



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Болохов, Однородные расширения квадратичной формы оператора Лапласа для поля, взаимодействующего с двумя источниками,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2017, том 465, 46–60

<https://www.mathnet.ru/zns16530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

18 мая 2025 г., 22:47:11



Т. А. Болохов

**ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ
ФОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА ДЛЯ ПОЛЯ,
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ДВУМЯ
ИСТОЧНИКАМИ**

ВВЕДЕНИЕ

Квадратичные формы, определяемые выражением

$$Q^N = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \sum_{n,k} \frac{1}{|x-x^n|^2} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^n| f(x) \right|^2 - (N-1) \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right|^2 \right\} d^3x, \quad (1)$$

где $\{x^n\}$ – это N точек пространства \mathbb{R}^3 общего положения, могут рассматриваться как расширения квадратичной формы оператора Лапласа

$$Q^L = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right|^2 d^3x. \quad (2)$$

Такие расширения, как и сама форма Q^L , обладают свойством однородности или ковариантности по отношению к дилатации

$$x \rightarrow \chi x, \quad x^n \rightarrow \chi x,$$

а именно,

$$Q^N(\{\chi x^n\}, f(\chi x)) = \chi^{-2} Q^N(f(x)). \quad (3)$$

В физических приложениях квадратичная форма оператора Лапласа обычно возникает как функционал потенциальной энергии бозонного поля. Форма Q^N , таким образом, может быть проинтерпретирована как частный случай функционала энергии поля $f(x)$, взаимодействующего с N точечными источниками (математические основы описания таких взаимодействий были заложены в [1]). Квадратичные формы, соответствующие общему случаю взаимодействия с точечными

Ключевые слова: квадратичная форма, оператор Лапласа, точечный потенциал, самосопряженные расширения симметрических операторов.

Работа написана при поддержке грантов РФФИ 15-01-03148 и РФФИ 17-01-00283.

источниками, имеют добавочные слагаемые с размерными коэффициентами, зависящие от значений поля в точках x^n , и для них не выполняется условие (3). Поэтому квадратичные формы, лишённые добавок размерности, отличной от $[x]^{-2}$, представляют отдельный интерес для теории поля как однородные выражения.

В настоящей работе проводится исследование свойств симметрии множества квадратичных форм, описываемых выражением (1), для взаимодействия с двумя источниками ($N = 2$). Будет показано, что соответствующее множество нетривиальных расширений состоит из отдельной точки и множества, эквивалентного сфере \mathbb{S}^2 (комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^1$).

§1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И СИММЕТРИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Покажем, что на множестве функций, регулярных в точках $\{x^n\}$, квадратичная форма Q^N совпадает с квадратичной формой оператора Лапласа Q^L . Пусть Ω_ρ^N – объединение сфер с диаметрами ρ и центрами в точках x^n , а σ_ρ^n – поверхности этих сфер. Интеграл (1) по пространству \mathbb{R}^3 является пределом интегралов по множествам $\tilde{\Omega}_\rho^N = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\rho^N$ при $\rho \rightarrow 0$. В каждом таком интеграле раскроем действие производной, сгруппируем младшие степени в полную производную и проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
 Q^N &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left\{ \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| \overline{f(x)} \right) \frac{1}{|x - x^n|^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| f(x) \right) \right. \\
 &\quad \left. - (N - 1) \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right|^2 \right\} d^3 x \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|^2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{(x - x^n)_k}{|x - x^n|^2} \frac{\partial}{\partial x_k} |f(x)|^2 + \frac{|f(x)|^2}{|x - x^n|^2} \right) \right\} d^3 x \quad (4) \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{(x - x^n)_k}{|x - x^n|^2} |f(x)|^2 \right) \right\} d^3 x \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|^2 d^3 x - \sum_{n,m=1}^N \int_{\sigma_\rho^m} (x - x^n)_k \frac{|f(x)|^2}{|x - x^n|^2} d^2 \sigma_k^m \right\},
 \end{aligned}$$

здесь мы опустили суммирование по повторяющимся трехмерным индексам k и воспользовались соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| = \frac{(x - x^n)_k}{|x - x^n|}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(x - x^n)_k}{|x - x^n|^2} = \frac{1}{|x - x^n|^2} \quad (5)$$

В последней сумме по n, m главный вклад вносят “диагональные” слагаемые, в которых неограниченные множители (5) интегрируются по поверхностям сфер σ_ρ^n с центрами в точках x^n . В этом случае векторы с компонентами, пропорциональными $(x - x^n)_k$, параллельны векторам $d\sigma_k^n$, нормальным в точке x к поверхностям σ_ρ^n , и “диагональные” слагаемые переписываются в виде интегралов по поверхности от скалярной функции

$$\sum_n \int_{\sigma_\rho^n} (x - x^n)_k \frac{|f(x)|^2}{|x - x^n|^2} d^2\sigma_k^n = \sum_n \int_{\sigma_\rho^n} \frac{|f(x)|^2}{|x - x^n|} d^2\sigma$$

Для функции $f(x)$, регулярной в точках x^n , эти интегралы, а также интегралы в “недиагональных” слагаемых стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 0$, и в результате для Q^N получается выражение (2).

Пусть теперь функция $f(x)$ является два раза дифференцируемой функцией с особенностями в точках x^n . Для того, чтобы получить выражение для оператора, соответствующего квадратичной форме Q^N , проинтегрируем выражение из первой строки (4) по частям

$$\begin{aligned} Q^N &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left\{ \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| \overline{f(x)} \right) \frac{1}{|x - x^n|^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| f(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - (N-1) \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right|^2 \right\} d^3x \\ &= - \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left(\sum_{n=1}^N \overline{f(x)} |x - x^n| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - x^n|^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| f(x) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (N-1) \overline{f(x)} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x) \right) d^3x - \sum_{m=1, \sigma_\rho^m}^N \int \left(\frac{\overline{f(x)}}{|x - x^m|} \frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| f(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n \neq m} \frac{\overline{f(x)}}{|x - x^n|} \frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^n| f(x) - (N-1) \overline{f(x)} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) \right) d^2\sigma_k^m \right\} \end{aligned}$$

$$= - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\tilde{\Omega}_\rho^N} \left(\overline{f(x)} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x) + \sum_{n=1}^N \overline{f(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^3} \right) f(x) \right) d^3 x \quad (6)$$

$$- \sum_{m=1}^N \int_{\sigma_\rho^m} \frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|} \frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^m| f(x) d^2 \sigma_k^m \quad (7)$$

$$- \sum_{m=1}^N \int_{\sigma_\rho^m} \sum_{n \neq m} |f(x)|^2 \frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^2} d^2 \sigma_k^m \}. \quad (8)$$

В получившейся сумме первое слагаемое в строке (6) – это квадратичная форма лапласиана

$$\Delta = - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \quad (9)$$

Второе слагаемое исчезает вне окрестностей точек x^n

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^3} = 0, \quad |x-x^n| > \rho,$$

но формально является суммой δ -функций и обычно добавляется к выражению для расширения симметрического оператора Δ , которое мы пока будем обозначать как Δ^N . Строка (7) является граничным условием. В оставшейся сумме (8) вектор $x-x^n$ можно заменить на вектор x^m-x^n с поправкой, пропорциональной ρ , и написать для интеграла по сфере σ_ρ^m следующую оценку

$$\int_{\sigma_\rho^m} \frac{(x-x^n)_k}{|x-x^n|^2} d^2 \sigma_k^m = \int_{\sigma_\rho^m} \frac{(x^m-x^n)_k}{|x^m-x^n|^2} (1 + \mathcal{O}(\rho)) d^2 \sigma_k^m = \mathcal{O}(\rho^3).$$

Если функция $|f(x)|$ ведет себя в окрестности точки x^m как $\mathcal{O}(|x-x^m|^{-2})$, то, с учетом написанной выше оценки для интеграла, можно сделать вывод, что каждое слагаемое в строке (8), равно как и вся сумма, исчезает при $\rho \rightarrow 0$. Таким образом, квадратичная форма Q^N преобразуется к следующему виду

$$Q^N = (f, \Delta^N f) - \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^N \int_{\sigma_\rho^m} \frac{\overline{f(x)}}{|x-x^m|} \frac{\partial}{\partial x_k} |x-x^m| f(x) d^2 \sigma_k^m,$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение для функций на пространстве \mathbb{R}^3 .

Преобразование (6)–(8), примененное к двум элементам f и g из некоторого множества функций с особенностями в точках x^n , показывает, что для того, чтобы оператор Δ^N был симметрическим

$$(f, \Delta^N g) = (\Delta^N f, g)$$

необходимо, чтобы для любых двух функций из этого множества выполнялись граничные условия

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_m \int_{\sigma_\rho^m} \left\{ \frac{\overline{f(x)}}{|x - x^m|} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^m| g(x) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^m| \overline{f(x)} \right) \frac{g(x)}{|x - x^m|} \right\} d^2 \sigma_k^m = 0. \quad (10)$$

А для того, чтобы было выполнено равенство

$$Q^N(f) = (f, \Delta^N f),$$

необходимо, чтобы была равна нулю каждая из двух сумм в (10)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_m \int_{\sigma_\rho^m} \frac{\overline{f(x)}}{|x - x^m|} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} |x - x^m| g(x) \right) d^2 \sigma_k^m = 0. \quad (11)$$

Таким образом, далее мы будем изучать самосопряженные расширения симметрического оператора, задаваемого выражением (9), удовлетворяющие граничным условиям (11).

§2. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В данной работе мы ограничимся рассмотрением квадратичной формы Q^N , соответствующей взаимодействию с двумя источниками, то есть случаем $N = 2$. Пусть Δ – симметрический оператор, заданный выражением (9) на множестве два раза дифференцируемых функций, исчезающих вместе с производными в точках x^1 и x^2

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ f : (f, f) < \infty, (\Delta f, \Delta f) < \infty; f(x) \rightarrow 0, \frac{\partial f}{\partial x_k} \rightarrow 0, x \rightarrow x^{1,2} \right\}.$$

Такой оператор имеет индексы дефекта $(2, 2)$. Действительно, если обозначить $j = e^{i\pi/4}$, то оказывается, что пары векторов

$$C_+^1 = \frac{e^{ij\rho|x-x^1|}}{|x-x^1|}, \quad C_+^2 = \frac{e^{ij\rho|x-x^2|}}{|x-x^2|} \quad (12)$$

и

$$C_-^1 = \frac{e^{-j\rho|x-x^1|}}{|x-x^1|}, \quad C_-^2 = \frac{e^{-j\rho|x-x^2|}}{|x-x^2|}, \quad (13)$$

интегрируемы с квадратом по пространству \mathbb{R}^3 и удовлетворяют уравнениям

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \mp i\rho^2\right)C_{\pm}^{1,2}(x) = 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что для любого вектора f из множества \mathcal{W}_0 выполнены равенства

$$(C_{\pm}^{1,2}, (\Delta \pm i\rho^2)f) = 0,$$

то есть векторы $C_{\pm}^{1,2}$ принадлежат ядрам операторов, сопряженных к $\Delta \pm i\rho^2$. Векторы C_{\pm}^1 и C_{\pm}^2 при одинаковых знаках в индексе, очевидно, линейно-независимы, несложные вычисления с помощью преобразования Фурье показывают, что их скалярные произведения выглядят следующим образом

$$(C_{\pm}^1, C_{\pm}^1) = (C_{\pm}^2, C_{\pm}^2) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho}, \quad (15)$$

$$(C_+^1, C_+^2) = (C_-^1, C_-^2) = 4\pi \frac{e^{ij\rho|x^1-x^2|} - e^{-j\rho|x^1-x^2|}}{2i\rho^2|x^1-x^2|}. \quad (16)$$

Можно заметить, что в числителе правой части (15) стоит разность сопряженных величин, так как $\bar{i}j = \bar{i}e^{i\pi/4} = -e^{i\pi/4} = -j$. Следовательно, скалярное произведение (16) является вещественным числом, и общую нормировку базиса C_{\pm}^1, C_{\pm}^2 можно задать с помощью следующей вещественной симметричной матрицы

$$(C_{\pm}^a, C_{\pm}^b) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\rho} \mathcal{A}_{ab}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}i}(\xi - \bar{\xi}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}i}(\xi - \bar{\xi}) & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\xi = \frac{e^{ij\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|}, \quad \bar{\xi} = \frac{e^{-j\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|}.$$

Самосопряженные расширения оператора Δ , заданного на пространстве \mathcal{W}_0 с дефектными векторами $C_{\pm}^{1,2}$, описываются с помощью 2×2

матриц V , которые задают унитарные отображение векторов $C_-^{1,2}$ в линейную оболочку векторов $C_+^{1,2}$

$$V : C_-^a \rightarrow VC_-^a = v_{ba}C_+^b$$

(здесь и далее мы будем опускать суммирование по повторяющимся индексам). Унитарность отображения V (сохранение скалярного произведения) при этом выражается в следующих соотношениях

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\sqrt{2\rho}}\mathcal{A}_{ab} &= (C_-^a, C_-^b) = (VC_-^a, VC_-^b) \\ &= (v_{ca}C_+^c, v_{db}C_+^d) = \frac{4\pi}{\sqrt{2\rho}}\bar{v}_{ca}\mathcal{A}_{cd}v_{db} = \frac{4\pi}{\sqrt{2\rho}}(V^*\mathcal{A}V)_{ab}. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом месте важно, что \mathcal{A} – это вещественная матрица, и что скалярные произведения для пар векторов $\{C_+^{1,2}\}$ и $\{C_-^{1,2}\}$ совпадают.

Области определения рассматриваемых расширений Δ_V могут быть описаны как линейные пространства следующего вида

$$\mathcal{W}_V = \mathcal{W}_0 + \sum_a \{C_-^a - v_{ba}C_+^b\} \quad (18)$$

(см., например, [2]). Далее мы убедимся, что для элементов таких пространств условие симметричности (10) выполняется автоматически, однако, более жесткое требование (11) накладывает ограничение на матрицу V . Вид этого ограничения нам и предстоит определить.

Пусть функции f и g принадлежат области определения \mathcal{W}_V , запишем первые слагаемые их разложений в окрестностях точек x^1 и x^2

$$f(x) \stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \frac{f_{-1}^1}{|x - x^1|} + f_0^1, \quad f(x) \stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \frac{f_{-1}^2}{|x - x^2|} + f_0^2, \quad (19)$$

$$g(x) \stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \frac{g_{-1}^1}{|x - x^1|} + g_0^1, \quad g(x) \stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \frac{g_{-1}^2}{|x - x^2|} + g_0^2 \quad (20)$$

и подставим в граничное условие (11). В результате получаются следующие тривиальные соотношения для коэффициентов f_{-1} , f_0 , g_{-1} , g_0

$$\overline{f_{-1}^1}g_0^1 + \overline{f_{-1}^2}g_0^2 = 0. \quad (21)$$

Теперь запишем разложения в окрестностях точек x^1 и x^2 для функций $C_{\pm}^{1,2}(x)$

$$C_+^1(x) \stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \frac{1}{|x - x^1|} + i\rho, \quad C_+^1 \stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \rho\xi, \quad (22)$$

$$C_-^1(x) \stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \frac{1}{|x - x^1|} - j\rho, \quad C_-^1 \stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \rho\bar{\xi}, \quad (23)$$

$$C_+^2(x) \stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \frac{1}{|x - x^2|} + i\rho, \quad C_+^2 \stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \rho\xi, \quad (24)$$

$$C_-^2(x) \stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \frac{1}{|x - x^2|} - j\rho, \quad C_-^2 \stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \rho\bar{\xi}. \quad (25)$$

Базисные комбинации $C_-^a - v_{ba}C_+^b$ линейной оболочки (18) имеют следующие разложения

$$\begin{aligned} C_-^1 - v_{b1}C_+^b &\stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \frac{1 - v_{11}}{|x - x^1|} - j\rho - \rho\xi v_{21} - i\rho v_{11}, \\ C_-^1 - v_{b1}C_+^b &\stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \rho\bar{\xi} - \left(\frac{1}{|x - x^2|} + i\rho\right)v_{21} - \rho\xi v_{11}, \\ C_-^2 - v_{b2}C_+^b &\stackrel{x \sim x^1}{\simeq} \rho\bar{\xi} - \left(\frac{1}{|x - x^1|} + i\rho\right)v_{12} - \rho\xi v_{22}, \\ C_-^2 - v_{b2}C_+^b &\stackrel{x \sim x^2}{\simeq} \frac{1 - v_{22}}{|x - x^2|} - j\rho - \rho\xi v_{12} - i\rho v_{22}. \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в (21) в различных сочетаниях индекса 1 и 2 в левой части, получим систему уравнений, которые могут быть записаны в следующем матричном виде

$$\rho(I - V^*)(jI + \Xi V - \bar{\Xi} + ijV) = 0, \quad \Xi = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Условие (21) является “половиной” условия симметричности оператора Δ_V на пространстве (18)

$$\overline{f_{-1}^1}g_0^1 + \overline{f_{-1}^2}g_0^2 - \overline{f_0^1}g_{-1}^1 - \overline{f_0^2}g_{-1}^2 = 0, \quad (27)$$

которое следует из (10). Проверим, что последнее условие автоматически выполняется для базисных комбинаций $C_-^a - v_{ba}C_+^b$ из пространства \mathcal{W}_V . Для этого возьмем левую часть уравнения (26) и вычтем из нее сопряженную величину, отвечающую последним двум слагаемыми

в (27)

$$(I - V^*)(jI + \Xi V - \bar{\Xi} + ijV) - (-ijI + V^*\bar{\Xi} - \Xi - jV^*)(I - V) \quad (28)$$

$$= (j + ij)(I - V^*V) + V^*(\Xi - \bar{\Xi})V + \Xi - \bar{\Xi} \quad (29)$$

$$= \sqrt{2}i \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}i}(\Xi - \bar{\Xi}) - V^* \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}i}(\Xi - \bar{\Xi})\right)V\right) = 0. \quad (30)$$

Последнее равенство следует из (17), если учесть что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}i}(\Xi - \bar{\Xi}) = \mathcal{A}.$$

Равенство (30) замечательно тем, что оно позволяет вычислить скалярное произведение (16), то есть интеграл по трехмерному пространству от произведений двух решений уравнения (14), зная их вид, нормировку (15) и асимптотики в особых точках (22)–(25).

§3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МАТРИЦЫ, ЗАДАЮЩЕЙ САМОСОПРЯЖЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ

Вернемся к решениям уравнения (26). Преобразуем его следующим образом

$$0 = (I - V^*)((I - j\bar{\Xi})V - i(I + ij\Xi)) = (I - V^*)(ijI + \Xi)(V - \frac{-j + \bar{\Xi}}{ij + \Xi}). \quad (31)$$

Матрицу V с условием (17) довольно сложно параметризовать, поэтому попробуем выразить ее через унитарный объект. С помощью ортогональной замены базиса

$$\begin{pmatrix} C_{\pm}^1 \\ C_{\pm}^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} D_{\pm}^1 \\ D_{\pm}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C_{\pm}^1 + C_{\pm}^2 \\ C_{\pm}^2 - C_{\pm}^1 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} C_{\pm}^1 \\ C_{\pm}^2 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

приходим к соотношениям

$$(D_{\pm}^a, D_{\pm}^b) = (\Phi_{ac}C_{\pm}^c, \Phi_{bd}C_{\pm}^d) = \Phi_{ac}\mathcal{A}_{cd}\Phi_{bd} = (\Phi\mathcal{A}\Phi^T)_{ab} = \tilde{\mathcal{A}}_{ab},$$

где

$$\tilde{\mathcal{A}} = \Phi\mathcal{A}\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i} \end{pmatrix}.$$

Эта замена также диагонализует матрицу Ξ

$$\Xi \rightarrow \tilde{\Xi} = \Phi\Xi\Phi^T = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$$

и преобразует V в матрицу, сохраняющую диагональное произведение $\tilde{\mathcal{A}}$

$$V \rightarrow \tilde{V} = \Phi V \Phi^T, \quad \tilde{V}^* \tilde{\mathcal{A}} \tilde{V} = \tilde{\mathcal{A}}.$$

Параметризуем матрицу \tilde{V} следующим образом

$$\tilde{V} = \tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} U \tilde{\mathcal{A}}^{1/2}.$$

Тогда для матрицы U будет выполняться соотношение унитарности

$$\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{V}^* \tilde{\mathcal{A}} \tilde{V} = \tilde{\mathcal{A}}^{1/2} U^* U \tilde{\mathcal{A}}^{1/2}, \quad U^* U = I$$

и уравнение (31) переписется как

$$\begin{aligned} 0 &= (I - V^*) (ijI + \Xi) \left(V^T - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \Xi} \right) \\ &= \Phi^T \tilde{\mathcal{A}}^{1/2} (I - U^*) \tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} (ijI + \tilde{\Xi}) \tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} \left(U - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}} \right) \tilde{\mathcal{A}}^{1/2} \Phi, \end{aligned}$$

здесь мы воспользовались коммутативностью диагональных матриц $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\Xi}$. Таким образом, уравнение (26) сводится к уравнению

$$(I - U^*) \tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} (ijI + \tilde{\Xi}) \tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} \left(U - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}} \right) = 0 \quad (32)$$

для унитарной матрицы U . Это уравнение имеет два очевидных решения

$$U_1 = I \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\xi} - j}{\tilde{\xi} + ij} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\xi} + j}{\tilde{\xi} - ij} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

1. Первое решение соответствует максимальному расширению симметрического оператора Δ по теореме Фридрихса-Стоуна [3, 4]. Ему отвечает самосопряженный оператор Δ_1 , заданный на множестве два раза дифференцируемых функций без особенностей в точках x^1 и x^2 . Квадратичная форма этого оператора задается выражением (2), а ядро резольвенты не зависит от точек x^1 и x^2

$$R_1(x, y; \lambda) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad (\Delta_1 - \lambda)R_1(x, y; \lambda) = \delta^3(x-y),$$

где разрез у корня из спектрального параметра выбирается вдоль положительной полуоси

$$\sqrt{\lambda} = \overline{\sqrt{\lambda}}.$$

2. Второе решение определяет оператор Δ_2 , заданный на подпространстве

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_0 + \left\{ D_-^1 - \frac{\bar{\xi} - j}{\xi + ij} D_+^1 \right\} + \left\{ D_-^2 - \frac{\bar{\xi} - j}{\xi + ij} D_+^2 \right\}.$$

Резольвента такого оператора может быть построена с помощью формулы Крейна [5] следующим образом. Пусть

$$D_\lambda^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_+^1 + C_+^2) \Big|_{\rho = -ij\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^1|}}{\sqrt{2}|x-x^1|} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^2|}}{\sqrt{2}|x-x^2|}, \quad (34)$$

$$D_\lambda^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_+^2 - C_+^1) \Big|_{\rho = -ij\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^2|}}{\sqrt{2}|x-x^2|} - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-x^1|}}{\sqrt{2}|x-x^1|} \quad (35)$$

– это базис регулярных аналитических векторов в интерпретации [6]. Тогда ядро резольвенты оператора Δ_2 , построенного по матрице U_2 , определяется следующей формулой

$$R_2(x, y; \lambda) = R_1(x, y; \lambda) + \beta_{ab}(\lambda) D_\lambda^a(x) \overline{D_\lambda^b(y)}, \quad (36)$$

где диагональная матрица $\beta_{ab}(\lambda)$ выражается из соотношения

$$\beta_{ab}^{-1}(\lambda) = \beta_{ab}^{-1}(i\rho^2) - (\lambda - i\rho^2) (D_\lambda^a, D_{i\rho^2}^b),$$

$$(D_\lambda^1, D_{i\rho^2}^1) = \frac{4\pi}{\lambda - i\rho^2} \left(i\sqrt{\lambda} - ij\rho + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{ij\rho|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|} \right), \quad (37)$$

$$(D_\lambda^2, D_{i\rho^2}^2) = \frac{4\pi}{\lambda - i\rho^2} \left(i\sqrt{\lambda} - ij\rho - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{ij\rho|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|} \right), \quad (38)$$

$$(D_\lambda^1, D_{i\rho^2}^2) = (D_\lambda^2, D_{i\rho^2}^1) = 0. \quad (39)$$

Матрица $\beta_{ab}(i\rho^2)$, в свою очередь, может быть найдена из определения преобразования Кэли через оператор $\tilde{V}_2 = \tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} U_2 \tilde{\mathcal{A}}^{1/2}$

$$R_2(x, y; i\rho^2) - R_1(x, y; i\rho^2) = \frac{\tilde{V}_2 - I}{2i\rho^2} = \beta_{ab}(i\rho^2) D_{i\rho^2}^a(x) D_{-i\rho^2}^b(y).$$

Отсюда, учитывая, что $\tilde{V}_2 = U_2$, следует, что

$$\beta(i\rho^2) = \frac{U_2 - I}{4\pi\sqrt{2}i\rho\tilde{\mathcal{A}}} = \frac{1}{4\pi\rho} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\xi+ij} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\xi-ij} \end{pmatrix},$$

и далее получаем выражение для матрицы, обратной к $\beta_{ab}(\lambda)$

$$\beta^{-1}(\lambda) = 4\pi \begin{pmatrix} -i\sqrt{\lambda} - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|} & 0 \\ 0 & i\sqrt{\lambda} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|}}{|x^1-x^2|} \end{pmatrix}.$$

3. Третий тип решений уравнения (32) может быть построен следующим образом. Унитарная матрица общего вида U_3 имеет два ортогональных собственных вектора

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ -\bar{z} \end{pmatrix}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

которым отвечают два собственных значения, лежащих на единичной окружности. Пусть второе собственное значение равно 1, а первое подберем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\det\left(U_3 - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}}\right) = 0. \quad (40)$$

Из равенства нулю этого определителя следует, что существует вектор χ , такой, что

$$\left(U_3 - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}}\right)\chi = 0.$$

Так как $U_3\phi_2 = \phi_2$, то очевидно, что вектор χ не совпадает (не пропорционален) с вектором ϕ_2 , а значит пара $\{\phi_2, \chi\}$ образует базис в пространстве \mathbb{C}^2 . Для того, чтобы матрица

$$\Omega = (I - U_3^*)\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}(ijI + \tilde{\Xi})\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\left(U_3 - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}}\right),$$

стоящая в левой части уравнения (32), равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю значения ее полуторалинейной формы на всех комбинациях базисных векторов ϕ_2 и χ . Так как для вектора ϕ_2 выполняется равенство $U_3\phi_2 = \phi_2$, то

$$(\phi_2, \Omega\phi_2) = 0, \quad (\phi_2, \Omega\chi) = 0.$$

Из определения χ следует, что

$$(\chi, \Omega\chi) = 0, \quad (\phi_2, \Omega\chi) = 0.$$

Равенство для четвертой комбинации базисных векторов следует из самосопряженности матрицы Ω

$$(\chi, \Omega\phi_2) = \overline{(\phi_2, \Omega^*\chi)} = \overline{(\phi_2, \Omega\chi)} = 0,$$

которая, в свою очередь, следует либо из равенства (28)–(30), либо может быть проверена непосредственным вычислением.

Таким образом, поиск решений уравнения (32) третьего вида сводится к поиску унитарных матриц, одно из собственных значений которых равно 1, и которые удовлетворяют условию (40). Пусть u – собственное значение такой матрицы, отвечающее собственному вектору ϕ_1 . Тогда матрица U может быть представлена в следующем виде

$$U_3 = u\phi_1 \cdot \phi_1^* + \phi_2 \cdot \bar{\phi}_2^* = \begin{pmatrix} |w|^2 + u|z|^2 & (u-1)z\bar{w} \\ (u-1)w\bar{z} & u|w|^2 + |z|^2 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

У этой матрицы нам важна только диагональ, все остальные элементы группируются в определитель U_3 , равный u

$$\begin{aligned} \det\left(U_3 - \frac{-jI + \tilde{\Xi}}{ijI + \tilde{\Xi}}\right) &= \left| \begin{array}{cc} |w|^2 + u|z|^2 - \frac{\bar{\xi}-j}{\xi+ij} & (u-1)z\bar{w} \\ (u-1)w\bar{z} & u|w|^2 + |z|^2 - \frac{\bar{\xi}+j}{\xi-ij} \end{array} \right| \\ &= u - (|w|^2 + u|z|^2) \frac{\bar{\xi}+j}{\xi-ij} - (u|w|^2 + |z|^2) \frac{\bar{\xi}-j}{\xi+ij} + \frac{\bar{\xi}-j}{\xi+ij} \frac{\bar{\xi}+j}{\xi-ij} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно решить относительно u , получится

$$u = -\frac{\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}\xi - i + 1 + j(\xi + i\bar{\xi})(|z|^2 - |w|^2)}{\xi^2 - \xi\xi + i + 1 - j(\xi + i\bar{\xi})(|z|^2 - |w|^2)}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1. \quad (42)$$

Здесь в правой части стоит отношение двух взаимносопряженных комплексных чисел, следовательно полученное решение u лежит на единичной окружности, то есть является собственным значением унитарной матрицы. При этом разным значениям величины $|z|^2 - |w|^2$, которая параметризует вектор ϕ_1 и может изменяться в пределах от -1 до 1 , отвечают разные собственные значения u . И ни при каких значениях величины $|z|^2 - |w|^2$ собственное значение u не становится равным 1.

Таким образом, мы видим, что для каждой пары чисел z и w , таких, что $|z|^2 + |w|^2 = 1$, можно построить решение уравнения (32). А значит, множество решений уравнения (32) третьего вида совпадает с множеством ортогональных проекторов ранга 1 в пространстве \mathbb{C}^2 , то есть со сферой Римана или с проективным пространством \mathbf{CP}^1 .

Резольвента оператора, соответствующего решению U_3 , строится по формуле, аналогичной (36). Однако, теперь, из-за наличия у U_3 собственного значения равного 1, ранг матрицы $\beta_{ab}(i\rho^2)$ равен 1, а не

2

$$\begin{aligned}\beta(i\rho^2) &= \frac{1}{4\sqrt{2}\pi i\rho}(V_3 - I)\tilde{\mathcal{A}}^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi i\rho}\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}(V_3 - I)\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2} \\ &= \frac{u}{4\sqrt{2}\pi i\rho}(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1) \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)^*,\end{aligned}$$

и матрицы, обратной к $\beta_{ab}(i\rho^2)$ не существует. Матрицу $\beta_{ab}(\lambda)$ из формулы (36) необходимо искать из уравнения

$$\beta_{ab}(\lambda) = \beta_{ab}(i\rho^2) + (\lambda - i\rho^2)\beta_{ac}(\lambda)(D_\lambda^c, D_{i\rho^2}^d)\beta_{db}(i\rho^2),$$

где аналитические векторы и скалярное произведение $(D_\lambda^c, D_{i\rho^2}^d)$ по-прежнему не зависят от параметра U_3 и определяются формулами (34)–(35), (37)–(39). Представим матрицу $\beta_{ab}(\lambda)$ в следующем виде

$$\beta_{ab}(\lambda) = \kappa(\lambda)(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_a \overline{(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_b},$$

тогда для коэффициента $\kappa(\lambda)$ получается линейное уравнение

$$\kappa(\lambda) = \frac{u}{4\sqrt{2}\pi i\rho} \left(1 + (\lambda - i\rho^2)\kappa(\lambda) \overline{(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_c} (D_\lambda^c, D_{i\rho^2}^d) (\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_d \right),$$

из которого можно найти величину, обратную к $\kappa(\lambda)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa(\lambda)} &= \frac{4\sqrt{2}\pi i\rho}{u} - (\lambda - i\rho^2) \overline{(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_c} (D_\lambda^c, D_{i\rho^2}^d) (\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_d \\ &= 4\sqrt{2}\pi i\rho \left(\frac{1}{u} - \frac{|z|^2}{\sqrt{2}i + \xi - \bar{\xi}} \left(i\frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} - ij + \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{ij\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{|w|^2}{\sqrt{2}i + \bar{\xi} - \xi} \left(i\frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} - ij - \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x^1-x^2|} - e^{ij\rho|x^1-x^2|}}{\rho|x^1-x^2|} \right) \right).\end{aligned}$$

Ядро резольвенты R_3 при этом выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}R_3(x, y; \lambda) &= R_1(x, y; \lambda) + \kappa(\lambda)(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_a \overline{(\tilde{\mathcal{A}}^{-1/2}\phi_1)_b} D_\lambda^a(x) \overline{D_\lambda^b(y)} \\ &= R_1(x, y; \lambda) + \kappa(\lambda) \left(\frac{zD_\lambda^1(x)}{\left(1 - \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{wD_\lambda^2(x)}{\left(1 - \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{zD_\lambda^1(y)}{\left(1 - \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{wD_\lambda^2(y)}{\left(1 - \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sqrt{2}i}\right)^{\frac{1}{2}}} \right).\end{aligned}$$

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели множество замкнутых расширений квадратичной формы оператора Лапласа в трехмерном пространстве, порожденных взаимодействием с двухточечным сингулярным потенциалом и удовлетворяющих свойствам однородности (ковариантности по отношению к дилатации). Помимо тривиального, расширения, удовлетворяющие перечисленным свойствам разбиваются на два типа: первый содержит единственное расширение, определяемое унитарным оператором (33), в то время как расширения второго типа параметризуются точкой на сфере Римана и определяются унитарным оператором (41) с нетривиальным собственным значением (42). Для указанных расширений были получены выражения для ядер резольвент соответствующих самосопряженных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, *Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом*. — Доклады АН СССР, **137**, вып. 5 (1961), 1011–1014.
2. S. Albeverio, P. Kurasov, *Singular Perturbation of Differential Operators. Solvable Schrödinger type Operators*. Cambridge University Press, 2000.
3. K. Friedrichs, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren*. — Math. Ann. **109**, 1934, 465–487.
M. Stone, in: *Linear Transformations in Hilbert spaces and their Applications in Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloquim Publication **15**, 1932; также см. теорему X.23 в [4].
4. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность*. М. Мир, 1978.
5. М. G. Krein, *The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications*. — Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., **20** (62) (1947), 431–495; Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., **21** (64) (1947), 365–404.
6. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве*. М. Наука, 1966.

Bolokhov T. A. Homogeneous extensions of the quadratic form of Laplace operator for the field interacting with two point-like particles.

We consider the set of the closed homogeneous extensions of the quadratic form of Laplace operator, generated by interaction with two point-like sources. We show that this set consists of the trivial (maximal) extension, one point and the subset equivalent to the Riemann sphere.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: timur@pdmi.ras.ru

Поступило 29 ноября 2017 г.