

Ф.Х. Арсланов

К ДОСТАТОЧНЫМ УСЛОВИЯМ ОДНОЛИСТНОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ
РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Решения внутренней и внешней обратных краевых задач (ОКЗ) определяются соответственно интегральными представлениями [1, гл. I], [2, § 33]

$$f(z) = \int_{z_0}^z \exp \left[(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right] dz, \quad (1)$$

$$F(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \exp \left[(-2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta \right] d\zeta, \quad (2)$$

где $z, z_0 \in E = \{z: |z| < 1\}$, $\zeta, \zeta_0 \in E^- = \{\zeta: |\zeta| > 1\}$, $\rho(\theta), \mathcal{P}(\theta)$ — вещественные и 2π — периодические функции. В работах многих авторов получен ряд признаков однолиственности функций $f(z)$, $F(\zeta)$ в форме ограничений на плотности $\rho(\theta)$, $\mathcal{P}(\theta)$ и их производные (см., напр., обзор [3]). Из них наиболее часто используются признаки, включающие в себя условие принадлежности $\rho^{(k)}(\theta)$, $\mathcal{P}^{(k)}(\theta)$ классу Липшица. Известно, что класс Липшица включается в класс функций, обладающих ограниченной полной вариацией. Поэтому имеет смысл провести исследование однолиственности функций $f(z)$, $F(\zeta)$ в предположении, что функции $\rho^{(k)}(\theta)$, $\mathcal{P}^{(k)}(\theta)$ из класса функций с ограниченной полной вариацией.

В связи с этим для любых целых $n \geq 1$, $k \geq 0$ рассмотрим класс 2π -периодических функций

$$P_A(n, k) = \left\{ u(\theta) : \int_0^{2\pi} u^{(k)}(\theta) \leq A, \int_0^{2\pi} u(\theta) e^{ij\theta} d\theta = 0, j = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Удовлетворение функциями $\rho(\theta)$, $\mathcal{P}(\theta)$ второй части условий в оп-

разделении $P_A(n, k)$ обеспечивает разложения вида $f'(z) = 1 + a_n z^n + \dots$, $F'(z) = 1 + b_n z^{-n} + \dots$. Из условия однозначности решений ОКЗ следует, что $n \geq 2$ в разложении $F'(z)$.

В доказательствах теорем важную роль играют следующие оценки.

Л е м м а I [4]. Пусть $S(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, регулярна в E и принадлежит классу функций H_1 [5]. Предположим, что $u(\theta) = \text{Res}(e^{i\theta}) \in P_A(n, k)$, $k \geq 0$. Тогда в круге $\{z: |z| \leq r < 1\}$ справедливы оценки

$$|s(z)| \leq \frac{A(2n-1)}{\pi n^{k+1}} L_k(r^n), \quad (3)$$

$$|\text{Res}(z)| \leq \frac{A(2n-1)}{\pi n^{k+1}} l_k(r^n), \quad |\text{Im}s(z)| \leq \frac{A(2n-1)}{\pi n^{k+1}} L_k(r^n) \quad (4)$$

при k четном;

$$|\text{Res}(z)| \leq \frac{A(2n-1)}{\pi n^{k+1}} L_k(r^n), \quad |\text{Im}s(z)| \leq \frac{A(2n-1)}{\pi n^{k+1}} l_k(r^n) \quad (5)$$

при k нечетном, где

$$L_k(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu / \nu^{k+1}, \quad l_k(r) = r + \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu-1)!! r^{2\nu+1} / (2\nu)!! (2\nu+1)^{k+1} \leq \pi r / 2.$$

При $k \geq 1$ $L_k(r) \leq \zeta(k+1)$, $\zeta(x)$ - дзета-функция Римана, $x > 1$.

Для функции $S(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{-n-1} + \dots$, $n \geq 1$, регулярной в E^- в предположении, что $S(1/z) \in H_1$, $z \in E$, и $U(\theta) = \text{Res}(e^{i\theta}) \in P_A(n, k)$, $k \geq 0$, справедливы оценки (3) - (5) в области $\{z: |z| \geq r^{-1} > 1\}$.

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов.

Теорема I. Пусть функция $f(z)$ определена формулой (I), где $p(\theta) \in P_A(n, 0)$, $n \geq 1$. Если $A \leq \pi n / 2(2n-1)$, то функция $f(z)$ однолистка в E .

Доказательство. Из (I) дифференцированием получаем

$$\ln f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta.$$

Поскольку $p(\theta) = \operatorname{Re} \ln f'(e^{i\theta})$ — функция с ограниченной полной вариацией, то она ограничена: $|p(\theta)| \leq M$, $M = \text{const}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$|\operatorname{Re} \ln f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} |p(\theta)| d\theta \leq M,$$

т.е. $\ln f'(z) \prec h_0(z) = 2M(\pi i)^{-1} \ln[(1+z)/(1-z)]$ (\prec — знак подчинения) [6, с. 356]. А так как $h_0(z) \in H_1$, то на основании известного неравенства [6, с. 357] получаем

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |\ln f'(re^{i\theta})| d\theta \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |h_0(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Поэтому $\ln f'(z) \in H_1$. Так как $\ln f'(z)$ в точке $z=0$ имеет нуль порядка n , то по лемме I

$$|\operatorname{Re} \ln f'(z)| \leq \frac{A(2n-1)}{\pi n} \arcsin |z|^n \leq \frac{A(2n-1)}{2n}. \quad (6)$$

Для оценки $|f''(z)/f'(z)|$ воспользуемся следующей леммой.

Л е м м а 2 [7]. Пусть функция $g(z) = C_0 + C_n z^n + \dots$, $n \geq 1$ регулярна в E и $m \leq \operatorname{Reg} g(z) \leq M$. Тогда

$$|g'(z)| \leq 2(M-m)n|z|^{n-1}/\pi(1-|z|^{2n}), \quad z \in E.$$

Взяв теперь $g(z) = \ln f'(z)$ и учитывая, что (6) дает неравенства $-A(2n-1)/2n \leq \operatorname{Reg} g(z) \leq A(2n-1)/2n$, получим

$$|f''(z)/f'(z)| \leq 2A(2n-1)|z|^{n-1}/\pi(1-|z|^{2n}), \quad z \in E.$$

Отсюда в силу неравенства $n r^{n-1}(1-r^2) \leq 1-r^{2n}$, $n \geq 1$, $r \in [0, 1]$, следует

$$|\mathcal{F}''(z)/\mathcal{F}'(z)| \leq 2A(2n-1)/\pi n(1-|z|^2), \quad z \in E.$$

Достаточное условие однолиственности в \bar{E} Беккера (см., напр., [8, с.42])

$$|\mathcal{F}''(z)/\mathcal{F}'(z)| \leq 1/(1-|z|^2), \quad z \in E$$

выполняется, так как $2A(2n-1)/\pi n \leq 1$. Поэтому функция однолистка в \bar{E} . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть функция $\mathcal{F}(z)$ определена формулой (2), где $P(\theta) \in P_B(n, 0)$, $n \geq 2$. Если $B \leq \pi n/4(2n-1)$, то функция $\mathcal{F}(z)$ однолистка в E^- .

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 для функции $\ln \mathcal{F}'(z)$ получим оценку $|\operatorname{Re} \ln \mathcal{F}'(z)| \leq B(2n-1)/2n$. Применение леммы 2 для функции $g(z) = \ln \mathcal{F}'(1/z)$, $z = 1/\zeta \in E$ и неравенства $n\tau^{n-2}(1-\tau^2) \leq 2(1-\tau^n)$, $n \geq 2$, $\tau \in [0, 1]$, дает

$$|\zeta \mathcal{F}''(\zeta)/\mathcal{F}'(\zeta)| \leq 4B(2n-1)/\pi n(|\zeta|^2 - 1), \quad \zeta \in E^-.$$

А так как $4B(2n-1)/\pi n \leq 1$, то достаточное условие однолиственности Беккера

$$|\zeta \mathcal{F}''(\zeta)/\mathcal{F}'(\zeta)| \leq 1/(|\zeta|^2 - 1), \quad \zeta \in E^- \quad (7)$$

выполняется и, следовательно, $\mathcal{F}(z)$ однолистка в E^- . Поскольку оценки, используемые при доказательстве, неточны, то при выполнении условий теоремы для функции $\mathcal{F}(z)$ будет существовать такое $\alpha < 1$,

что $|\zeta \mathcal{F}''(\zeta)/\mathcal{F}'(\zeta)| \leq \alpha/(|\zeta|^2 - 1)$, $\zeta \in E^-$. Это неравенство означает [9] возможность квазиконформного продолжения на всю комплексную плоскость. Следовательно, граница $\mathcal{F}(E^-)$ будет простой кривой. Этим замечанием, которое будем иметь в виду в случаях применения признака (7), закончим доказательство теоремы.

Доказательства теорем 1 и 2 пригодны и для обоснования однолиственности представлений (1) и (2) в случаях, когда $P(\theta) \in P_A(n, k)$.

$P(\theta) \in P_B(n, k)$ с $k \geq 1$. Однако, как выяснилось, лучшие значения постоянных A и B получаются в следующих теоремах.

Теорема 3. Пусть в (I) $\rho(\theta) \in P_A(n, 1)$, $n \geq 1$. Функция $f(z)$, представленная формулой (I), будет однолистной в E , если $A = 2\pi(2n-1)t^{2-n}(1-t^n)(1-t^2)^{-2}$, где t , $0 < t < 1$ - единственный корень уравнения

$$n\tau^{n-2}(1-\tau^2) + 2(1-\tau^n)\ln(1-\tau^n) = 0, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (8)$$

Доказательство. Из (I) нетрудно получить

$$h(z) = iz [\ln f'(z)]' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho'(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta.$$

Как и при доказательстве теоремы I, установим, что $h(z) \in H_1$. Функция $h(z)$ в точке $z=0$ имеет нуль порядка n , следовательно, по лемме I

$$|zf''(z)/f'(z)| \leq A(2n-1)\ln(1-|z|^n)^{-1}/\pi n, \quad z \in E.$$

Если $\max_{z \in E} (1-|z|^2)\ln(1-|z|^n)^{-1} = 2\pi/A(2n-1)$, то условие Беккера выполнено, поэтому функция $f(z)$ будет однолистной в E .

Пусть $\Psi(\tau) = (1-\tau^2)\ln(1-\tau^n)^{-1}$, $\tau \in [0, 1]$. Поскольку $\Psi(0) = \Psi(1-0) = 0$, то максимум функции $\Psi(\tau)$ достигается во внутренней точке t интервала $(0, 1)$, причем $\Psi'(t) = 0$. Уравнение $\Psi'(\tau) = 0$ на $(0, 1)$ равносильно

$$\Psi(\tau) = n(1-\tau^2)\tau^2(1-\tau^n) + 2\tau^{n-1}\ln(1-\tau^n) = 0, \quad (9)$$

или, что то же самое, уравнению (8), так как $\Psi'(\tau) = \tau^{n+1}\Psi(\tau)$. Так как $\Psi(+0) = +\infty$, $\Psi(1-0) = -\infty$, то (9) имеет единственный корень, если $\Psi'(\tau) < 0$, $\tau \in (0, 1)$. Последнее неравенство имеет место. Действительно,

$$\Psi'(\tau) = n\tau^{-3} \frac{n\tau^n(1-\tau^2) - 2(1-\tau^n)}{(1-\tau^n)^2} + 2 \frac{(1-\tau^n)\ln(1-\tau^n)^{-1} - n\tau^{n-1}}{\tau^n(1-\tau^n)},$$

и, применяя неравенства $(1-\tau^n) \ln(1-\tau^n)^{-1} \leq \tau^n$, $n\tau^n(1-\tau^2) \leq 1-\tau^{2n}$, $\tau \in [0,1]$, $n \geq 1$, получим

$$\Psi'(\tau) \leq n\tau^{-3} \frac{\tau(1+\tau^n)-2}{1-\tau^n} - \frac{\tau^n - n\tau^{n-1}}{\tau(1-\tau^n)} < 2 \frac{\tau-n}{\tau(1-\tau^n)} < 0.$$

Итак, уравнение (8) имеет единственный корень в точке $\tau = t$, и функция $\Psi(\tau)$ достигает своего наибольшего значения, равного

$$\Psi(t) = (1-t^2) \ln(1-t^n)^{-1} = (n/2)t^{n-2}(1-t^2)^2(1-t^n)^{-1} = n\pi[A(2n-1)]$$

Теорема доказана.

В таблице I для $n=1, \dots, 5$ приведем приближенные значения

Т а б л и ц а I

n :	I :	2 :	3 :	4 :	5 :
t	0,705	0,795	0,856	0,870	0,890
A	5,116	5,912	7,147	8,680	10,271
$\tilde{\tau}$		0	0,705	0,778	0,835
B		2,094	4,318	6,033	7,718

ния корней t и соответствующих им величин A . Заметим, что при

$n=2$ уравнение (8) равносильно $1 + \ln(1-t^2) = 0$ или $1-t^2 = e^{-1}$.

Исключая $1-t^2$ из выражения для A , получим, что $A = 2\pi e/3$.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 4. Пусть в (2) $\mathcal{P}(\theta) \in \mathcal{P}_B(n,1)$, $n \geq 2$. Тогда функ-

ция $\mathcal{F}(\zeta)$, представленная формулой (2), будет однолистной в

\bar{E} , если $B = 2\pi(2n-1)^{-1} \zeta^{2-n} (1-\zeta^n)(1-\zeta^2)^{-2}$, где $\tilde{\tau}$,

$0 \leq \tilde{\tau} < 1$ - единственный корень уравнения

$$n\tau^n(1-\tau^2) + 2(1-\tau^n) \ln(1-\tau^n) = 0, \quad 0 \leq \tau < 1. \quad (10)$$

Оказалось, что для $n=2$ корень уравнения (10) вычисляется точно и равен $\tilde{\tau} = 0$, а $B = 2\pi/3$. Для $n=3,4,5$ приближенные значения $\tilde{\tau}$ и B указаны в таблице.

Теорема 5. Пусть в (I) $p(\theta) \in P_A(n, k)$, $n \geq 1$, $k \geq 2$.

Если $A \leq A(n, k) n^k$, где $A(n, k) = \pi n [2(2n-1)\zeta(k)]^{-1} [(n+2)/n]^{(n+2)/2}$, то функция $f(z)$, определенная формулой (I), однолистка в \bar{E} .

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3, для функции $h(z) = izf''(z)/f'(z)$ с действительной частью $p'(\theta)$ на окружности $\{z: |z|=1\}$ по лемме I имеем

$$|zf''(z)/f'(z)| \leq A(2n-1)\zeta(k)|z|^n/n^k, z \in E.$$

В силу равенства

$$\max_{0 \leq \tau \leq 1} [\tau^n(1-\tau^2)] = [n/(n+2)]^{(n+2)/2} 2/n, n \geq 1, \quad (II)$$

получаем, что при $[n/(n+2)]^{(n+2)/2} 2/n = \pi [A(n, k)n^k(2n-1)\zeta(k)]^{-1}$ условие Беккера выполняется, и поэтому функция $f(z)$ будет однолистной в \bar{E} . Теорема доказана.

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично, но при этом вместо неравенства (II) используется неравенство

$$\max_{0 \leq \tau \leq 1} [\tau^{n-2}(1-\tau^2)] = [(n-2)/n]^{(n-2)/2} 2/n, n \geq 2. \quad \text{Итак, справедлива}$$

Теорема 6. Пусть в (2) $q(\theta) \in P_B(n, k)$, $n \geq 2$, $k \geq 2$.

Если $B \leq B(n, k) n^k$, где $B(n, k) = \pi n [2(2n-1)\zeta(k)]^{-1}$

$[n/(n-2)]^{(n-2)/2} (B(2, k) = \pi [3\zeta(k)]^{-1})$, то функция $F(z)$,

определенная формулой (2), однолистка в \bar{E} .

Как показывают примеры, постоянные A и B в теоремах 5 и 6 не могут превосходить $4\pi n^k(n+1)$. Действительно, положим

$$\tilde{f}(z) = \int_0^z \exp \left[\frac{a}{i^{k-1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\sqrt{(\nu n)^k}} \right] dz = z \left(1 + \frac{a}{i^{k-1}} \frac{z^n}{n^k(n+1)} + \dots \right), a > 0, z \in E.$$

Нетрудно выяснить, что $p^{(k)}(\theta) = a \operatorname{Re} i \ln(1 - e^{i n \theta})^{-1}$, где $p(\theta) = \operatorname{Re} \ln \tilde{f}'(e^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Отсюда $\int_0^{2\pi} p^{(k)}(\theta) d\theta = 2a\pi n$. Если $a > 2n^{k-1}(n+1)$, то нарушается необходимое условие однолиственности, а именно неравенство $|a_n| \leq 2/n$ для функции $f(z) = z(1 + a_n z^n + \dots)$ [6, с. 474]. Поэтому $A \leq 4\pi n^k(n+1)$.

Аналогично устанавливается верхняя граница для B , и при этом рассматривается функция $\tilde{f}(z) = 1/\tilde{f}(1/z)$, $z \in E^-$.

Применим теперь оценки леммы I к исследованию однолиственности решения внутренней ОКЗ, имеющей угловые точки. Решение такой задачи определяется интегральным представлением

$$f(z) = c \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^m (1 - z/z_j)^{-\alpha_j} f'_0(z) dz, \quad z_0, z \in E, \quad (I2)$$

где $f'_0(z)$ — правая часть формулы (I) с заменой $p(\theta)$ на $p_0(\theta)$. Обращая точки $z_j = e^{i\varphi_j}$ при отображении $W = f(z)$ является угловой точкой кривой $\partial f(E)$ с внутренним углом $(1 - \alpha_j)\pi$, причем

$$0 < \alpha_j < 1, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq 2, \quad c = 2^{\sum_{j=1}^m \alpha_j / 2}$$

Л.А. Аксентьевым [10] и другими авторами (полное описание библиографии см. в [8]) получены достаточные условия в виде принадлежности функции $p_0(\theta) = \operatorname{Re} \ln f'_0(e^{i\theta})$ и ее производных классу Гельдера и, в частности, классу Липшица.

Теорема 7. Пусть в (I2) $p_0(\theta) \in P_A(n, k)$, $n > 1$. Тогда функция $f(z)$, определенная формулой (I2), будет однолистной в \bar{E} , если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $k=0$ и $A \leq (1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j) \pi n / 2(2n-1)$;
- 2) $k=1$ и $A \leq \pi n^2 / (2n-1)$.

Доказательство I. Из (I2) нетрудно получить

$$z f''(z) / f'(z) = \sum_{j=1}^m \alpha_j z / (z_j - z) + z f''_0(z) / f'_0(z). \quad (I3)$$

В силу условий теоремы имеем $|zf''_0(z)/f'_0(z)| \leq 2A(2n-1)/\pi n(1-|z|^2)$, $z \in E$ (см. доказательство теоремы 1). Для оценки первого слагаемого в (13) заметим, что

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{z}{z_j - z} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \operatorname{Re} \frac{z}{z_j - z} \geq -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \alpha_j.$$

Это дает возможность применить оценки из работы [II], на основании которых имеем

$$\left| \sum_{j=1}^m \alpha_j z / (z_j - z) - a |z|^2 / (1 - |z|^2) \right| \leq a |z| / (1 - |z|^2), \quad z \in E.$$

Здесь через a обозначена величина $\sum_{j=1}^m \alpha_j$. Вычитая из обеих частей равенства (13) $a |z|^2 / (1 - |z|^2)$, получим

$$\left| (1 - |z|^2) z f''(z) / f'(z) - a |z|^2 \right| \leq 2A(2n-1) / \pi n + a.$$

Так как $2A(2n-1) / \pi n + a \leq 1$, то достаточное условие однолистности Альфorsa [9]

$$\left| (1 - |z|^2) z f''(z) / f'(z) - b |z|^2 \right| \leq 1, \quad z \in E, \quad (14)$$

где $|b| \leq 1$, b — комплексное число, выполняется и, следовательно, $f(z)$ однолистка в E . В действительности в силу неточности оценок в (14) будет строгое неравенство. Поэтому с привлечением рассуждений, как при доказательстве теоремы 2, можно убедиться в однолистности $f(z)$ в замкнутой области E .

2. Доказательство приведем по схеме доказательства теоремы из [8]. Из (12) получаем, что $f'(z)/g'(z) = f'_0(z)$, $z \in E$, где

$$g'(z) = c \prod_{j=1}^m (1 - z/z_j)^{-\alpha_j}.$$

По принципу максимума для гармонических функций $\operatorname{Re} [f'(z)/g'(z)] \geq$

$$\geq \operatorname{Re} f'_0(e^{i\theta}) = \exp p_0(\theta) \cdot \cos q_0(\theta), \quad q_0(\theta) = \int_m \ln f'_0(e^{i\theta})$$

По лемме I в силу условий теоремы выполняется неравенство $|q_0(\theta)| \leq \pi/2$. Поэтому $\operatorname{Re} [f'(z)/g'(z)] \geq 0$, $z \in E$. Так как $a = \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq 2$,

то, как показано в первой части доказательства теоремы, функция $g(z)$ является выпуклой. Поэтому на основании результатов работы [12] заключаем, что функция $f(z)$ однолистка (почти выпукла) в E . Теорема доказана.

Постановка задачи предполагает, что $\sum_{j=1}^m \lambda_j \leq 2$, однако условия I теоремы дают признак однолиственности (I2) при более жестком ограничении на $\partial f(E) : \sum_{j=1}^m \lambda_j \leq 1$. Предположив дифференцируемость функции $p_0(\theta)$, как это сделано в условии 2, удалось обобщить однолиственность (I2), не ограничивая класс решений внутренней ОКЗ.

В заключение рассмотрим достаточные условия единственности решения внешней ОКЗ. В работе [13] (см. также [1, с.51]) С.Н.Кудряшовым установлена единственность решения $F(z)$, которое определено формулой (2), при условии $\sqrt[2\pi]{P(0)} < \pi$, а также при условии $\sqrt[2\pi]{P'(0)} < 2\pi k$, $k = 1,71\dots$. Использовался такой критерий: функция $F(z)$ будет единственным решением задачи, если только

$$|z F''(z) / F'(z)| < 2 / (|z|^2 - 1), \quad z \in E^-.$$

В силу сходства между этим условием и условием Беккера достаточно привести формулировку теоремы.

Теорема 8. Пусть в (2) $P(\theta) \in P_D(n, k)$, $n \geq 2$. Функция $F(z)$ — единственное решение внешней ОКЗ, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $k = 0$, $D \leq \pi n / 2 (2n - 1)$;
- 2) $k = 1$, $D \leq 2B$;
- 3) $k \geq 2$, $D \leq 2B(n, k) n^k$.

Здесь B и $B(n, k)$ те же, что и в теоремах 4 и 6 соответственно.

Заметим, что первое и второе условия теоремы 8 дают единственность с меньшими постоянными в оценках при $n=2$ на полную вариацию, чем в утверждениях из [13]. Здесь учтено влияние пропусков в разложении в ряд $F(z)$.

Автор выражает глубокую признательность Л.А.Аксентьеву за внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Тумашев Г.Г., Нужи́н М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.

3. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолиственности аналитических функций // УМН. 1975. Т.30. № 4. С.3 - 60.

4. Арсланов Ф.Х. Некоторые достаточные условия однолиственности и единственности решений обратных краевых задач / Казан. ун-т. - Казань, 1988. - 19 с. - Деп. в ВИНТИ 21.03.1988, №2174-В88.

5. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М.: ГИТТИ, 1950.

6. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

7. Авхадиев Ф.Г. Некоторые достаточные условия однолиственности и их применение к обратным краевым задачам: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Казань, 1972.

8. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М. Достаточные условия конечнолиственности аналитических функций и их приложения // Математический анализ. М., 1987. Т.25. С.3 - 120.

9. Ahlfors L.V. Sufficient conditions for quasi-conformal extension // Ann. Math. Studies. 1974. V.79. P.23 - 29.

10. Аксентьев Л.А. Об однолистной разрешимости обратных краевых задач // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. Вып. II. С.9 - 18.

11. Аксентьев Л.А., Нежметдинов И.Р. Достаточные условия однолиственности некоторых интегральных представлений // Тр. семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. Вып. 18. С.3 - 11.

12. Карлан W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. 1952. V.1. N 2. P.169 - 185.

13. Кудряшов С.Н. О единственности решения внешних обратных краевых задач // Материалы 4-й науч. конф. аспирантов Ростов. ун-та. Ростов-н/Д., 1962. С.56 - 59.