

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Борисова, П. Г. Данилаев, Н. Б. Ильинский,
Е. Г. Шешуков, Один численный метод решения
задач нелинейной фильтрации,
Тр. сем. по краев. задачам, 1974, выпуск 11, 25–31

<https://www.mathnet.ru/kukz393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

17 мая 2025 г., 22:12:50



БОРИСОВА Т. В., ДАНИЛАЕВ П. Г., ИЛЬИНСКИЙ Н. Б.,
ШЕШУКОВ Е. Г.

ОДИН ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В последние годы возрос интерес к задачам фильтрации, не подчиняющейся закону Дарси. В этом случае, как известно, закон фильтрации представим в виде:

$$\text{grad } h = -\frac{f(v)}{v} \bar{v}, \quad f(v) = \lambda_0 + f^*(v), \quad (1)$$

где h — пьезометрический напор, \bar{v} — вектор скорости фильтрации, $f^*(v)$ — монотонно возрастающая функция, $f^*(0) = 0$, λ_0 — неотрицательная постоянная.

Вводя функцию тока ψ , получим систему

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{f(v)}{v} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{f(v)}{v} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

где $\varphi = -h$; x, y — декартовы координаты. При $\lambda_0 = 0$ имеем случай нелинейной фильтрации без начального градиента. Однако особый интерес среди задач нелинейной фильтрации представляют те, в которых фильтрация описывается нелинейным законом с начальным градиентом. Поэтому в дальнейшем будем считать $\lambda_0 > 0$.

Решение задач нелинейной фильтрации заключается в интегрировании системы (2) при определенных граничных условиях. Эта система описывает плоскую установившуюся фильтрацию несжимаемой жидкости, не подчиняющуюся закону Дарси. Трудность решения системы (2) состоит в том, что эта система нелинейна (коэффициент $f(v)/v$ зависит от производных искомым функций); граница области интегрирования содержит неизвестные участки (так называемые границы застойных зон, на которых $|\nabla h| = \lambda_0$); уравнения (2) на этих участках вырождаются.

Практический интерес исследования этих задач заключается в том, что учет нелинейности приводит к перераспределению эпюры давления по подземному контуру гидросооружения, к смещению кривой депрессии и изменению участка высачивания при фильтрации в земляной плотине, к образованию застойных зон нефти и т. д.

Путем преобразования видоизмененного годографа скорости нелинейная система (2) переходит в систему линейных уравнений

$$\frac{r'_{\varphi}}{\partial \theta} = \frac{1}{k(s)} \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{k(s)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (3)$$

где θ и s — новые независимые переменные, $k(s)$ — непрерывная функция (см., напр., [1]).

Возвращение на физическую плоскость осуществляется по формуле

$$dz = \frac{e^{j\theta}}{v} \left[\frac{v d\varphi}{f(v)} + i d\psi \right]. \quad (4)$$

При переходе к области годографа первые две трудности, отмеченные выше, исключаются. Вырождение системы будет происходить, но — на известной части границы области годографа.

Решению задач нелинейной фильтрации в случае, когда область годографа скорости однолистка, посвящен ряд работ (см., например, [1—3]). Однако во многих задачах область в плоскости годографа оказывается неоднолистной [4—6]. В работах [5, 6], учитывая инвариантность системы (3) относительно конформного отображения, предлагается переходить в подобных задачах на однолистную каноническую область (например, прямоугольник) и в ней строить решение методом конечных разностей.

Ниже, на основе результатов работ [5, 6], предлагается численный метод решения задач нелинейной фильтрации, учитывающий вырождение уравнений на границах застойных зон. Этот метод иллюстрируется на примере задачи фильтрации под плоским флютбетом с центральным шпунтом в грунте конечной глубины. В работе [6] решение этой задачи сведено к решению следующей краевой задачи.

В прямоугольнике $\bar{\Omega} = \{0 \leq \mu \leq \tilde{\mu}, 0 \leq \nu \leq \tilde{\nu}\}$ (рис. 1) найти функцию $\varphi(\mu, \nu)$, ограниченную и непрерывную вплоть до границы, удовлетворяющую в Ω уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(k(\mu, \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(k(\mu, \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = 0 \quad (5)$$

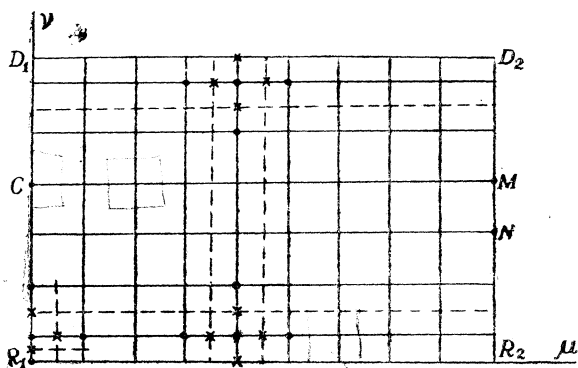


Рис. 1.

и следующим краевым условиям:

$$\varphi|_{MN} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \Big|_{NR_2, MD_1, R_1C} = 0,$$

$$\varphi|_{CD_1} = 0,5, \quad \lim_{\substack{\nu \rightarrow 0 \\ \nu \rightarrow \tilde{\nu}}} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = 0.$$

Коэффициент $k(\mu, \nu)$ — известная ограниченная функция, представляемая вблизи линий вырождения $\nu = 0$ и $\nu = \tilde{\nu}$ в виде $k = \nu^m (\tilde{\nu} - \nu)^m \tilde{f}(\mu, \nu)$, причем $\tilde{f}(\mu, 0) \neq 0$, $\tilde{f}(\mu, \tilde{\nu}) \neq 0$, $1 < m \leq 2$, $0 \leq k \leq 1$ [5, 6].

Разностные схемы второго порядка точности для уравнений эллиптического типа, вообще говоря, известны (см. например, [7, 8]). Однако вырождение уравнения (5) на участках границы области Ω требует проведения дополнительных исследований.

Заменим область Ω непрерывного изменения аргументов сеточной областью $\Omega_\Delta = \{\mu_i = i\Delta_\mu, \nu_j = (j-1/2)\Delta_\nu, i=0, 1, 2, \dots, M, M+1, j=1/2, 1, 2, \dots, N, N+1/2\}$, т. е. такой что $\tilde{\mu} = (M+1)\Delta_\mu$, $\tilde{\nu} = (N-1/2)\Delta_\nu + (1/2)\Delta_\nu = N\Delta_\nu$ (рис. 1). Сеточное значение функции $\varphi(\mu, \nu)$ в узле (i, j) обозначим $u_{i,j}$.

Подсчитав баланс в узлах (i, j) , $(i, 1)$, (i, N) , запишем соответствующие разностные уравнения, учитывая при этом вид $k(\mu, \nu)$ вблизи линий вырождения:

$$\frac{1}{\Delta_\mu} \left[k_{i+1/2, j} \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta_\mu} - k_{i-1/2, j} \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{\Delta_\mu} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_\nu} \left[k_{i, j+1/2} \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{\Delta_\nu} - k_{i, j-1/2} \frac{u_{i, j} - u_{i, j-1}}{\Delta_\nu} \right] = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_\mu} \left[\tilde{f}_{i+1/2, 1} v_1^m (\tilde{v} - v_1)^m \frac{u_{i+1, 1} - u_{i, 1}}{\Delta_\mu} - \tilde{f}_{i-1/2, 1} v_1^m (\tilde{v} - v_1)^m \times \right. \\ & \times \left. \frac{u_{i, 1} - u_{i-1, 1}}{\Delta_\mu} \right] + \frac{1}{\Delta_\nu} \left[\tilde{f}_{i, 3/2} v_{3/2}^m (\tilde{v} - v_{3/2})^m \frac{u_{i, 2} - u_{i, 1}}{\Delta_\nu} \right] = 0, \quad (7) \\ & \frac{1}{\Delta_\mu} \left[\tilde{f}_{i+1/2, N} v_N^m (\tilde{v} - v_N)^m \frac{u_{i+1, N} - u_{i, N}}{\Delta_\mu} - \tilde{f}_{i-1/2, N} v_N^m (\tilde{v} - v_N)^m \times \right. \\ & \times \left. \frac{u_{i, N} - u_{i-1, N}}{\Delta_\mu} \right] + \frac{1}{\Delta_\nu} \left[-\tilde{f}_{i, N-1/2} v_{N-1/2}^m (\tilde{v} - v_{N-1/2})^m \times \right. \\ & \times \left. \frac{u_{i, N} - u_{i, N-1}}{\Delta_\nu} \right] = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Уравнение (6) справедливо при $1 \leq i \leq M$, $2 \leq j \leq N-1$, уравнение (7) — при $1 \leq i \leq M$, $j=1$, а уравнение (8) — при $1 \leq i \leq M$, $j=N$. Каждое из уравнений (6) — (8) можно записать в символическом виде:

$$\Delta_\mu u + \Delta_\nu u = 0. \quad (9)$$

Например, для уравнения (6)

$$\begin{aligned} \Delta_\mu u &= \frac{1}{\Delta_\mu} \left[k_{i+1/2, j} \frac{u_{i+1, j} - u_{i, j}}{\Delta_\mu} - k_{i-1/2, j} \frac{u_{i, j} - u_{i-1, j}}{\Delta_\mu} \right], \\ \Delta_\nu u &= \frac{1}{\Delta_\nu} \left[k_{i, j+1/2} \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j}}{\Delta_\nu} - k_{i, j-1/2} \frac{u_{i, j} - u_{i, j-1}}{\Delta_\nu} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно записать разностные уравнения в узлах $(0, 1)$ и $(0, j) \in R_1 C$ и в узлах $(M+1, 1)$, $(M+1, N)$ и $(M+1, j) \in MD_2, NR_2$. Эти уравнения также могут быть представлены в виде (9).

Итак, (9) — общий вид разностного уравнения, работающего в пределах $0 \leq i \leq M+1$, $1 \leq j \leq N$. В качестве итерационной схемы решения уравнения (9) выберем продольно-поперечную схему для уравнения теплопроводности [7], полагая $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{u^{r+1/2} - u^r}{\tau_{r+1}^{(1)}} = \Delta_\mu u^{r+1/2} + \Delta_\nu u^r, \quad (10)$$

$$\frac{u^{r+1} - u^{r+1/2}}{\tau_{r+1}^{(2)}} = \Delta_\mu u^{r+1/2} + \Delta_\nu u^{r+1}, \quad (11)$$

где τ — итерационный параметр.

Не останавливаясь на прогонке вдоль прямых $\nu = \nu_j$, отметим некоторые особенности прогонки вдоль прямых $\mu = \text{const}$. Перепишем уравнение (11) в виде:

$$A_j u_{i, j-1}^{r+1} - C_j u_{i, j}^{r+1} + B_j u_{i, j+1}^{r+1} = -F_j. \quad (12)$$

Расчет, как обычно, ведется по формуле

$$u_{i,j}^{r+1} = \alpha_{j+1} u_{i,j+1}^{r+1} + \beta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

где

$$\alpha_{j+1} = \frac{B_j}{C_j - \alpha_j A_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{A_j \beta_j + F_j}{C_j - \alpha_j A_j}. \quad (13)$$

Схемы (7), (8) позволяют записать прогоночные коэффициенты при $j=1$ и $j=N$. Так как $A_1=0$ и $B_N=0$, то из формул (13) следует:

$$\alpha_2 = \frac{B_1}{C_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}, \quad \alpha_{N+1} = 0, \quad \beta_{N+1} = \frac{A_N \beta_N + F_N}{C_N - \alpha_N A_N}.$$

Итак, сделанный выбор сетки позволил учесть условия вырождения при построении численного метода.

Для определения значений искомой функции на участках границы $R_1 R_2$, $D_1 D_2$ перейдем к неравномерной сетке, используя результаты предыдущих вычислений. Нерегулярный шаблон, применяемый при построении разностной схемы, показан на рис. 1. Здесь же показана вспомогательная сетка, в узлах которой определяются коэффициенты уравнения.

Изложенным здесь численным методом на ЭВМ М-222 были проведены расчеты при законе фильтрации Н. П. Пузыревского $f=1+\nu$. Коэффициент $k(\mu, \nu)$, входящий в уравнение (5), определялся по формулам [6]:

$$k = \operatorname{th}^3 \frac{s}{2}, \quad s = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \operatorname{arc} \cos \frac{\bar{a} t_*^2 - a}{1 - t_*^2},$$

$$t_* = e^{ia} \frac{\operatorname{sn}(\omega, \lambda) - i \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{sn}(\omega, \lambda) + i \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}, \quad \lambda = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2},$$

$$\alpha = -\frac{i}{4} \ln \frac{1-a^2}{1-\bar{a}^2}, \quad \beta = -\frac{i}{4} \ln \frac{(1-a)(1+\bar{a})}{(1-\bar{a})(1+a)},$$

$a = -\cos 2\chi_0$, $\chi_0 = \theta_0 + is_0$ — точка ветвления области годографа. В примере $\theta_0 = 0,50$, $s_0 = 1,05$, что соответствовало $\mu = 0,5324$, $\nu = 1$. Расчеты проводились для двух различных сеточных областей Ω_Δ : 1) $\Delta_\mu = 0,0532$, $\Delta_\nu = 0,05$; 2) $\Delta_\mu = 0,0266$, $\Delta_\nu = 0,05$. Итерационный параметр $\tau_{r+1}^{(1)} = \tau_{r+1}^{(2)} = 0,5$. Процесс итерации заканчивался при выполнении условия

$$\sqrt{\sum (u^{r+1} - u^r)^2} < 0,0000002.$$

Переход к физической области фильтрации осуществлялся по формуле (4). Результаты расчетов для обоих случаев отличаются незначительно (см. таблицу).

Таблица

Δ_μ	Δ_ν	OR_1	OR_2	R_1C	R_2N	MD_1	T	L
0,0532	0,0500	0,1899	0,1348	0,5018	0,1400	0,4273	0,3660	0,7507
0,0266	0,0500	0,1878	0,1514	0,4810	0,1606	0,4192	0,3645	0,7520

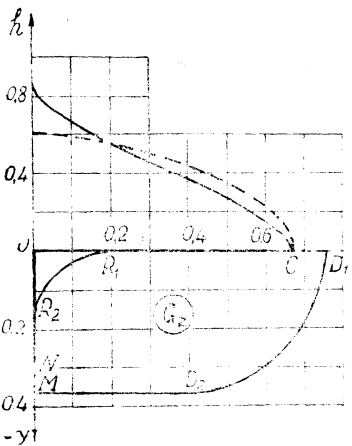


Рис. 2.

Физическая область течения и эпюра напоров по подземному контуру (случай 2) приведены на рис. 2. На этом же рисунке для сравнения штриховой линией показана эпюра напоров по плоскому флюэтбету при линейном законе Дарси. Число итераций $n=97$, машинное время составляет 18 мин., если за начальное приближение выбрано $u=-0,5$ при $(i, j) \in (\bar{Q}-\gamma_{MN})$, $u=0,5$ при $(i, j) \in \gamma_{MN}$. Когда за начальное приближение брались решение уравнения (5) при $k=1$, число итераций получалось $n=80$, машинное время — 16 мин.

В заключение благодарим И. В. Фрязинова за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

- Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г. Применение метода Бергмана — Назарова к решению уравнений нелинейной теории фильтрации.— Вычислительная и прикладная математика, вып. 17. Киев, Изд-во Киевского ун-та, 1972, с. 3—18.
- Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Некоторые точные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1970, № 2, с. 168—172.
- Мифтахутдинов Б. А., Молокович Ю. М., Скворцов Э. В. Некоторые вопросы плоской стационарной нелинейной фильтрации.— Сб. Проблемы гидродинамики и рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань, Изд-во КГУ, 1971, с. 51—70.
- Ентов В. М. Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднозначности отображения.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1972, № 1, с. 45—59.

5. Ильинский Н. Б., Шешуков Е. Г. Задача нелинейной фильтрации с неоднородной областью годографа скорости.— Изв. вузов. Математика, 1972, № 10, с. 34—40.

6. Ильинский Н. Б., Шешуков Е. Г. О краевых задачах нелинейной теории фильтрации.— Вычислительная и прикладная математика, вып. 19. Киев, Изд-во Киевского ун-та, 1973, с. 22—31.

7. Фрязинов И. В. О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат.— Журнал вычислительной математики и математической физики, 11, 1971, № 5, с. 1219—1228.

8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.

Доложено на семинаре 18 мая 1973 г