Z_3,\ Z_2 + Z_4,\ Z_1 + bZ_4,\ b \in \mathbb{R}.$$

Для каждого из этих операторов Z вычислим выражение

$$Z(F(u_{xx}) - f)|_{f=F(u_{xx}),\, \alpha=A}.$$

Приравнивая его к нулю, найдем следующие нелинейные спецификации F свободного элемента f (см. [3; 7]).

Оператору $Z_1 + Z_3$ соответствует уравнение $F' = F$, т. е. спецификация $f = F(u_{xx}) = Ce^{u_{xx}}$. В алгебре Ли генераторов преобразований эквивалентности этот оператор является проекцией оператора $-Y_5 + \frac{1}{2}Y_8$. Его проекцией на пространство переменных (t, x, u) с точностью до множителя является

$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - x^2\frac{\partial}{\partial u}.$$

Для оператора $Z_2 + Z_4$ получим уравнение $u_{xx}F' = A$, спецификацию $f = F(u_{xx}) = \alpha \ln |u_{xx}| + C$ и соответствующие операторы $Y_5 + Y_6 + Y_7$,

$$X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + (t + u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Оператору $Z_1 + bZ_4$ соответствует уравнение $bu_{xx}F' = F$ и при $b \neq 0$ спецификация $f = F(u_{xx}) = Cu_{xx}^{\sigma}$, $\sigma = b^{-1}$. В этом случае имеем соответствующие операторы $(b - 1)Y_5 + bY_7$,

$$X_5 = (b - 1)t\frac{\partial}{\partial t} + bu\frac{\partial}{\partial u}, \quad b \neq 0.$$

В первом и третьем случаях с помощью преобразований эквивалентности, соответствующих оператору Y_5, получим константу $C = 1$ для специализаций f. Во втором случае константу $C = 0$ получим с помощью преобразования эквивалентности из группы, порождаемой оператором Y_6.

Найдем теперь оптимальную систему Θ_2 двумерных подалгебр. Для этого будем выбирать поочередно базисные векторы одномерных подалгебр и искать второй приемлемый базисный вектор для двумерной алгебры.

Пусть операторы Z_2 и $e^1Z_1 + e^3Z_3 + e^4Z_4$ образуют базис двумерной подалгебры. Тогда, используя таблицу коммутаторов и условие замкнутости подалгебры относительно умножения Ли, получим

$$[Z_2, e^1Z_1 + e^3Z_3 + e^4Z_4] = e^1Z_2 = \alpha Z_2 + \beta(e^1Z_1 + e^3Z_3 + e^4Z_4).$$

Отсюда $\alpha = e^1$, $\beta = 0$. При $e^4 \neq 0$ с помощью автоморфизма (3.1) можно сделать $e^3 = 0$. Тогда получится подалгебра с базисом $\langle Z_2, bZ_1 + Z_4\rangle$, $b \in \mathbb{R}$. Если $e^4 = 0$, то базисами будут $\langle Z_2, Z_1 + Z_3\rangle$, $\langle Z_2, Z_1\rangle$, $\langle Z_2, Z_3\rangle$.

Теперь базис будем искать в виде $\langle Z_3, e^1Z_1+e^2Z_2+e^4Z_4\rangle$. Получим $[Z_2, e^1Z_1+e^2Z_2 + e^4Z_4] = e^4Z_3 = \alpha Z_3 + \beta(e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^4Z_4)$. Тем самым $\beta = 0$, $\alpha = e^4$. С учётом внутренних автоморфизмов допустимы новые базисы двумерных подалгебр вида $\langle Z_3, Z_1 + bZ_4\rangle$, $\langle Z_3, Z_2 + Z_4\rangle$, $\langle Z_3, Z_4\rangle$.

Рассмотрим базис двумерной подалгебры вида $\langle Z_4, e^1Z_1+e^2Z_2+e^3Z_3\rangle$. Тогда $[Z_4, e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^3Z_3] = -e^3Z_3$. Новым базисом будет $\langle Z_4, Z_1\rangle$.

Пусть базис имеет вид $\langle Z_1 + Z_3, e^2Z_2 + e^3Z_3 + e^4Z_4\rangle$. Тогда

$$[Z_1 + Z_3, e^2Z_2 + e^3Z_3 + e^4Z_4] = -e^2Z_2 + e^4Z_3 =$$

$$= \alpha(Z_1 + Z_3) + \beta(e^2Z_2 + e^3Z_3 + e^4Z_4).$$

Отсюда следуют уравнения $\alpha = 0$, $(\beta+1)e^2 = 0$, $\beta e^3 - e^4 = 0$, $\beta e^4 = 0$. Если $\beta = 0$, то $e^2 = e^4 = 0$ и новых подалгебр не получится. Если $\beta \neq 0$, то $e^4 = e^3 = 0$ и также не будет новых подалгебр.

Если базис имеет вид $\langle Z_2 + Z_3, e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^4Z_4\rangle$, то

$$[Z_2 + Z_3, e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^4Z_4] = e^1Z_2 + e^4Z_3 = \alpha(Z_2 + Z_3) + \beta(e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^4Z_4).$$

Поэтому $\beta e^1 = 0$, $\alpha+\beta e^2 = e^1$, $\alpha = e^4$, $\beta e^4 = 0$. Пусть $\beta \neq 0$, тогда $e^1 = e^2 = e^4 = 0$ и подалгебр нет. Если $\beta = 0$, то $e^1 = e^4$. Новый базис — $\langle Z_2 + Z_3, Z_1 + Z_4\rangle$.

Рассмотрим базис двумерной подалгебры вида $\langle Z_2 + Z_4, e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^3Z_3\rangle$. Тогда

$$[Z_2 + Z_4, e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^3Z_3] = e^1Z_2 - e^3Z_3 = \alpha(Z_2 + Z_4) + \beta(e^1Z_1 + e^2Z_2 + e^3Z_3).$$

Новых подалгебр нет.

Осталось рассмотреть базис вида $\langle Z_1+bZ_4, e^2Z_2+e^3Z_3+e^4Z_4\rangle$. В этом случае

$$[Z_1 + bZ_4, e^2Z_2 + e^3Z_3 + e^4Z_4] = -e^2Z_2 - be^3Z_3 =$$

$$= \alpha(Z_1 + bZ_4) + \beta(e^2Z_2 + e^3Z_3 + e^4Z_4).$$

Следовательно, $\alpha = 0$, $(\beta + 1)e^2 = 0$, $(\beta + b)e^3 = 0$, $\beta e^4 = 0$. Перебор возможных вариантов с точностью до действия внутренних автоморфизмов (3.1) в данном случае также не дает подалгебр, отличных от уже полученных.

Итак, оптимальную систему Θ_2 двумерных подалгебр образуют подалгебры с базисами

$$\langle Z_1, Z_2\rangle, \quad \langle Z_1, Z_4\rangle, \quad \langle Z_2, Z_3\rangle, \quad \langle Z_2, Z_1 + Z_3\rangle, \quad \langle Z_2, bZ_1 + Z_4\rangle,$$

$$\langle Z_3, Z_4\rangle, \quad \langle Z_3, Z_1 + bZ_4\rangle, \quad \langle Z_3, Z_2 + Z_4\rangle, \quad \langle Z_2 + Z_3, Z_1 + Z_4\rangle.$$

Рассуждениями, аналогичными тем, которые проведены с использованием одномерных подалгебр, устанавливается, что двумерные подалгебры не задают новых спецификаций свободного элемента f, при которых исследуемое уравнение

(2.1) имеет дополнительные симметрии. То же самое можно сказать про трехмерные подалгебры, поиск которых мы здесь опускаем.

Теорема 2. (i) *Уравнение* $\alpha u_t - u_{txx} = e^{u_{xx}}$ *при* $\alpha \neq 0$ *имеет пятимерную основную алгебру Ли с базисом*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial u},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial u},\ X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - x^2\frac{\partial}{\partial u}.$$

(ii) *Уравнение* $\alpha u_t - u_{txx} = \alpha \ln |u_{xx}|$ *при* $\alpha \neq 0$ *имеет пятимерную основную алгебру Ли с базисом*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + (t+u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

(iii) *Уравнение* $\alpha u_t - u_{txx} = u_{xx}^{\sigma}$ *при* $\alpha \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$ *имеет пятимерную основную алгебру Ли с базисом*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = (1-\sigma)t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Дополнительных симметрий уравнения $\alpha u_t - u_{txx} = f(u_{xx})$ *при спецификациях свободных элементов* α, f, *где* $\alpha \neq 0$, f *— нелинейная функция, не эквивалентных перечисленным спецификациям, не существует.*

4. Инвариантные решения уравнения с экспоненциальной функцией

Рассмотрим операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - x^2\frac{\partial}{\partial u}.$$

Согласно утверждению (i) теоремы 2 они образуют базис алгебры Ли уравнения

$$\alpha u_t - u_{txx} = e^{u_{xx}}. \tag{4.1}$$

Вычислив таблицу коммутаторов данной алгебры Ли

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	$2X_1$
X_2	0	0	0	X_3	$-2X_4$
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	$-X_3$	0	0	0
X_5	$-2X_1$	$2X_4$	0	0	0

,

найдем внутренние автоморфизмы

$$\bar{e}^1 = e^1 + 2e^5 a_1, \ \begin{cases} \bar{e}^3 = e^3 + e^4 a_2 - e^5 a_2^2, \\ \bar{e}^4 = e^4 - 2e^5 a_2, \end{cases} \ \bar{e}^3 = e^3 - e^2 a_3, \ \begin{cases} \bar{e}^1 = e^1 e^{-2a_4}, \\ \bar{e}^4 = e^4 + 2e^2 a_4. \end{cases} \tag{4.2}$$

Найдем оптимальную систему одномерных подалгебр с базисом вида $X = (e^1, e^2, e^3, e^4, e^5)$.

1. Пусть $e^5 \neq 0$, рассмотрим возможные варианты.

1.1. Если при этом $e^2 \neq 0$, то действиями внутренних автоморфизмов (4.2) можно добиться равенств $e^1 = e^4 = e^3 = 0$. Получается базисный вектор $X = (0, 1, 0, 0, b)$, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.2. Если $e^2 = 0$, то получим равенства $e^1 = e^4 = 0$, и поэтому базисный вектор имеет вид $X = (0, 0, b, 0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $e^5 = 0$, тогда возможны следующие случаи.

2.1. При $e^2 \neq 0$ имеем $e^3 = 0, e^4 = 0$, и тогда $X = (b, 1, 0, 0, 0)$, $b \in \mathbb{R}$.

2.2. Для случая $e^2 = 0$, $e^4 = 0$ получаем возможные значения базисного вектора $X = (1, 0, 0, 0, 0)$, $X = (0, 0, 1, 0, 0)$, $X = (1, 0, 1, 0, 0)$.

2.3. Если $e^2 = 0$, $e^4 \neq 0$, то $e^3 = 0$. В этом случае $X = (0, 0, 0, 1, 0)$ или $X = (1, 0, 0, 1, 0)$.

Таким образом, оптимальную систему одномерных подалгебр образуют подалгебры с базисными векторами

$$X_1,\ X_3,\ X_4,\ X_1 + X_3,\ X_1 + X_4,\ bX_1 + X_2,\ bX_3 + X_5,\ X_2 + bX_5\ (b \neq 0).$$

Будем искать инвариантные решения для этих операторов.

Найдем инварианты оператора $X_2 + bX_5$ при $b \neq 0$. Для этого решим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + 2bt\frac{\partial}{\partial t} - bx^2\frac{\partial}{\partial u}\right) J = 0.$$

Характеристическая система этого уравнения имеет вид

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{2bt} = \frac{du}{-bx^2},$$

ее решения — $J_1 = u + b\frac{x^3}{3}$, $J_2 = te^{-2bx}$. Из уравнения $J_1 = \varphi(J_2)$ найдем функцию $u = \varphi(te^{-2bx}) - b\frac{x^3}{3}$. Тогда

$$u_t = \varphi' e^{-2bx}, \quad u_x = -2bte^{-2bx}\varphi' - bx^2, \quad u_{xx} = 4b^2te^{-2bx}\varphi' + 4b^2t^2e^{-4bx}\varphi'' - 2bx,$$

$$u_{txx} = 4b^2e^{-2bx}\varphi' + 12b^2te^{-4bx}\varphi'' + 4b^2t^2e^{-6bx}\varphi'''.$$

После преобразований получаем подмодель [11]

$$(\alpha - 4b^2)\varphi' - 12b^2te^{-2bx}\varphi'' - 4b^2t^2e^{-4bx}\varphi''' = e^{4b^2te^{-2bx}\varphi' + 4b^2t^2e^{-4bx}\varphi''},$$

возможность интегрирования которого может быть исследована, например, после понижения порядка и нахождения основной алгебры Ли такого уравнения [12]. Далее аналогичные подмодели будем оставлять без комментариев, подразумевая по умолчанию, что аналогичное исследование их интегрируемости также возможно.

Для оператора $bX_3 + X_5$ имеем уравнение

$$\left(b\frac{\partial}{\partial u} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - x^2\frac{\partial}{\partial u}\right) J = 0$$

и его характеристическую систему

$$\frac{dt}{2t} = \frac{du}{b - x^2},$$

решениями которой являются функции $J_1 = x$ и $J_2 = \frac{2u}{b-x^2} - \ln|t|$. Из уравнения $J_2 = \varphi(J_1)$ выразим функцию

$$u = (b - x^2)\frac{\varphi(x) + \ln|t|}{2}.$$

Найденное u подставляем в уравнение (4.1), которое после преобразований дает равенства

$$\frac{\alpha}{2t}(b - x^2) + \frac{1}{t} = e^{\left(\frac{b-x^2}{2}\varphi(x)\right)'' - \ln|t|} = \frac{e^{\left(\frac{b-x^2}{2}\varphi(x)\right)''}}{t},$$

отсюда

$$\left(\frac{b - x^2}{2}\varphi(x)\right)'' = \ln\left(\frac{\alpha}{2}(b - x^2) + 1\right).$$

Для удобства переобозначим $a = -\frac{\alpha}{2} \neq 0$ и $b = \frac{\alpha b}{2} + 1$, тогда для того, чтобы уравнение выполнялось в точке x, необходимо, чтобы было $ax^2 + b > 0$. Это невозможно при $a, b < 0$, всегда выполняется при $a, b > 0$ и выполняется локально в остальных случаях. Далее уравнение рассматривается в окрестности точки, в которой $ax^2 + b > 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{b - x^2}{2}\varphi(x)\right)'' = \ln(ax^2 + b).$$

Интегрированием его получаем уравнение

$$\left(\frac{b - x^2}{2}\varphi(x)\right)' = x\ln(ax^2 + b) - \int\frac{2ax^2}{ax^2 + b}dx = x\ln(ax^2 + b) - 2x +$$

$$+2b\int\frac{dx}{ax^2 + b}dx = x\ln(ax^2 + b) - 2x + 2\int\frac{dx}{\frac{a}{b}x^2 + 1}dx =$$

$$\begin{cases} x\ln(ax^2 + b) - 2x + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}x + C_1, & \text{при } a, b > 0, \\ x\ln(ax^2 + b) - 2x + \sqrt{\frac{-b}{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x+1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x-1}\right| + C_1, & \text{при } a \text{ и } b \text{ разного знака.} \end{cases}$$

Далее,

$$\frac{b - x^2}{2}\varphi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int\left(x\ln|ax^2 + b| - 2x + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}x + C_1\right)dx, \\ \displaystyle\int\left(x\ln|ax^2 + b| - 2x + \sqrt{\frac{-b}{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x + 1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x - 1}\right| + C_1\right)dx, \end{cases}$$

$$\int x\ln(ax^2+b)dx=\frac{x^2}{2}\ln(ax^2+b)-\frac{x^2}{2}+\frac{b}{2a}\ln(ax^2+b),$$

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}xdx=x\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}x-\int\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}xdx}{\frac{a}{b}x^2+1}=$$

$$=x\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}x-b\int\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}xdx}{ax^2+b}=x\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}x-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\ln(ax^2+b)+C,$$

$$\int\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x+1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x-1}\right|dx=x\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x+1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x-1}\right|-2\sqrt{\frac{-a}{b}}\int\frac{xdx}{\frac{a}{b}x^2+1}=$$

$$=x\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x+1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x-1}\right|-2b\sqrt{\frac{-a}{b}}\int\frac{xdx}{ax^2+b}=x\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x+1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x-1}\right|+\sqrt{\frac{-b}{a}}\ln(ax^2+b)+C.$$

Тогда

$$\frac{b-x^2}{2}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-b}{2a}\ln(ax^2+b)+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}x\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}}x-\dfrac{3x^2}{2}+C_1x+C_2 \\ \qquad\text{при } a,b>0; \\ \dfrac{ax^2-b}{2a}\ln(ax^2+b)+\sqrt{\dfrac{-b}{a}}x\ln\left|\dfrac{\sqrt{\frac{-a}{b}}x+1}{\sqrt{\frac{-a}{b}}x-1}\right|-\dfrac{3x^2}{2}+C_1x+C_2 \\ \qquad\text{при } ab<0\end{cases}$$

и решение уравнения имеет вид при $\alpha<0$, $\alpha b+2>0$

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(x^2+b+\frac{2}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{\alpha}{2}(b-x^2)+1\right)+2x\sqrt{-\left(b+\frac{2}{\alpha}\right)}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-1}{b+\frac{2}{\alpha}}}x-$$

$$-\frac{3x^2}{2}+C_1x+C_2+\frac{b-x^2}{2}\ln|t|.$$

При $\alpha(\alpha b+2)>0$

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(x^2+b+\frac{2}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{\alpha}{2}(b-x^2)+1\right)+x\sqrt{b+\frac{2}{\alpha}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{b+\frac{2}{\alpha}}}{x-\sqrt{b+\frac{2}{\alpha}}}\right|-$$

$$-\frac{3x^2}{2}+C_1x+C_2+\frac{b-x^2}{2}\ln|t|.$$

Наконец, при $\alpha>0$, $\alpha b+2<0$ решения уравнения не существует ни в одной точке.

Для одномерной подалгебры с базисным оператором bX_1+X_2 имеем функцию $u=\varphi(t-bx)$. Отсюда получается подмодель, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением $\alpha\varphi'-b^2\varphi'''=e^{b^2\varphi''}$.

Если $b = 0$, это уравнение имеет вид $\alpha\varphi'(t) = 1$. Тогда решение уравнения (4.1) имеет вид $u(t,x) = \frac{t}{\alpha} + C_1$.

В случае оператора $X_1 + X_4$ имеем $u = xt + \varphi(x)$. Подставим эту функцию в уравнение (4.1) и получим уравнение $\ln(\alpha x) = \varphi''(x)$ при α и x одного знака. Отсюда

$$\varphi'(x) = x\ln(\alpha x) - x + C_1.$$

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2}\ln(\alpha x) - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2.$$

Тогда решение уравнения имеет вид

$$u(t,x) = \frac{x^2}{2}\ln(\alpha x) - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2 + xt, \quad \alpha x > 0.$$

Если α и x разного знака, решения в окрестности этой точки x не существует.

Для подалгебры, порождаемой оператором $X_1 + X_3$, имеем $u = \varphi(x) + t$. Найденное u подставляем в уравнение (4.1) и получаем

$$u(t,x) = t + \frac{x^2}{2}\ln\alpha + C_1 x + C_2 \text{ при } \alpha > 0.$$

При $\alpha < 0$ уравнение не имеет действительных решений.

Нетрудно убедиться, что остальные подалгебры из оптимальной системы инвариантных решений не имеют.

Таким образом, найдены следующие инвариантные решения уравнения (4.1):

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + b + \frac{2}{\alpha}\right)\ln\left|\frac{\alpha}{2}(b - x^2) + 1\right| + 2x\sqrt{-\left(b + \frac{2}{\alpha}\right)}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-1}{b + \frac{2}{\alpha}}}x -$$

$$-\frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2 + \frac{b - x^2}{2}\ln|t| \quad \text{при } \alpha < 0,\ \alpha b + 2 > 0,$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + b + \frac{2}{\alpha}\right)\ln\left|\frac{\alpha}{2}(b - x^2) + 1\right| + x\sqrt{b + \frac{2}{\alpha}}\ln\left|\frac{x + \sqrt{b + \frac{2}{\alpha}}}{x - \sqrt{b + \frac{2}{\alpha}}}\right| -$$

$$-\frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2 + \frac{b - x^2}{2}\ln|t| \quad \text{при } \alpha(\alpha b + 2) > 0,$$

$$u(t,x) = \frac{x^2}{2}\ln(\alpha x) - \frac{3x^2}{4} + C_1 x + C_2 + xt \quad \text{при } \alpha x > 0,$$

$$u(t,x) = \frac{x^2}{2}\ln\alpha + C_1 x + C_2 + t \quad \text{при } \alpha > 0.$$

$$u(t,x) = \frac{t}{\alpha} + C_1.$$

Используя допускаемые группы преобразований

$$\bar{t} = t + a_1,\ \bar{x} = x + a_2,\ \bar{u} = u + a_3,\ \bar{u} = u + a_4 x,\ \begin{cases} \bar{t} = te^{2a_5}, \\ \bar{u} = u - x^2 a_5, \end{cases}$$

рассматриваемого уравнения, получим пятипараметрическую группу

$$\begin{cases} \bar{t} = te^{2a_5} + a_1, \\ \bar{x} = x + a_2, \\ \bar{u} = u + a_3 + a_4 x - a_5 x^2. \end{cases}$$

С ее помощью из инвариантных решений получим многопараметрические семейства решений:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left((x+a_2)^2 + b + \frac{2}{\alpha}\right)\ln\left|\frac{\alpha}{2}(b-(x+a_2)^2)+1\right| +$$

$$+2(x+a_2)\sqrt{-\left(b+\frac{2}{\alpha}\right)}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{-1}{b+\frac{2}{\alpha}}}(x+a_2)\right) -$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + a_3 x + a_4 + \frac{b-(x+a_2)^2}{2}\ln|t+a_1| \quad \text{при } \alpha < 0,\ \alpha b + 2 > 0;$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left((x+a_2)^2 + b + \frac{2}{\alpha}\right)\ln\left|\frac{\alpha}{2}(b-(x+a_2)^2)+1\right| +$$

$$+(x+a_2)\sqrt{b+\frac{2}{\alpha}}\ln\left|\frac{x+a_2+\sqrt{b+\frac{2}{\alpha}}}{x+a_2-\sqrt{b+\frac{2}{\alpha}}}\right| -$$

$$-\frac{3}{2}x^2 + a_3 x + a_4 + \frac{b-(x+a_2)^2}{2}\ln|t+a_1| \quad \text{при } \alpha(\alpha b+2) > 0;$$

$$u(t,x) = \frac{(x+a_2)^2}{2}\ln(\alpha(x+a_2)) + \left(a_1 - \frac{3}{4\alpha}\right)x^2 + a_3 x + a_4 + (x+a_2)te^{2a_1}$$

при $\alpha(x+a_2) > 0$;

$$u(t,x) = \left(\frac{\ln\alpha}{2} + a_1\right)x^2 + a_2 x + a_3 + te^{2a_1} \quad \text{при } \alpha > 0.$$

5. Инвариантные решения уравнения со степенной функцией

Базисом алгебры Ли уравнения

$$\alpha u_t - u_{txx} = u_{xx}^{c+1} \tag{5.1}$$

в силу утверждения (iii) теоремы 2 при $\sigma = c+1$, $c \neq -1$, $c \neq 0$, $c \neq 1$ является набор операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = u\frac{\partial}{\partial u} - ct\frac{\partial}{\partial t}.$$

Таблица коммутаторов в данном случае имеет вид

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	$-cX_1$
X_2	0	0	0	X_3	0
X_3	0	0	0	0	X_3
X_4	0	$-X_3$	0	0	X_4
X_5	cX_1	0	$-X_3$	$-X_4$	0

Внутренние автоморфизмы рассматриваемой алгебры Ли есть преобразования

$$\bar{e}^1 = e^1 - ce^5 a_1,\ \bar{e}^3 = e^3 + e^4 a_2,\ \bar{e}^3 = e^3 + e^5 a_3,\ \begin{cases} \bar{e}^3 = e^3 - e^2 a_4, \\ \bar{e}^4 = e^4 + e^5 a_4, \end{cases} \begin{cases} \bar{e}^1 = e^1 e^{ca_5}, \\ \bar{e}^3 = e^3 e^{-a_5}, \\ \bar{e}^4 = e^4 e^{-a_5}. \end{cases}$$

Так же, как и в предыдущем параграфе, будем искать оптимальную систему одномерных подалгебр, базис которых будем задавать в виде $X = \sum\limits_{k=1}^{5} e^k X_k$.

1. Если $e^5 \neq 0$, то с помощью внутренних автоморфизмов можно получить $e^1 = e^3 = e^4 = 0$ и $X = (0, b, 0, 0, 1)$, где $b \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $e^5 = 0, e^4 \neq 0$, тогда $e^3 = 0$ и при $e^1 = 0$ получаем $X = (0, 0, 0, 1, 0)$ для случая $e^2 = 0$, $X = (0, 1, 0, 1, 0)$ для $e^2 \neq 0$. Если $e^1 \neq 0$, то получим подалгебру с базисным вектором $X = (1, b, 0, 1, 0)$, $b \in \mathbb{R}$.

3. В случае $e^5 = 0$, $e^4 = 0$, $e^2 \neq 0$ имеем $e^3 = 0$ и базисным вектором является $X = (0, 1, 0, 0, 0)$ при $e^1 = 0$, $X = (1, 1, 0, 0, 0)$ при $e^1 \neq 0$.

4. При $e^5 = 0$, $e^4 = 0$, $e^2 = 0$ получаем один из вариантов: $X = (1, 0, 0, 0, 0)$, $X = (0, 0, 1, 0, 0)$, $X = (1, 0, 1, 0, 0)$.

Получена оптимальная система одномерных подалгебр

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_1 + X_2,\ X_1 + X_3,\ X_2 + X_4,\ bX_2 + X_5,\ X_1 + bX_2 + X_4.$$

Для оператора $bX_2 + X_5$ инвариантами являются $J_1 = ut^{\frac{1}{c}}$, $J_2 = cx + b\ln|t|$, поэтому будем искать инвариантное решение в виде $u = t^{-\frac{1}{c}}\varphi(cx + b\ln|t|)$, где φ — некоторая функция. Имеем

$$u_t = \frac{t^{-\frac{1}{c}-1}}{c}\left(cb\varphi' - \varphi\right), \quad u_{xx} = c^2 t^{-\frac{1}{c}}\varphi'', \quad u_{txx} = ct^{-\frac{1}{c}-1}\left(cb\varphi''' - \varphi''\right).$$

Получаем подмодель

$$\alpha\left(cb\varphi' - \varphi\right) - c^2\left(cb\varphi''' - \varphi''\right) = c^{2c+3}\varphi''^{c+1}.$$

Для $X_2 + X_4$ инвариантное решение ищем в виде $u = \frac{x^2}{2} + \varphi(t)$. Из уравнения (5.1) получим $u(t, x) = \frac{x^2}{2} + \frac{t}{\alpha} + C_1$.

Инвариантами оператора $X_1 + bX_2 + X_4$ при $b \neq 0$ являются функции $J_1 = 2bu - x^2$, $J_2 = x - bt$. Поэтому инвариантное решение будем искать в виде

$$u = \frac{x^2 + \varphi(x - bt)}{2b}.$$

Из (5.1) получаем подмодель

$$-\alpha\varphi' - \varphi''' = 2\left(\frac{1+\varphi''}{b}\right)^{c+1}.$$

Если $b = 0$, то $J_1 = u - xt$, $J_2 = x$, $u = xt + \varphi(x)$, $\alpha x = \varphi''^{c+1}$,

$$\varphi(x) = \alpha^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} x^{\frac{2c+3}{c+1}} + C_1 x + C_2,$$

$$u(t,x) = \alpha^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} x^{\frac{2c+3}{c+1}} + C_1 x + C_2 + xt,$$

либо

$$u(t,x) = (-\alpha)^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} (-x)^{\frac{2c+3}{c+1}} + C_1 x + C_2 + xt.$$

Для одномерной подалгебры с оператором X_2 инвариантным решением является постоянная функция $u(t,x) \equiv C_1$.

Для подалгебры с базисным оператором $X_1 + X_2$ инвариантное решение имеет вид $u = \varphi(t - x)$, где функция φ является решением уравнения

$$\alpha\varphi' - \varphi''' = \varphi''^{c+1}.$$

Если базисным вектором является X_1, то инвариантным решением — функция $u(t,x) = C_1 x + C_2$.

Итак, уравнение (5.1) при $\alpha \neq 0$ имеет инвариантные решения

$$u(t,x) = \alpha^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} x^{\frac{2c+3}{c+1}} + C_1 x + C_2 + xt,$$

$$u(t,x) = (-\alpha)^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} (-x)^{\frac{2c+3}{c+1}} + C_1 x + C_2 + xt,$$

$$u(t,x) = \alpha^{\frac{1}{c+1}} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 + t,$$

$$u(t,x) = \frac{x^2}{2} + \frac{t}{\alpha} + C_1,$$

$$u(t,x) = C_1 x + C_2.$$

Используя допускаемые группы преобразований

$$\bar t = t + a_1,\ \bar x = x + a_2,\ \bar u = u + a_3,\ \bar u = u + a_4 x,\ \begin{cases} \bar t = t e^{-c a_5}, \\ \bar u = u e^{a_5}, \end{cases}$$

получим пятипараметрическую допускаемую группу

$$\begin{cases} \bar t = t e^{-c a_5} + a_1, \\ \bar x = x + a_2, \\ \bar u = u e^{a_5} + a_3 + a_4 x. \end{cases}$$

Действуя преобразованиями этой группы на найденные инвариантные решения уравнения (5.1), построим многопараметрические семейства решений:

$$u(t,x) = \alpha^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} (x+a_2)^{\frac{2c+3}{c+1}} e^{a_1} + a_3 x + a_4 + (x+a_2) t e^{(c+1)a_1},$$

$$u(t,x) = (-\alpha)^{\frac{1}{c+1}} \frac{(c+1)^2}{(c+2)(2c+3)} (a_2-x)^{\frac{2c+3}{c+1}} e^{a_1} + a_3 x + a_4 + (x-a_2) t e^{(c+1)a_1},$$

$$u(t,x) = \alpha^{\frac{1}{c+1}} e^{a_1} x^2 + a_2 x + a_3 + 2^{c+1} t e^{(c+1)a_1},$$

$$u(t,x) = e^{a_1} x^2 + \frac{2^{c+1} t e^{(c+1)a_1}}{\alpha} + a_2 x + a_3,$$

$$u(t,x) = a_1 x + a_2.$$

6. Инвариантные решения уравнения с логарифмической функцией

Операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + (t+u)\frac{\partial}{\partial u}$$

по теореме 3 при $\alpha \neq 0$ образуют базис алгебры Ли уравнения

$$\alpha u_t - u_{txx} = \alpha \ln |u_{xx}|. \tag{6.1}$$

Таблица коммутаторов имеет вид

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	$X_1 + X_3$
X_2	0	0	0	X_3	0
X_3	0	0	0	0	X_3
X_4	0	$-X_3$	0	0	X_4
X_5	$-X_1 - X_3$	0	$-X_3$	$-X_4$	0

Ненулевыми структурными константами являются

$$c_{15}^1 = 1, \quad c_{15}^3 = 1, \quad c_{24}^3 = 1, \quad c_{35}^3 = 1, \quad c_{42}^3 = -1,$$
$$c_{45}^4 = 1, \quad c_{51}^1 = -1, \quad c_{51}^3 = -1, \quad c_{53}^3 = -1, \quad c_{54}^4 = -1.$$

Генераторы внутренних автоморфизмов данной алгебры Ли имеют вид

$$E_1 = e^5 \frac{\partial}{\partial e^1} + e^5 \frac{\partial}{\partial e^3}, \quad E_2 = e^4 \frac{\partial}{\partial e^3}, \quad E_3 = e^5 \frac{\partial}{\partial e^3},$$

$$E_4 = -e^2 \frac{\partial}{\partial e^3} + e^5 \frac{\partial}{\partial e^4}, \quad E_5 = -e^1 \frac{\partial}{\partial e^1} - (e^1 + e^3)\frac{\partial}{\partial e^3} - e^4 \frac{\partial}{\partial e^4},$$

а сами внутренние автоморфизмы —

$$\begin{cases} \bar{e}^1 = e^1 + a_1 e^5, \\ \bar{e}^3 = e^3 + a_1 e^5, \end{cases}, \quad \bar{e}^3 = e^3 + a_2 e^4, \quad \bar{e}^3 = e^3 + a_3 e^5,$$

$$\begin{cases} \bar{e}^3 = e^3 - a_4 e^2, \\ \bar{e}^4 = e^4 + a_4 e^5, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{e}^1 = e^1 e^{-a_5}, \\ \bar{e}^3 = e^{-a_5}(e^3 - a_5 e^1), \\ \bar{e}^4 = e^4 e^{-a_5}. \end{cases}$$

Найдем базисные векторы $X = (e^1, e^2, e^3, e^4, e^5)$ одномерных подалгебр из оптимальной системы.

1. Если $e^5 \neq 0$, то действием внутренних автоморфизмов получим $e^1 = e^3 = e^4 = 0$, $X = (0, b, 0, 0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$.

2. При $e^5 = 0$, $e^4 \neq 0$ получим $e^3 = 0$. Рассмотрим следующие случаи.

2.1. Если $e^1 = 0$, $e^2 = 0$, то базисный вектор $X = (0, 0, 0, 1, 0)$.

2.2. Для случая $e^2 \neq 0$ получаем $X = (b, 1, 0, 1, 0)$, $b \in \mathbb{R}$.

2.3. В случае $e^2 = 0$ имеем $X = (b, 0, 0, 1, 0)$, $b \in \mathbb{R}$.

3. При $e^5 = 0$, $e^4 = 0$ возможны следующие варианты.

3.1. Если $e^2 = 0$, $e^1 \neq 0$, то $e^3 = 0$, $X = (1, 0, 0, 0, 0)$.

3.2. Для случая $e^2 = 0$, $e^1 = 0$ имеем $X = (0, 0, 1, 0, 0)$.

3.3. При $e^2 \neq 0$ получим $e^3 = 0$, $X = (0, 1, 0, 0, 0)$ или $X = (1, 1, 0, 0, 0)$.

Получена система одномерных подалгебр:

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_1 + X_2,\ bX_1 + X_4,\ bX_2 + X_5,\ bX_1 + X_2 + X_4.$$

Оператор $bX_2 + X_5$ имеет инварианты

$$J_1 = \frac{u}{t} - \ln|t|, \quad J_2 = b\ln|t| - x.$$

Инвариантные решения ищем в виде

$$u = t\ln|t| + t\varphi(b\ln|t| - x).$$

Имеем $u_t = \varphi + b\varphi' + \ln|t| + 1$, $u_{xx} = t\varphi''$, $u_{txx} = \varphi'' + b\varphi'''$. Получаем подмодель

$$\alpha\varphi + \alpha b\varphi' + \alpha - \varphi'' - b\varphi''' = \alpha\ln|\varphi''|.$$

Для оператора $bX_1 + X_4$ ищем инвариантное решение в виде $u = \frac{tx + \varphi(x)}{b}$ при $b \neq 0$. Из (6.1) получаем уравнение $\frac{x}{b} = \ln|\varphi''(x)| - \ln|b|$. Тогда

$$u(t, x) = \pm b^2 e^{\frac{x}{b}} + \frac{tx}{b} + C_1 x + C_2.$$

Оператор $bX_1 + X_2 + X_4$ при $b \neq 0$ имеет инварианты $J_1 = u - \frac{x^2}{2}$, $J_2 = t - bx$, поэтому инвариантное решение будем искать в виде

$$u = \frac{x^2 + \varphi(t - bx)}{2}.$$

Тогда уравнение (6.1) примет вид

$$\alpha\varphi' - b^2\varphi''' = 2\alpha\ln\left|\frac{2 + b^2\varphi''}{2}\right|.$$

При $b = 0$ имеем

$$u = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Для оператора $X_1 + X_2$ получим подмодель

$$\alpha\varphi' - \varphi''' = \alpha \ln |\varphi''|.$$

Таким образом, найдены инвариантные решения

$$u(t,x) = \pm b^2 e^{\frac{x}{b}} + \frac{tx}{b} + C_1 x + C_2,$$

$$u(t,x) = \pm\frac{x^2}{2} + C_2$$

уравнения (6.1) при $\alpha \neq 0$.

Допускаемые группы преобразований

$$\bar t = t + a_1, \quad \bar x = x + a_2, \quad \bar u = u + a_3, \quad \bar u = u + a_4 x, \quad \begin{cases} \bar t = te^{a_5}, \\ \bar u = (u + a_5 t)e^{a_5} \end{cases}$$

образуют пятипараметрическую группу пребразований уравнения (6.1)

$$\begin{cases} \bar t = te^{a_5} + a_1, \\ \bar x = x + a_2, \\ \bar u = (u + a_5 t)e^{a_5} + a_4 x + a_3. \end{cases}$$

С ее помощью построим многопараметрические семейства решений:

$$u(t,x) = \pm b^2 e^{\frac{x+a_2}{b}} + \frac{tx}{b} + a_1 x + \frac{a_2}{b} t + a_3,$$

$$u(t,x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + t\ln(2a_1).$$

Список литературы

1. **Овсянников, Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

2. **Ибрагимов, Н. Х.** Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.

3. **Ibragimov, N. H.** Selected Works. Vol. 1, 2 / N. H. Ibragimov. — Karlskrona, Sweden : Alga Publications, Blekinge Institute of Technology, 2001.

4. **Лагно, В. И.** Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа / В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний. — М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2004. — 392 с.

5. **Андреев, В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. — Новосибирск : Наука, 1994.

6. **Grigoriev, Y. N.** Symmetries of Integro-Differential Equations: With Applications in Mechanics and Plasma Physics / Y. N. Grigoriev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko. — Dordrecht : Springer, 2010.

7. **Чиркунов, Ю. А.** Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды / Ю. А. Чиркунов, С. В. Хабиров. — Новосибирск : НГТУ, 2011. — 659 с.

8. **Демиденко, Г. В.** Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Науч. кн., 1998. — 438+xviii с.

9. **Свешников, А. Г.** Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. — М. : Физматлит, 2007. — 736 с.

10. **Баренблатт, Г. И.** Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Приклад. математика и механика. — 1960. — Т. 24, вып. 5. — С. 852–864.

11. **Овсянников, Л. В.** Программа «Подмодели». Газовая динамика // Л. В. Овсянников // Приклад. математика и механика. — 1994. — Т. 58, вып. 4. — С. 30–55.

12. **Ибрагимов, Н. Х.** Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н. Х. Ибрагимов. — Н. Новгород : Изд-во Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2007. — 421 с.