Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. S. Buldyrev, N. S. Grigor'ev, Two-scales expansions of quasinormal waves in irregular refractive wave guides. Conditions of their applicability for high frequencies, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 117, 78–97

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.168
December 14, 2024, 19:48:38

В.С.Булдырев, Н.С.Григорьева

ДВУХМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕФРАКЦИОННЫХ ВОЛНОВОДАХ И ОЦЕНКА ИХ ПРИМЕНИМОСТИ НА ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

В работе изучается волноводное распространение волн в неоднородном полупространстве, показатель преломления которого медленно зависит от горизонтальных координат и имеет один максимум на границе полупространства (поверхностный волновод) или внутри него (глубинный волновод). Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [I], в которой рассматривался только случай одной горизонтальной координаты и глубинный волновод. Цитированная в [I] литература полностью относится и к настоящей работе, мы добавляем к ней лишь одну ссылку на недавно вышедший сборник [2] .

§ I. Двухмасштабные разложения квазинормальных волн при двух горизонтальных координатах

Пусть $x_1, x_2 \left(-\infty < x_1, x_2 < +\infty\right)$ - безразмерные горизонтальные, z $(0 \leqslant z < \infty)$ - безразмерная вертикальная координата и $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр. Введем горизонтальные медленные переменные

$$\xi_1 = \varepsilon x_1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = \varepsilon x_2 .$$

Будем предполагать, что показатель преломления n полупространства зависит от z, ξ_1, ξ_2 , принимает значения близкие к единице $n \approx 1$ и имеет некоторое число непрерывных производных, удовлетворяющих соотношению:

$$\left| \frac{\partial^{m_1+m_2+m_3} n(z, \xi_1, \xi_2)}{\partial^{m_1} z \, \partial^{m_2} \xi_1 \, \partial^{m_3} \xi_2} \right| \approx 1 . \qquad (I.I)$$

Выполнение соотношения (I.I) при $m_1 = 1, m_2 = m_3 = 0$ достигается выбором масштаба при введении безразмерных переменных z, x_1 и x_2, выполнение соотношения (I.I) при $m_2 = 1$, $m_1 = m_3 = 0$ и $m_3 = 1$, $m_1 = m_2 = 0$ означает медленную зависимость показателя преломления от переменных x_1 и x_2 .

В статье рассматриваются два характерных случая зависимости показателя $n(z,\xi_1,\xi_2)$ от z : при любых фиксированных ξ_1 и ξ_2 функция $n(z,\xi_1,\xi_2)$

I) монотонно убывает с ростом z (приповерхностный волновод)
2) имеет один максимум при $z = z_0(\xi_1,\xi_2) > 0$ (глубинный волновод).

В обоих случаях предполагается, что при $z \to \infty$ функция $n(z,\xi_1,\xi_2)$ стремится к конечному пределу $n_0(\xi_1,\xi_2)$, причем

$$0 < n(z,\xi_1,\xi_2) - n_0(\xi_1,\xi_2) < \text{const}\ z^{-a},\ a>0.$$

В первом случае возможно распространение волн шепчущей галереи, во втором случае-распространение внутренних волноводных волн.

Волноводное распространение гармонических звуковых волн в полупространстве $z \geqslant 0$ с показателем преломления $n(z,\varepsilon x_1,\varepsilon x_2)$ и свободной границей $z=0$ описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + p^2 n^2(z,\varepsilon x_1,\varepsilon x_2)u = 0 \qquad (I.2)$$

при условиях

$$u\Big|_{z=0} = 0, \quad \lim_{z\to\infty} u(z) = 0. \qquad (I.3)$$

В уравнении (I.2) p - безразмерная частота (с циклической частотой ω безразмерная частота p связана соотношением $p=\omega(\max|\nabla C|)^{-1}$, где ∇C - размерный градиент скорости распространения волн в полупространстве). В задачах подводного распространения звука безразмерная частота p - обычно большой параметр. Ориентировочно его величина оценивается соотношением $p = 200\nu$, в котором ν - частота в герцах.

Если $\varepsilon = 0$, уравнение (I.2) допускает набор решений,называемых нормальными волнами:

$$u_m = \exp\{i\mu_m p(\vec{k}\vec{r})\}\, \varphi_m(z),\ m=1,2,\ldots \qquad (I.4)$$

где $\vec{k}=(k_1,k_2)$ - единичный вектор, $\vec{r}$ - радиус-вектор в плоскости x_1, x_2, $\varphi_m(z)$ и μ_m^2 - собственные функции и собственные значения следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d^2\varphi_m(z)}{dz^2}+p^2(n^2-\mu_m^2)\varphi_m(z)=0,$$

$$\varphi_m(0)=0, \quad \lim_{z\to\infty}\varphi_m(z)=0.$$

При $\varepsilon\neq 0$ уравнение (I.2) в переменных z, ξ_1, ξ_2 имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}\right)+p^2n^2(z,\xi_1,\xi_2)u=0. \tag{I.5}$$

При малых ε члены, содержащие производные по ξ_1 и ξ_2, являются поправочными, поэтому будем искать решения уравнения (I.5) в виде разложения по степеням ε

$$u_m=\exp\left(ip\frac{\tau_m}{\varepsilon}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_{m,j}(z,\tau_m,\alpha_m)\varepsilon^j,$$

$$\varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m)\neq 0, \quad m=1,2,\ldots, \tag{I.6}$$

где $\tau_m=\tau_m(\xi_1,\xi_2)$ и $\alpha_m=\alpha_m(\xi_1,\xi_2)$ - криволинейные ортогональные координаты в плоскости ξ_1,ξ_2, подлежащие определению, и $\varphi_{m,j}(z,\tau_m,\alpha_m)$ - искомые функции. Ряды (I.6) являются естественным обобщением решений (I.4) на случай показателя преломления, медленно зависящего от горизонтальных координат. Принято говорить, что ряды (I.6) представляют решения уравнения (I.2) в адиабатическом приближении. Мы будем ряды (I.6) называть квазинормальными волнами.

Пусть в координатах (τ_m,α_m) квадрат элемента длины дуги выражается формулой

$$(ds)^2=g_{11}(d\tau_m)^2+g_{22}(d\alpha_m)^2,$$

тогда

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau_m} \left(\sqrt{g}\, g^{11} \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left(\sqrt{g}\, g^{22} \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \right) \right\}, \qquad (I.7)$$

где $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22}} = \dfrac{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2)}{\mathcal{D}(\tau_m, \alpha_m)}$ и $g^{11} = (g_{11})^{-1}$, $g^{22} = (g_{22})^{-1}$ – элементы матрицы, обратной к матрице $\|g_{ik}\|_2$. Функции $\tau_m(\xi_1, \xi_2)$ и $\alpha_m(\xi_1, \xi_2)$ связаны с элементами g^{11} и g^{22} соотношениями $(\nabla \tau_m)^2 = g^{11}$ и $(\nabla \alpha_m)^2 = g^{22}$.

Подставляя разложение (I.6) в уравнение (I.5), принимая во внимание равенство (I.7) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений относительно функций $\varphi_{m,j}$:

$$\frac{d^2 \varphi_{m,j}}{dz^2} + p^2 \left[n^2(z, \xi_1, \xi_2) - g^{11} \right] \varphi_{m,j} = -ip\, \mathcal{F}_{m,j}(z, \tau_m, \alpha_m), \qquad (I.8)$$

где

$$\mathcal{F}_{m,j}(z, \tau_m, \alpha_m) = 2 g^{11} \frac{\partial \varphi_{m,j-1}}{\partial \tau_m} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau_m} \left(g^{11} \sqrt{g} \right) \varphi_{m,j-1} +$$

$$+ \frac{1}{ip} \Delta \varphi_{m,j-2}\,; \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем $\varphi_{m,-2} = \varphi_{m,-1} \equiv 0$ и, следовательно, $\mathcal{F}_{m,0}(z, \tau_m, \alpha_m) \equiv 0$. Подстановка разложения (I.6) в краевые условия (I.3) приводит к равенствам

$$\varphi_{m,j}(0, \tau_m, \alpha_m) = 0, \quad \lim_{z \to \infty} \varphi_{m,j}(z, \tau_m, \alpha_m) = 0, \qquad (I.9)$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, для $\varphi_{m,0}$ получаем зависящую от параметров ξ_1 и ξ_2 однородную задачу Штурма-Лиувиля:

$$\frac{d^2 \varphi_{m,0}}{dz^2} + p^2 \left[n^2(z, \xi_1, \xi_2) - g^{11} \right] \varphi_{m,0} = 0, \qquad (I.10)$$

$$\varphi_{m,0} \Big|_{z=0} = 0, \quad \lim_{z \to \infty} \varphi_{m,0} = 0, \qquad (I.11)$$

которая имеет отличные от нуля решения лишь при условии, что g^{11} является ее собственным значением $\mu_m^2(\xi_1, \xi_2)$, $m=1,2,\ldots$.Будем считать собственные значения $\mu_m^2(\xi_1,\xi_2)$ известными. Тогда для функций $\tau_m(\xi_1,\xi_2)$ имеем уравнения эйконала $(\nabla\tau_m)^2=\mu_m^2(\xi_1,\xi_2)$, решения которых могут быть записаны в виде

$$\tau_m=\int_{M_0}^{M}\mu_m(\xi_1',\xi_2')\,ds, \tag{I.12}$$

где интеграл вычисляется вдоль экстремали, соединяющей точки M_0 и M . Экстремали интеграла (I.12) - горизонтальные лучи - и ортогональные им линии $\tau_m=\mathrm{const}$ - горизонтальные волновые фронты - образуют сетку криволинейных ортогональных координат (τ_m, α_m). Значение α_m задает луч, значение τ_m - точку на луче. Коэффициент g^{22} , характеризующий изменение координаты $\alpha_m = =\alpha_m(\xi_1,\xi_2)$ вдоль волновых фронтов, может задаваться произвольно. В дальнейшем будем считать, что $\dfrac{\mathcal{D}(\xi_1,\xi_2)}{\mathcal{D}(\tau_m,\alpha_m)}\neq 0$.

Итак, функции $\varphi_{m,0}(z,\xi_1,\xi_2)$ или $\varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m), m=1,2,\ldots,$ - собственные функции однородной задачи Штурма-Лиувилля (I.10), (I.11), отвечающие собственным значениям $\mu_m^2(\xi_1,\xi_2)$. Очевидно,

$$n_0^2(\xi_1,\xi_2)<\mu_m^2(\xi_1,\xi_2)<\max_{0\leq z<\infty} n^2(z,\xi_1,\xi_2).$$

Функции $\varphi_{m,j}(z,\tau_m,\alpha_m)$, $m=1,2,\ldots, j\geq 1$ являются решениями неоднородных задач Штурма-Лиувилля (I.8), (I.9). Обозначим через $f(z;\tau_m,\alpha_m,\mu^2)$ и $\tilde f(z;\tau_m,\alpha_m,\mu^2)$ два линейно-независимых решения уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+p^2\left[n^2(z,\tau_m,\alpha_m)-\mu^2\right]\varphi=0, \tag{I.13}$$

первое из которых удовлетворяет условию $\lim\limits_{z\to\infty} f(z;\tau_m,\alpha_m,\mu^2)=0$.

Тогда собственные значения $\mu_m^2(\xi_1,\xi_2)$ или $\mu_m^2(\tau_m,\alpha_m)$ суть корни уравнения $f(0;\tau_m,\alpha_m,\mu^2)=0$. Функции $\varphi_{m,j}(z,\tau_m,\alpha_m)$, $j\geq 0$ будем искать в виде

$$\vartheta_{m,0}=A_{m,0}(\tau_m,\alpha_m)f(z;\tau_m,\alpha_m,\mu_m^2),$$

$$\vartheta_{m,j}=A_{m,j}(\tau_m,\alpha_m)\vartheta_{m,0}+\eta_{m,j}(z;\tau_m,\alpha_m),\ j\geq 1,$$

где $\eta_{m,j}(z;\tau_m,\alpha_m)$- частное решение неоднородной задачи Штурма-Лиувилля (I.8),(I.9), например

$$\eta_{m,j}(z;\tau_m,\alpha_m)=\frac{ip}{W}\int_0^z \mathcal{F}_{m,j}(z')\left[f(z)\tilde{f}(z')-\right.$$
$$\left.-f(z')\tilde{f}(z)\right]dz', \tag{I.14}$$

$W=f\dfrac{d\tilde{f}}{dz}-\tilde{f}\dfrac{df}{dz}$ - определитель Вронского. Коэффициенты $A_{m,s}(\tau_m,\alpha_m),\ s\geq 0$ находятся из условий разрешимости неоднородной задачи Штурма-Лиувилля (I.8),(I.9) при $j=s+1$ и оказываются равными

$$A_{m,0}(\tau_m,\alpha_m)=B_{m,0}(\alpha_m)\left[\mu_m(\tau_m,\alpha_m)J_m(\tau_m,\alpha_m)\times\right. \tag{I.15}$$
$$\left.\times\int_0^\infty f^2(z;\tau_m,\alpha_m,\mu_m^2)dz\right]^{-1/2},$$

$$A_{m,j}(\tau_m,\alpha_m)=-\frac{1}{2B_{m,0}^2}\int_0^{\tau_m}d\tau_m'\int_0^\infty\left[2\sqrt{\mu_m J_m}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\tau_m'}\left(\sqrt{\mu_m J_m}\,\eta_{m,j}\right)+\frac{J_m}{i\mu_m p}\Delta\vartheta_{m,j-1}\right]\vartheta_{m,0}dz+B_{m,j}(\alpha_m), \tag{I.16}$$
$$j\geq 1,$$

где $J_m(\tau_m,\alpha_m)=\mu_m(\tau_m,\alpha_m)\left|\dfrac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(\tau_m,\alpha_m)}\right|$- геометрическая расходимость поля горизонтальных лучей и $B_{m,j}(\alpha_m),\ j\geq 0$ - произвольные функции α_m. Очевидно, без ущерба общности, функции $B_{m,j}(\alpha_m),\ j\geq 1$ можно считать равными нулю.

Заметим, что формула (I.14) при $j=1$ с помощью равенства (I.15) может быть преобразована к виду

$$\eta_{m,1}=\frac{ip}{W}\mu_m^2 A_{m,0}\int_0^z\left[2\frac{\partial f(z')}{\partial\tau_m}-\gamma f(z')\right]\left[f(z)\tilde{f}(z')-\right.$$
$$\left.-f(z')\tilde{f}(z)\right]dz', \tag{I.17}$$

где $\gamma = \left(\int_0^\infty f^2 dz\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau_m} \left(\int_0^\infty f^2 dz\right)$. Формула же для $A_{m,j}$ посредством перестановки порядков интегрирования, интегрирования по частям и равенства (I.I5) может быть переписана в виде

$$A_{m,j}(\tau_m, \alpha_m) = \frac{1}{2B^2_{m,0}} \int_0^{\tau_m} \left\{ \mu_m \gamma_m A_{m,0} \int_0^\infty \left[\left(2\frac{\partial f}{\partial \tau'_m} - \gamma f\right)\eta_{m,j} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{ip\mu_m^2} f \Delta \varphi_{m,j-1}\right] dz \right\} d\tau'_m -$$

$$- \left[\frac{\mu_m \gamma_m A_{m,0}}{B^2_{m,0}} \int_0^\infty \eta_{m,j} f dz\right]\Bigg|_{\tau'_m = 0}^{\tau'_m = \tau_m} . \qquad (I.I8)$$

§ 2. Оценка применимости двухмасштабного разложения (I.6) для приповерхностного волновода

Получим оценку второго члена разложения (I.6)

$$\varphi_{m,1}(z, \tau_m, \alpha_m) = A_{m,1}(\tau_m, \alpha_m)\varphi_{m,0}(z, \tau_m, \alpha_m) + \qquad (2.I)$$
$$+ \eta_{m,1}(z, \tau_m, \alpha_m)$$

при $p \to \infty$ и произвольных значениях $1 \leq m \leq const \cdot p$ для приповерхностного волновода.

Асимптотика двух линейно-независимых решений $f(z; \tau_m, \alpha_m, \mu^2)$ и $\tilde{f}(z; \tau_m, \alpha_m, \mu^2)$ уравнения (I.I3) в случае приповерхностного волновода имеет вид (зависимость от параметров τ_m, α_m, μ^2 мы не выписываем):

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\theta'(z)}} \left\{ v\left(p^{2/3}\theta(z)\right) + O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right) v'\left(p^{2/3}\theta(z)\right)\right\},$$
$$\qquad (2.2)$$
$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{\theta'(z)}} \left\{ u\left(p^{2/3}\theta(z)\right) + O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right) u'\left(p^{2/3}\theta(z)\right)\right\},$$

где

$$\theta(z)=\theta(z;\tau_m,\alpha_m)=\begin{cases} -\left[\frac{3}{2}\int\limits_{z}^{\xi^*}\sqrt{n^2(\xi)-\mu^2}\,d\xi\right]^{2/3}, & z<\xi^* \\ \left[\frac{3}{2}\int\limits_{\xi^*}^{z}\sqrt{\mu^2-n^2(\xi)}\,d\xi\right]^{2/3}, & z>\xi^* \end{cases} \tag{2.3}$$

и ξ^* – корень уравнения $n^2(\xi)-\mu^2=0$ – точка поворота дифференциального уравнения (I.13). С помощью формул (2.2) находим асимптотику определителя Вронского:

$$W[f,\tilde{f}]=p^{2/3}\left\{1+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right)\right\}. \tag{2.4}$$

Обозначим корни функции Эйри $v(t)$ через $-\left(\frac{3}{2}\beta_m\right)^{2/3}$, $m=1,2,\ldots$ (асимптотика чисел β_m при $m\to\infty$ имеет вид $\beta_m=$ $=\pi(m-1/4)\left\{1+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}$). Собственные значения μ_m^2 в первом приближении, очевидно, определяются из уравнения

$$p\int\limits_0^{\xi^*}\sqrt{n^2(\xi)-\mu_m^2}\,d\xi=\beta_m,\quad m=1,2,\ldots. \tag{2.5}$$

Подставим асимптотики (2.2) и (2.4) в формулу (I. 14) для частного решения $\eta_{m,1}(z)$. С точностью до поправочных членов порядка $p^{-4/3}$ получим для $\eta_{m,1}(z)$ интеграл, содержащий функции Эйри и их производные:

$$\eta_{m,1}(z)=i\mu_m^2A_{m,0}\frac{p^{1/3}}{\sqrt{\theta'(z)}}\int\limits_0^z\left\{2\frac{\partial}{\partial\tau_m}\left[\frac{v(p^{2/3}\theta(\xi))}{\sqrt{\theta'(\xi)}}\right]-\right.$$
$$\left.-\gamma\frac{v(p^{2/3}\theta(\xi))}{\sqrt{\theta'(\xi)}}\right\}\left\{v(p^{2/3}\theta(z))u(p^{2/3}\theta(\xi))-\right. \tag{2.6}$$
$$\left.-u(p^{2/3}\theta(z))v(p^{2/3}\theta(\xi))\right\}\frac{d\xi}{\sqrt{\theta'(\xi)}},$$

где

$$\gamma=\left[\int_0^\infty \frac{\vartheta^2(p^{2/3}\theta(\ell))}{\theta'(\ell)}\,d\ell\right]^{-1}\cdot\frac{d}{d\tau_m}\left[\int_0^\infty \frac{\vartheta^2(p^{2/3}\theta(\ell))}{\theta'(\ell)}\,d\ell\right].$$

В интеграле (2.6) выполним замену переменной

$$\theta(\ell)=\theta(\ell;\tau_m,\alpha_m)=\beta_m^{2/3}p^{-2/3}\vartheta,\quad \ell=\theta^{-1}(\beta_m^{2/3}p^{-2/3}\vartheta;\tau_m,\alpha_m). \quad (2.7)$$

В переменной ϑ волноводный слой, вне которого поле квазинормальной волны номера m экспоненциально затухает, при любом m заключен в пределах

$$-1\leqslant\vartheta\leqslant 0$$

и, следовательно, имеет постоянную толщину, равную единице. Введем функции

$$\Psi(\vartheta)\equiv\Psi(\vartheta;\tau_m,\alpha_m)=\theta'(\ell;\tau_m,\alpha_m)\Big|_{\ell=\theta^{-1}(\beta_m^{2/3}p^{-2/3}\vartheta;\tau_m,\alpha_m)},$$

$$\sigma(\vartheta)\equiv\sigma(\vartheta;\tau_m,\alpha_m)=\beta_m^{-2/3}p^{2/3}\frac{\partial\theta(\ell;\tau_m,\alpha_m)}{\partial\tau_m}\Big|_{\ell=\theta^{-1}(\beta_m^{2/3}p^{-2/3}\vartheta;\tau_m,\alpha_m)}.$$

Установим поведение функций $\Psi'(\vartheta)$ и $\frac{\partial\Psi(\vartheta)}{\partial\tau_m}$ при ограниченных ϑ и малых значениях $\beta_m^{2/3}p^{-2/3}$. Если показатель преломления $n(\ell)$ дважды дифференцируемая функция, то

$$\theta(\ell)=(\ell-\ell^*)\left[C_1(\tau_m,\alpha_m)+O(\ell-\ell^*)\right], \quad (2.8)$$

где $C_1(\tau_m,\alpha_m)=\left[-2n(\ell^*)n'(\ell^*)\right]^{1/3}$. Для приповерхностного волновода $n'(\ell^*)<0$ и коэффициент C_1 - отличная от нуля положительная величина. (Для глубинного волновода соотношение

(2.8) может быть написано для каждой из точек поворота ℓ_1 и ℓ_2, однако $C_1(\ell_i)\to 0$ при $\ell_2-\ell_1\to 0$). Из (2.8) следует, что

$$\ell=\theta^{-1}(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}\vartheta;\tau_m,\alpha_m)=\ell^*+C_1^{-1}(\tau_m,\alpha_m)\,\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}\vartheta+$$
$$+O(\beta_m^{4/3}\rho^{-4/3}\vartheta^2),$$

$$\Psi(\vartheta)=C_1+O(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}\vartheta)$$

и

$$\Psi'(\vartheta)=O(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}),\quad \frac{\partial\Psi(\vartheta)}{\partial\tau_m}=\frac{\partial C_1}{\partial\tau_m}+O(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}\vartheta). \qquad (2.9)$$

Таким образом, функция $\Psi(\vartheta)$ отграничена от нуля при любых $\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}$, если отграничена от нуля C_1, и принимает конечные значения при ограниченных ϑ.

Дифференцируя по τ_m равенство $\vartheta=\beta_m^{-2/3}\rho^{2/3}\theta(\ell;\tau_m,\alpha_m)$, получаем $\beta_m^{-2/3}\rho^{2/3}\Psi(\vartheta)\dfrac{\partial\theta^{-1}}{\partial\tau_m}+\sigma(\vartheta)=0$, откуда

$$\sigma(\vartheta)=-\Psi(\vartheta)\Big[\beta_m^{-2/3}\rho^{2/3}\frac{\partial\ell^*}{\partial\tau_m}-\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial C_1}{\partial\tau_m}\vartheta+$$
$$+O(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}\vartheta^2)\Big].$$

Так как $\vartheta=-1$ при $\ell=0$, то

$$\beta_m^{-2/3}\rho^{2/3}\ell^*=C_1^{-1}+O(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3})$$

и, следовательно

$$\beta_m^{-2/3}\rho^{2/3}\frac{\partial\ell^*}{\partial\tau_m}=-\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial C_1}{\partial\tau_m}+O(\beta_m^{2/3}\rho^{-2/3}).$$

Таким образом

$$\sigma(\vartheta)=\Psi(\vartheta)C_1^{-2}\frac{\partial C_1}{\partial \tau_m}(1+\vartheta)+O(\beta_m^{2/3}p^{-2/3},\ \beta_m^{2/3}p^{-2/3}\vartheta^2), \tag{2.10}$$

и функция $\sigma(\vartheta)$ принимает конечные значения при любых $\beta_m^{2/3}p^{-2/3}$ и ограниченных ϑ. После перехода в интеграле (2.6) к переменной ϑ получаем

$$\begin{gathered}\eta_{m,1}(z)=i\mu_m^2 A_{m,0}\frac{\beta_m^{2/3}p^{-1/3}}{\sqrt{\theta'(z)}}\int_{-1}^{\vartheta(z)}\Big\{2\beta_m^{2/3}\sigma(\vartheta)v'(\beta_m^{2/3}\vartheta)-\\ -\Big[\frac{1}{\Psi(\vartheta)}\frac{\partial\Psi(\vartheta)}{\partial\tau_m}+\gamma\Big]v(\beta_m^{2/3}\vartheta)\Big\}\Big\{v(p^{2/3}\theta(z))u(\beta_m^{2/3}\vartheta)-\\ -u(p^{2/3}\theta(z))v(\beta_m^{2/3}\vartheta)\Big\}\frac{d\vartheta}{\Psi^2(\vartheta)},\\ \gamma=\Big[\int_{-1}^{\infty}v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)\frac{d\vartheta}{\Psi^2(\vartheta)}\Big]^{-1}\Big[-2\int_{-1}^{\infty}v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)\frac{1}{\Psi^3(\vartheta)}\times\\ \times\frac{\partial\Psi(\vartheta)}{\partial\tau_m}d\vartheta\Big],\quad \vartheta(z)=\beta_m^{-2/3}p^{2/3}\theta(z).\end{gathered} \tag{2.11}$$

Найдем асимптотику функции $\eta_{m,1}(z)$ при $\beta_m^{2/3}\to\infty$. Интеграл в равенстве (2.11) сводится к четырем интегралам вида

$$I_1(\vartheta)=\int_{-1}^{\vartheta}v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)q_1(\vartheta)d\vartheta,\quad I_2(\vartheta)=\int_{-1}^{\vartheta}v'(\beta_m^{2/3}\vartheta)u(\beta_m^{2/3}\vartheta)q_2(\vartheta)d\vartheta,$$

$$I_3(\vartheta)=\int_{-1}^{\vartheta}v(\beta_m^{2/3}\vartheta)u(\beta_m^{2/3}\vartheta)q_3(\vartheta)d\vartheta,\ I_4(\vartheta)=\int_{-1}^{\vartheta}v'(\beta_m^{2/3}\vartheta)v(\beta_m^{2/3}\vartheta)q_4(\vartheta)d\vartheta,$$

где $q_i(\vartheta)$; $i=1,2,3,4$ – известные достаточно гладкие функции. Асимптотика интегралов $I_i(\vartheta)$, $i=1,2,3$ при $\beta_m^{2/3}\to\infty$

строится интегрированием по частям после предварительного выделения главной при $\beta_m^{2/3} \to \infty$ части подынтегральной функции(см. [I]). Выпишем соответствующие формулы

$$I_1(\vartheta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\beta_m^{1/3}} \displaystyle\int_{-1}^{\vartheta} (-\vartheta)^{-1/2} g_1(\vartheta)\,d\vartheta + O(\beta_m^{-2/3}), & -1<\vartheta<0 \\ \dfrac{1}{2\beta_m^{1/3}} \displaystyle\int_{-1}^{0} (-\vartheta)^{-1/2} g_1(\vartheta)\,d\vartheta + O(\beta_m^{-2/3}), & \vartheta \geqslant 0 \end{cases}, \tag{2.I2}$$

$$I_2(\vartheta) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{\vartheta} g_2(\vartheta)\,d\vartheta + O(\beta_m^{-2/3}), \quad \vartheta \geqslant -1, \tag{2.I3}$$

$$I_3(\vartheta)=\begin{cases} O(\beta_m^{-2/3}), & -1\leqslant\vartheta\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\beta_m^{1/3}} \displaystyle\int_{0}^{\vartheta} (-\vartheta)^{-1/2} g_3(\vartheta)\,d\vartheta + O(\beta_m^{-2/3}), & \vartheta > 0 \end{cases}. \tag{2.I4}$$

Интеграл $I_4(\vartheta)$ интегрированием по частям сводится к интегралу $I_1(\vartheta)$:

$$I_4(\vartheta) = \frac{1}{2\beta_m^{2/3}}\left[g_4(\vartheta)\, v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta) - \int_{-1}^{\vartheta} \frac{dg_4(\vartheta)}{d\vartheta}\, v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)\,d\vartheta \right] \tag{2.I5}$$

и, следовательно,

$$I_4(\vartheta) = \frac{1}{2\beta_m^{2/3}}\left[g_4(\vartheta)\, v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta) - \frac{1}{2\beta_m^{1/3}} \int_{-1}^{h(-\vartheta)\vartheta} (-\vartheta)^{-1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{dg_4(\vartheta)}{d\vartheta}\,d\vartheta + O(\beta_m^{-2/3}) \right], \tag{2.I6}$$

где $h(\vartheta) = \begin{cases} 1, & \vartheta > 0 \\ 0, & \vartheta \leqslant 0 \end{cases}$.

На основании формул (2.9),(2.10) и (2.12)-(2.16) заключаем, что величина γ остается ограниченной и наибольший вклад в значение $\eta_{m,1}(z)$ вносит слагаемое подынтегральной функции, содержащее произведение $v'u$. Таким образом,

$$\eta_{m,1}(z) = -\frac{i\mu_m^2 A_{m,0}}{\sqrt{\theta'(z)}}\beta_m^{4/3}p^{-1/3}\left\{\left[\int_{-1}^{\vartheta(z)}\frac{\sigma(\vartheta)}{\psi^2(\vartheta)}d\vartheta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + O(\beta_m^{-2/3})\right]v(p^{2/3}\theta(z)) + O(\beta_m^{-1})u(p^{2/3}\theta(z))\right\}. \qquad (2.17)$$

Формулой (2.17) можно пользоваться только при $\theta(z)\leqslant 0$, так как при $\theta(z)>0$ функция $u(p^{2/3}\theta(z))$ экспоненциально велика по сравнению с функцией $v(p^{2/3}\theta(z))$. Вычисление функции $\eta_{m,1}(z)$ при $\theta(z)>0$ следует проводить на основе формулы (см. [1])

$$\eta_{m,1}(z) = \frac{ip}{W}\left\{f(z)\int_0^z \mathcal{F}_{m,1}(\varepsilon)\tilde{f}(\varepsilon)d\varepsilon + \tilde{f}(z)\int_z^\infty \mathcal{F}_{m,1}(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon\right\}.$$

После замены функций $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$ их асимптотиками (2.2) и замены переменной (2.7) снова получим четыре интеграла, содержащих произведения $v'u$, vu, $v'v$ и v^2, с тем лишь отличием, что теперь интегралы

$$\tilde{I}_1(\vartheta) = \int_\vartheta^\infty v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)q_1(\vartheta)d\vartheta,$$

$$\tilde{I}_4(\vartheta) = \int_\vartheta^\infty v'(\beta_m^{2/3}\vartheta)v(\beta_m^{2/3}\vartheta)q_4(\vartheta)d\vartheta$$

распространены по бесконечному промежутку интегрирования. Асимптотика интеграла $\tilde{I}_1(\vartheta)$ при $\beta_m^{2/3}\to\infty$, $\vartheta>0$ строится по-прежнему интегрированием по частям и имеет вид

$$\tilde{I}_1(\vartheta) = \frac{1}{\beta_m^{2/3}}q_1(\vartheta)\int_{\beta_m^{2/3}\vartheta}^\infty v^2(x)dx\left\{1+O(\beta_m^{-2/3})\right\} = \qquad (2.18)$$

$$= \frac{q_1(\vartheta)}{2\beta_m\vartheta^{1/2}}v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)\left\{1+O(\beta_m^{-2/3})+O(\beta_m^{-1}\vartheta^{-3/2})\right\}.$$

Асимптотика интеграла $\tilde{I}_4(\vartheta)$ вытекает из формул (2.I5) и (2.I8):

$$\tilde{I}_4(\vartheta)=-\frac{g_4(\vartheta)}{2\beta_m^{2/3}}v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)+O(\beta_m^{-4/3}),\ \beta_m^{2/3}\to\infty,\ \vartheta>0.$$

Так как $v(\beta_m^{2/3}\vartheta)u(\beta_m^{2/3}\vartheta)\sim\frac{1}{2\beta_m^{1/3}\vartheta^{1/2}}$, $\beta_m^{2/3}\vartheta\to\infty$, то наибольший вклад в значение $\eta_{m,1}(z)$ опять вносит интеграл I_2, и, следовательно, при $\theta(z)>0$

$$\eta_{m,1}(z)=-\frac{i\mu_m^2 A_{m,0}}{\sqrt{\theta'(z)}}\beta_m^{4/3}p^{-1/3}\left[\int_{-1}^{\vartheta(z)}\frac{\sigma(\vartheta)}{\Psi^2(\vartheta)}d\vartheta+O(\beta_m^{-2/3})\right]v(p^{2/3}\theta(z)). \tag{2.19}$$

Объединяя формулы (2.I7), (2.I9), для функции $\eta_{m,1}(z)$ приходим к оценке

$$\eta_{m,1}(z)=O(\beta_m^{4/3}p^{-1/3})\begin{cases}\varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m)+O(\beta_m^{-1}),\ \theta(z)\le 0\\[2ex] \varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m)\qquad\qquad\quad,\ \theta(z)>0\end{cases}. \tag{2.20}$$

При ограниченных значениях β_m из (2.20) следует, что $\eta_{m,1}(z)=$ $=O(p^{-1/3})$.

Перейдем к оценке в равенстве (2.I) коэффициента $A_{m,1}$, определяемого формулой (I.I8) при $j=1$, и прежде всего рассмотрим интеграл $\int_0^\infty\left(2\frac{\partial f}{\partial\tau_m}-\gamma f\right)\eta_{m,1}dz$. Заменим в этом интеграле функции f и $\eta_{m,1}$ их асимптотическими представлениями (2.2) и (2.I7), (2.I9) и выполним замену переменной (2.7). Тогда с точностью до членов порядка $p^{-4/3}$, получим

$$\int_0^\infty\left(2\frac{\partial f}{\partial\tau_m}-\gamma f\right)\eta_{m,1}dz=-i\mu_m^2A_{m,0}\beta_m^2p^{-1}\left\{\beta_m^{2/3}I_4(\infty)-I_1(\infty)\right\},$$

причем интегралы $I_4(\infty)$ и $I_1(\infty)$ вычисляются от новых функций $g_4(\vartheta)$ и $g_1(\vartheta)$. Так как $v^2(\beta_m^{2/3}\vartheta)\to 0$ при $\vartheta\to\infty$, то в силу равенств (2.I2), (2.I6) имеем

$$\int_0^\infty \left(2\frac{\partial f}{\partial \tau'_m} - \gamma f\right)\eta_{m,1}dz = -\frac{1}{2}i\mu_m^2 A_{m,0}\beta_m^{5/3}p^{-1}\times$$

$$\times\left\{\int_{-1}^{0}(-\vartheta)^{-1/2}\left[\frac{1}{2}\frac{dq_4(\vartheta)}{d\vartheta} - q_1(\vartheta)\right]d\vartheta + O\left(\beta_m^{-1/3}\right)\right\}. \quad (2.2I)$$

Аналогично находится асимптотика интеграла $\int_0^\infty \eta_{m,1} f dz\Big|_{\tau'_m=0}^{\tau'_m=\tau_m}$, причем очевидно, что

$$\int_0^\infty \eta_{m,1} f dz\Big|_{\tau'_m=0}^{\tau'_m=\tau_m} = A_{m,0}\cdot O\left(\beta_m^{5/3}p^{-1}\right)\Big|_{\tau'_m=0}^{\tau'_m=\tau_m} \quad (2.22)$$

Оценим теперь множитель $\left(\frac{A_{m,0}}{B_{m,0}}\right)^2$, который, в силу формул (2.2I) и (2.22), будет входить в выражение для $A_{m,1}$. С помощью равенства (I.I5) и формулы (2.I2) получаем

$$\left(\frac{A_{m,0}}{B_{m,0}}\right)^2 = \left(\mu_m J_m \int_0^\infty f^2 dz\right)^{-1} = O\left(\beta_m^{-1/3}p^{2/3}\right)$$

Интегрирование по τ при конечных значениях τ_m не меняет порядок величины подынтегральной функции, поэтому окончательно имеем

$$A_{m,1} = O\left(\beta_m^{4/3}p^{-1/3}\right).$$

Итак, оценка при $p \to \infty$ второго члена разложения $\varphi_{m,1}(z,\tau_m,\alpha_m)$ (см. формулу (2.I)) имеет вид

$$\varphi_{m,1}(z,\tau_m,\alpha_m) = O\left(\beta_m^{4/3}p^{-1/3}\right)\cdot\begin{cases}\varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m) + O(\beta_m^{-1}), & \theta(z)\le 0\\[2ex] \varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m), & \theta(z)>0.\end{cases} \quad (2.23)$$

Благодаря вхождению в оценку (2.23) функции $\varphi_{m,0}$ оценка следующего члена разложения (I.6) - функций $\varphi_{m,2}(z,\tau_m,\alpha_m)$ - может быть получена аналогичным образом. Применяя метод математической индукции, можно доказать, что при любом $j \geqslant 1$

$$\varphi_{m,j}(z,\tau_m,\alpha_m)=O\left[\left(\beta_m^{4/3}p^{-1/3}\right)^j\right]\cdot\begin{cases}\varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m)+O(\beta_m^{-1}),\theta(z)\leqslant 0\\ \varphi_{m,0}(z,\tau_m,\alpha_m) \qquad ,\theta(z)>0.\end{cases}$$

Так как $\beta_m \sim m$, то при ограниченных значениях $m (m \leqslant M)$ $\varphi_{m,j} \sim p^{-j/3}$ и сходимость разложения (I.6) не зависит от величины ε. Таким образом, разложением (I.6) можно пользоваться при малых номерах m, не предполагая медленной зависимости показателя преломления от горизонтальных координат. В этом случае разложение (I.6) может быть преобразовано к решению уравнения Гельмгольца типа пространственной волны шепчущей галереи. Если $m \sim p$, то $\varphi_{m,j} \sim p$, и разложение (I.6) применимо только при условии $\varepsilon p << 1$.

§ 3. Глубинный волновод

Оценка коэффициента $\varphi_{m,1}$ (см. (2.I)) для глубинного волновода при одной горизонтальной переменной была проведена ранее в нашей работе [I]. Как показал последующий более детальный анализ, полученная в этой работе оценка $\varphi_{m,1}$ справедлива только при номерах m квазинормальных волн, совпадающих по порядку величины с большим параметром p, т.е. при $m \sim p$. При малых оценка работы [I] неприменима. Укажем те уточнения, которые должны быть внесены в оценки работы [I] для номеров $m \sim p^{\delta}, 0<\delta<1$.

В случае глубинного волновода уравнение $n^2(\ell)-\mu^2=0$ имеет два корня ℓ_1 и ℓ_2 ($\ell_1<\ell_2$) и асимптотика линейно-независимых решений ξ и $\tilde{\xi}$ уравнения (I.I3) будет выражаться (см. [I], формулы (2.I)-(2.3)) через функции параболического цилиндра $\mathcal{D}_{\hat{\mathcal{L}}-1/2}(\pm 2\sqrt{\hat{\mathcal{L}}}\,Y)$, где

$$\hat{\mathcal{L}}=p\hat{\tau}, \qquad \hat{\tau}=\frac{1}{\pi}\int_{\ell_1}^{\ell_2}\sqrt{n^2(t)-\mu^2}\,dt, \tag{3.I}$$

$$\int_1^{Y(\ell)}\sqrt{y^2-1}\,dy=\frac{1}{2\hat{\tau}}\int_{\ell_2}^{\ell}\sqrt{\mu^2-n^2(t)}\,dt.$$

(в [I] вместо $\hat{\mathcal{L}}$ и $\hat{\tau}$ использовались обозначения $\mathcal{L}$ и τ).

Если $\hat{\mathcal{L}} >> 1$, функции параболического цилиндра могут быть заменены функциями Эйри, и тогда

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{\varkappa'(Y)Y'(\varepsilon)}} v\left(\hat{\mathcal{L}}^{2/3}\varkappa(Y)\right),$$

где

$$\varkappa(Y) = \left(3\int_1^Y \sqrt{y^2-1}\,dy\right)^{2/3}. \qquad (3.2)$$

В этом случае функция $\eta_{m,1}(z)$ для глубинного волновода будет описываться интегралом, содержащим, как и интеграл (2.II), произведения $v'u, vu, v'v$ и v^2. Этот интеграл будет отличаться (из-за двух горизонтальных переменных) от интеграла (3.5) в [I] заменой $\frac{d}{d\xi}$ на $\frac{\partial}{\partial \tau_m}$ и дополнительным множителем μ_m. Сравнивая формулы (3.I), (3.2) и (2.3), легко заметить, что, если положить $\varepsilon^* = \varepsilon_2$, то

$$\varkappa(Y(\varepsilon)) = \hat{\tau}^{-2/3}\theta(\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \tau_m} Y(\varepsilon) = \frac{1}{\varkappa'(Y)}\left[\hat{\tau}^{-2/3}\frac{\partial\theta}{\partial\tau_m} - \frac{2}{3}\hat{\tau}^{-5/3}\theta\,\frac{\partial\hat{\tau}}{\partial\tau_m}\right]. \qquad (3.3)$$

Оценим производные $\frac{\partial\theta}{\partial\tau_m}$ и $\frac{\partial\hat{\tau}}{\partial\tau_m}$ при близких точках поворота ε_1 и ε_2, т.е. при малых $\hat{\tau}$. Разность $n^2(\varepsilon,\tau_m,\mathcal{L}_m)-\mu^2$, если $n(\varepsilon)$ достаточно гладкая функция, может быть представлена в виде

$$n^2(\varepsilon,\tau_m,\mathcal{L}_m)-\mu^2 = A(\varepsilon)(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon), \qquad (3.4)$$

где $A(\varepsilon)$, ε_1, ε_2 зависят от τ_m и $\mathcal{L}_m$ и $A(\varepsilon) > 0$. Заменяя под знаком интеграла в формуле для $\hat{\tau}$ разность $n^2-\mu^2$ выражением (3.4) и пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\pi}\sqrt{A(\varepsilon')}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\sqrt{(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon)}\,d\varepsilon = \sqrt{A(\varepsilon')}\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2,$$

где $\varepsilon_1 < \varepsilon' < \varepsilon_2$. Отсюда $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = O(\sqrt{\hat{\tau}})$ и

$$\frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \tau_m} = O(\sqrt{\hat{\tau}}) \quad \text{при} \quad \hat{\tau} \to 0. \tag{3.5}$$

Заменим в равенстве (2.8) ε^* на ε_2; тогда

$$\theta(\varepsilon) = (\varepsilon - \varepsilon_2)\left[C_1 + O(\varepsilon - \varepsilon_2)\right], \tag{3.6}$$

где

$$C_1 = \left[-2n(\varepsilon_2)n'(\varepsilon_2)\right]^{1/3} = \left[2n(\varepsilon_2)A(\varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right]^{1/3} = O(\hat{\tau}^{1/6})$$

и

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau_m} = \frac{1}{3} C_1^{-2} \frac{\partial}{\partial \tau_m}\left[2n(\varepsilon_2)A(\varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right]^{1/3} = O\left(\hat{\tau}^{-1/3}\right).$$

Дифференцируя равенство (3.6) по τ_m, получаем

$$\frac{\partial \theta(\varepsilon)}{\partial \tau_m} = -\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tau_m} C_1 + (\varepsilon - \varepsilon_2)\left[\frac{\partial C_1}{\partial \tau_m} + O(1)\right].$$

Отсюда для значений ε, удовлетворяющих неравенству $|\varepsilon - \varepsilon_2| < \mathrm{const}\, \hat{\tau}^{1/2}$, т.е. для точек, принадлежащих волноводу и некоторой его окрестности, следует оценка

$$\left|\frac{\partial \theta(\varepsilon)}{\partial \tau_m}\right| < \mathrm{const}\, \hat{\tau}^{1/6}. \tag{3.7}$$

Возвращаясь теперь к равенству (3.3) и используя оценки (3.5) и (3.7), получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial \tau_m} Y(\xi)\right| < \mathrm{const}\, \hat{\tau}^{-1/2}, \; |\xi - \xi_2| < \mathrm{const}\, \hat{\tau}^{1/2}. \tag{3.8}$$

Заметим, что в оценке производной $\frac{\partial Y(\varepsilon)}{\partial \tau_m}$ вне окрестности волновода нет нужды, так как вне волновода поле квазинормальной волны соответствующего номера экспоненциально мало. Как следует из оценки (3.8), производная $\frac{\partial Y(\varepsilon)}{\partial \tau_m}$ велика при малых $\hat{\tau}$ и принимает значения порядка единицы только при $\hat{\tau} \sim 1$, т.е. при $\hat{\mathcal{L}}_m \sim p$ или, так как $\hat{\mathcal{L}}_m \sim m$, при $m \sim p$ ($\hat{\mathcal{L}}_m$ – корень дисперсионного уравнения (2.8) из [I]).

Оценки работы [I] были получены в предположении, что $\left|\frac{\partial Y(\varepsilon)}{\partial \xi}\right| \sim 1$ (при одной горизонтальной переменной дифференцирование по τ_m заменяется дифференцированием по $\xi = \varepsilon x_1$), и, таким образом, они справедливы только при $m \sim p$. Если же $m \sim p^{\delta}$, $0 < \delta < 1$, то принимая во внимание неравенство (3.8) и замечая, что $\hat{\tau}_m^{-1/2} = p^{1/2} \hat{\mathcal{L}}_m^{-1/2}$, вместо оценки (2.15) работы [I] получаем $\left|\frac{d\hat{\mathcal{L}}_m}{d\xi}\right| \leqslant \mathrm{const}\, \hat{\mathcal{L}}_m^{1/2} p^{1/2}$. Это приводит к появлению в правых частях оценок (3.9), (3.10), (3.11), оценке $|\gamma| \leqslant \mathrm{const}$ и равенстве (3.12) работы [I] дополнительного множителя $\hat{\mathcal{L}}_m^{-1/2} p^{1/2}$; изменяется и оценка коэффициента $A_{m,1}$: вместо $|A_{m,1}| < \mathrm{const}\, \hat{\mathcal{L}}_m$ получаем $|A_{m,1}| < \mathrm{const}\, p$. В результате итоговая оценка коэффициента $\varphi_{m,1}(\tau, \xi)$ принимает вид

$$|\varphi_{m,1}(\tau,\xi)| < \mathrm{const}\, p\, |\varphi_{m,0}(\tau,\xi)|.$$

Таким образом, разложение (I.6) для глубинного волновода, а также разложение (I.7) работы [I] применимы лишь при условии $\varepsilon p << 1$, которое должно иметь место как для малых, так и для больших номеров m квазинормальных волн.

К точно таким же оценкам можно придти и с помощью соотношений (2.17), (2.19), (2.21), если принять во внимание, что входящие в них функции $\Psi(\vartheta)$, $\frac{\partial \Psi(\vartheta)}{\partial \tau_m}$ и $\sigma(\vartheta)$ для глубинного волновода при малых $\hat{\tau}$ будут величинами порядка $\hat{\tau}^{1/6}$, $\hat{\tau}^{-1/3}$ и $\hat{\tau}^{-1/2}$ соответственно.

Литература

1. Б у л д ы р е в В.С., Г р и г о р ь е в а Н.С. Метод двухмасштабных разложений для рефракционных волноводов и условия его применимости. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.104, с.33–48.
2. Распространение волн и подводная акустика. М., 1980, 229 с.

Buldyrev V.S., Grigorieva N.S. Two-scales expansions of quasinormal waves in irregular refractive wave guides. Conditions of their applicability for high frequencies.

Using the method of two-scales expansions the problem of the waveguide propagation investigated for the case on a non-uniform halfspace, the refractive index with one maximum depending slowly on the horizontal coordinate.

This method is shown to be valuable for high frequencies if $\varepsilon p \ll 1$, p being the frequency and ε being small parameter specifeing the gradient of the refraction index in horizontal direction. In the case of the surface wave guide the method is also applicable without restrictions on the gradient of the refraction index if m is small, where m is the number of zeros of the eigen function.

7 971