



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Ya. S. Soibel'man, On the quantum flag manifold,  
*Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1992, Volume 26,  
Issue 3, 90–92

<https://www.mathnet.ru/eng/faa809>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that  
you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

April 22, 2025, 18:39:15



Пусть  $\text{sq}(V)$  — подсупералгебра Ли в  $g(V)$ , состоящая из операторов с нулевым нечетным следом. Обозначим через  $Z$  матрицу вида

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 \end{pmatrix}, \quad Z_0 = \{(v_i^*, v_i)\}, \quad Z_1 = \{(v_i^*, v_s)\}, \quad i, s \in I_0.$$

Через  $Y$  обозначим матрицу такого же вида с  $Y_0 = \{x_i^*\}$ ,  $Y_1 = \{x_i^*\}$ ,  $i, s \in I_0$ , а  $t \in I_1$ . Можно показать, что для разбиения  $\lambda: \lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$  выражение  $q_\lambda = \text{otr } Z^{\lambda_1} \dots \text{otr } Z^{\lambda_n} \text{odet } Y$  (где  $\text{otr}$  — нечетный след, а  $\text{odet}$  — нечетный определитель) является многочленом.

**Теорема 7.** *Базисным множеством инвариантов супералгебры Ли  $\text{sq}(l)$  являются:*

- скалярные произведения  $(v_i^*, v_i)$ ,  $\langle v_i^*, v_s \rangle$ ,  $t \in T^0$ ,  $s \in S^0$ ;*
- многочлены  $q_\lambda$ , где  $\lambda$  пробегает все разбиения вида  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ .*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ, 1947.
2. Лейтес Д. А. Теория супермногообразий. — Петрозаводск, 1983.
3. Сергеев А. Н. // *Мат. сб.* — 1984. — Т. 123. — С. 422—430.

Саратовский политехнический институт, Балаковский филиал

Поступило в редакцию  
15 октября 1990 г.

УДК 512.559.3+512.667.7

## О КВАНТОВОМ МНОГООБРАЗИИ ФЛАГОВ

Я. С. Сойбельман

1. Квантовое многообразие флагов является интересным примером квантового  $G$ -пространства. Интерес к нему понятен, например, с точки зрения возможных приложений к (еще не построенной) «геометрической теории представлений» квантовых групп. Цель настоящей заметки — показать, что теоретико-представленческий подход из [1] переносится в квантовую ситуацию. Так же как и в других работах по квантовым многообразиям флагов (см. [5, 7, 8]), мы имеем дело с «общим» значением параметра квантования  $q$  (или, что более или менее одно и то же, с алгебрами над кольцом формальных рядов  $\mathbb{C}[[h]]$ ). Заметим, что, в отличие от [4, 5, 7, 8], наш подход не ограничен конечномерностью квантовой группы. Но мы приводим лишь конечномерные результаты.

2. Пусть  $\Lambda \in P_+$  — доминантный вес,  $L(\Lambda)$  — конечномерный простой  $U_q(\mathcal{G})$ -модуль. Здесь  $U_q(\mathcal{G})$  — квантованная универсальная обертывающая [2] конечномерной простой алгебры Ли  $\mathcal{G}$ . Пусть  $v_\Lambda \in L(\Lambda)$  — старший вектор. Зафиксируем в  $L(\Lambda)$  весовой базис  $v_i = v_{\Lambda_i}$ ,  $v_2, v_3, \dots, v_N$ ,  $N = \dim L(\Lambda)$ . Под квантовым флаговым многообразием  $Pv_\Lambda$  мы будем понимать проективизацию орбиты  $v_\Lambda = G(\mathbb{C}v_i)$  прямой, проходящей через старший вектор [1], где  $G$  — соответствующая  $\mathcal{G}$  простая группа Ли.

**О п р е д е л е н и е 1.** *Алгеброй регулярных функций на квантовом многообразии  $Pv_\Lambda$  (обозначение  $\mathbb{C}[v_\Lambda]_q$ ) называется подалгебра в  $\mathbb{C}[G]_q[G]$ , порожденная матричными элементами вида  $l(\rho_\Lambda(\xi)v_i)$ , где  $l \in L^*(\Lambda)$ ,  $\rho_\Lambda$ :*

$U_q(\mathcal{G}) \rightarrow \text{End } L(\Lambda)$  – представление, соответствующее модулю  $L(\Lambda)$ ,  $\xi \in U_q(\mathcal{G})$ .

Пусть  $R \in U_q(\mathcal{G})^{\otimes 2}$  – универсальная квантовая  $R$ -матрица [2, 9, 11],  $R^{\Lambda, \Lambda} = (\rho_\Lambda \otimes \rho_\Lambda^*) (R) \in \text{End } L^*(\Lambda)$ ,  $\check{R}^{\Lambda, \Lambda} = P_\Lambda R^{\Lambda, \Lambda}$ , где  $P_\Lambda \in \text{End } L^*(\Lambda)$ ,  $P_\Lambda(x \otimes y) = y \otimes x$ .

Аналогичные операторы определим, заменив  $L^*(\Lambda)$  на  $L(\Lambda)$  и  $\Lambda^*$  на  $\Lambda$ . Хорошо известно ([3], с. 39, замечание 4), что собственные значения эндоморфизма  $\check{R}^{\Lambda, \Lambda}$  вещественны и сосредоточены вблизи точек 1 и  $-1$ . Пусть  $T(L^*(\Lambda)) = \mathbb{C} \oplus L^*(\Lambda) \oplus L^*(\Lambda)^{\otimes 2} \oplus \dots$  – тензорная алгебра. Для любого векторного пространства  $V \subset L^*(\Lambda) \otimes L^*(\Lambda)$  через  $\langle V \rangle$  обозначим двусторонний идеал в  $T(L^*(\Lambda))$ , порожденный  $V$ .

**Определение 2.** Алгеброй регулярных функций на векторном пространстве  $L(\Lambda)$  назовем  $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_q = T(L^*(\Lambda)) / \langle \mathcal{L}_\Lambda \rangle$ , где  $\mathcal{L}_\Lambda = \bigcup_{\lambda_k < 0} \text{Ker}(\check{R}^{\Lambda^*, \Lambda^*} - \lambda_k)$ ,  $\lambda_k$  – собственное значение  $\check{R}^{\Lambda^*, \Lambda^*}$ .

Ясно, что при  $q=1$  мы имеем  $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_1 = \mathbb{C}[L(\Lambda)] = \text{Sym}(L^*(\Lambda))$ . Заметим, что при  $q=1$  многообразия  $L(\Lambda)$  и  $v_\Lambda$  являются  $G$ -пространствами.

**Определение 3.** Алгебра  $O$  называется алгеброй функций на квантовом (левом)  $G$ -пространстве, если  $A$  является (левым)  $U_q(\mathcal{G})$ -модулем, причем  $m(\Delta(\xi)(\varphi \otimes \psi)) = \xi(\varphi\psi)$ , где  $\Delta$  – коумножение в  $U_q(\mathcal{G})$ ,  $\varphi, \psi \in A$ ,  $\xi \in U_q(\mathcal{G})$ ,  $m$  – умножение. Очевидно определяется морфизм квантовых  $G$ -пространств.

**Замечание.** Это определение недостаточно по ряду очевидных причин, но мы примем его в настоящей работе.

3. Пусть  $L^*(\Lambda)^{\otimes 2} = L^*(k\Lambda) \oplus \mathcal{Y}_k^*$  – разложение в сумму  $U_q(\mathcal{G})$ -подмодулей. Здесь  $L^*(\lambda)$  – дуальный к  $L(\lambda)$  модуль.

Положим  $\mathcal{Y}^* = \bigoplus_{k \geq 2} \mathcal{Y}_k^*$ . Через  $\pi_1$  обозначим проекцию  $T(L^*(\Lambda)) \rightarrow T(L^*(\Lambda)) / \mathcal{Y}^* = \bigoplus_{k \geq 0} L^*(k\Lambda)$ . Векторное пространство  $\bigoplus_{k \geq 0} L^*(k\Lambda)$  превратим в алгебру, снабдив его картановским произведением  $L^*(k\Lambda) \otimes L^*(m\Lambda) \rightarrow L^*((k+m)\Lambda)$  [1].

**Предложение 1.**  $\bigoplus_{k \geq 0} L^*(k\Lambda)$  изоморфна  $\mathbb{C}[v_\Lambda]_q$  как алгебра и как  $U_q(\mathcal{G})$ -модуль.

Пусть  $\{l_i\}_{i=1}^N$  – биортогональный к  $\{v_i\}_{i=1}^N$  базис.  $(\check{R}^{\Lambda, \Lambda})^2(v_i \otimes v_k) = \sum_{a, b} c_{ij}^{ab} v_a \otimes v_b$ . Рассмотрим в  $L^*(\Lambda)^{\otimes 2}$  векторное подпространство  $E_\Lambda$ , натянутое на векторы вида

$$\sum_{i, j} c_{ij}^{ab} l_i \otimes l_j - q^{2(\Lambda, \Lambda)} l_a \otimes l_b, \quad 1 \leq a, b \leq N.$$

Положим  $A_\Lambda = T(L^*(\Lambda)) / \langle E_\Lambda \rangle$ . Пусть  $q^c$  – квантовый аналог элемента Казимира  $C$ , определенный в [3, § 5],  $c_\lambda = (\lambda + 2\rho, \lambda)$ .

**Предложение 2.**  $\mathcal{Y}_2^* = E_\Lambda = (q^c - q^{c_\Lambda}) (L^*(\Lambda)^{\otimes 2})$ .

4. В случае  $q=1$  основной результат о паре многообразий  $L(\Lambda)$  и  $v_\Lambda$  состоит в том, что вложение  $v_\Lambda \supset L(\Lambda)$  является морфизмом  $G$ -пространств и ядро соответствующего эндоморфизма  $\mathbb{C}[L(\Lambda)] \rightarrow \mathbb{C}[v_\Lambda]$  порождено квадратичными соотношениями Плюккера. Определим  $\varphi: T(L^*(\Lambda)) \rightarrow \mathbb{C}[v_\Lambda]_q$  формулой  $(\varphi(l_1 \otimes \dots \otimes l_m)) = (l_1 \otimes \dots \otimes l_m)(\rho_\Lambda^{\otimes m}(\xi) v_i^{\otimes m})$ .

**Предложение 3.** Существует морфизм квантовых  $\mathcal{G}$ -пространств  $\Phi: \mathbb{C}[L(\Lambda)]_q \rightarrow \mathbb{C}[v_\Lambda]_q$  такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 T(L^*(\Lambda)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[v_\Lambda]_q \\
 \searrow \pi_2 & & \nearrow \Phi \\
 & & \mathbb{C}[L(\Lambda)]_q
 \end{array}$$

Здесь вертикальная стрелка  $\pi_2$  — это проекция  $T(L^*(\Lambda)) \rightarrow T(L^*(\Lambda))/\langle \mathcal{L}_\Lambda \rangle$ .

Гипотеза. Двусторонний идеал  $\text{Ker } \Phi$  порожден подпространством  $\mathcal{L}_2(E_\Lambda)$ .

Заметим, что проекция  $\pi_2$  наделяет  $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_q$  градуировкой и  $\pi_2(E_\Lambda)$  имеет степень 2. Это квантовый аналог соотношений Плюккера.

5. Пусть  $w \in W$  — произвольный элемент группы Вейля алгебры Ли  $\mathcal{G}$ . Рассмотрим в  $\mathbb{C}[v_\Lambda]_q$  двусторонний идеал  $I_w$ , натянутый на матричные элементы  $l(\rho_\Lambda(\xi)v_i)$  такие, что  $l(\rho_\Lambda(v_{w\Lambda})) = 0$  для любого  $\eta \in U_q(b_-)$ . Здесь  $b_\pm \subset \mathcal{G}$  — борелевская подалгебра,  $v_{w\Lambda} \in L(\Lambda)$  — элемент весового базиса, имеющий вес  $w\Lambda$ .

Эквивалентное описание  $I_w$ : он порожден матричными элементами  $l_\mu^{(i)}(\rho_\Lambda(\xi)v_i)$  такими, что  $\mu \geq w\Lambda$ , где  $l_\mu^{(i)}$  — функционал веса  $-\mu$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  означает, что  $\lambda_1 - \lambda_2 = \sum_i m_i \alpha_i$ , причем  $\{\alpha_i\}$  — простые корни,  $m_i \geq 0$ .

Определение 4. Алгебра  $\mathbb{C}[v_\Lambda]_q/I_w$  называется *однородной координатной алгеброй (обобщенного) многообразия Шуберта*  $X_w$  и обозначается  $\mathbb{C}[X_w]_q$ . (Заметим, что  $\mathbb{C}[X_{w_0}]_q = \mathbb{C}[v_\Lambda]_q$ , где  $w_0$  — элемент максимальной длины.)

Предложение 4. Для любого  $w \in W$   $\mathbb{C}[X_w]_q$  является алгеброй функций на квантовом  $B_-$ -пространстве.

Если  $w_1 \leq w_2$ , то имеется эпиморфизм квантовых  $B_-$ -пространств  $\mathbb{C}[X_{w_2}]_q \rightarrow \mathbb{C}[X_{w_1}]_q$ .

6. Заключительные замечания.

1) В работе [5] для некоторых типов  $\mathcal{G}$  построены базисы в  $\mathbb{C}[X_w]_q$ , составленные из стандартных мономов.

2) Бесконечномерный аналог результатов этой заметки в сочетании с [10] может быть полезен при построении  $q$ -аналога КП-иерархии в духе [12, гл. 14].

3) В [5] квантовое многообразие флагов  $G/B$  рассматривается как подмногообразие в квантовом  $\prod_i G/P_i$ , где  $P_i$  — максимальные параболические подгруппы. У нас квантовое  $G/B$  рассматривается как подмногообразие в квантовом проективном пространстве  $PL(\Lambda)$ , где  $\Lambda$  — «достаточно большой» вес.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кас В., Peterson D. // Progr. in Math. — 1983. — V. 36. — P. 141–166.
2. Дринфельд В. Г. // Зап. науч. семина. ЛОМН. — 1986. — Т. 155. — С. 19–49.
3. Дринфельд В. Г. // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, № 2. — С. 30–47.
4. Manin Yu. // Publ. CRM. Montreal. — 1988.
5. Lakshminar V., Reshetikhin N. // Prepr. Harvard Univ. — 1990.
6. Соибельман Я. С. // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 1. — С. 190–212.
7. Demidov E., Manin Yu., Mukhin E., Zhdanovich D. // Prepr. RIMS. — 1990. No 701.
8. Taft E., Towber J. // Preprint. — 1989.
9. Levendorskii S., Soibelman Ya. // Preprint. — 1990.
10. Levendorskii S., Soibelman Ya. // Geom. and Phys. — 1991. 14. Kirillov A., Reshetikhin N. // Commun. Math. Phys. — 1991.
12. Кас В. Infinite dimensional Lie algebras. — CUP, 1985.