1997. Т. 33, № 5. С. 606 — 613

УДК 517.938

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В F-ПРОСТРАНСТВАХ

И. В. Гайшун

Введение. В работе [1] рассмотрены дискретные уравнения в F-пространствах и изучены их простейшие свойства, в частности установлены некоторые признаки устойчивости решений. Понятие F-пространства определено как некий синтез алгебраической структуры, близкой к структуре векторного пространства, и структуры частичного порядка. Отличительной особенностью F-пространства по сравнению с известными алгебраическими структурами [2] является наличие множества нейтральных элементов, образующего нижнюю полурешетку относительно некоторого частичного порядка, специальным образом согласованного с алгебраической структурой. Как отмечается в [1], основной мотивацией изучения такого объекта является теория нечетких множеств [3, 4], в которой структуры, аналогичные F-пространствам, возникают естественным образом.

В настоящей работе продолжается исследование дискретных линейных уравнений в F-пространствах и изучаются вопросы управляемости таких уравнений, причем в качестве управляющих последовательностей выбираются как последовательности точек конечномерного векторного пространства, так и последовательности элементов некоторого F-пространства.

1. F-Пространства и линейные операторы в них. Приведем сначала необходимые сведения об F-пространствах и линейных операторах в них.

Согласно [1], F-векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел (или кратко F-пространство) — это непустое множество, на котором определены операции сложения элементов

$$E \times E \ni (p,q) \to p+q \in E, \tag{1}$$

умножения элементов на числа

$$\mathbb{R} \times E \ni (\alpha,p) \to \alpha p \in E \tag{2}$$

и выделено множество $\mathcal{O}$ нейтральных элементов, при этом множество $\mathcal{O}$ и операции (1), (2) подчинены следующим требованиям.

Относительно операции (1) E — коммутативная полугруппа, а множество $\mathcal{O}$ частично упорядочено отношением $\geq$ и является нижней полурешеткой, т.е. для любых элементов o_1, o_2 из $\mathcal{O}$ существует точная нижняя грань $\inf(o_1,o_2)$, принадлежащая $\mathcal{O}$.

Структуры полугруппы и порядка согласованы следующим образом: $o_1+o_2=\inf(o_1,o_2)$ для любых o_1, o_2 из $\mathcal{O}$; при каждом $p\in E$ множество $\mathcal{O}_p=\{o\in\mathcal{O} : p+o=p\}$ не пусто и обладает наименьшим элементом o_p, называемым индивидуальным нулем точки p.

Замечание. Из того, что множество E является коммутативной полугруппой относительно операции (1) и что нижняя полурешетка $\mathcal{O}$ в нем удовлетворяет условию согласования $\inf(o_1,o_2)=o_1+o_2$, не следует, вообще говоря, непустота множества $\mathcal{O}_p$. Кроме того, если $\mathcal{O}_p\neq\varnothing$, то необязательно в множестве $\mathcal{O}_p$ содержится наименьший элемент. В самом деле, если $E=(0,1]\cup\{2\}$, $\mathcal{O}=(0,1]$, $p+q=\min(p,q)$, причем на $\mathcal{O}$ задан естественный порядок, то множество $\mathcal{O}_p$ для точки $p=2$ пусто. Если же $E=(0,1]$, $\mathcal{O}=(1/2,1]$ с теми же порядком и операцией сложения, то для $p=1/2$ имеем $\mathcal{O}_p=(1/2,1]$, значит, в множестве $\mathcal{O}_p$ нет наименьшего элемента.

Обратный элемент $(-p)$ точки $p \in E$ определяется следующим образом. Сначала структура частичного порядка из $\mathbb{O}$ переносится на E по правилу: $p \geq q$ тогда и только тогда, когда $q = p + o$ для некоторого $o \in \mathbb{O}$. Затем строится множество $N_p = \{n \in E : p + n = o_p\}$, причем предполагается, что оно не пусто и обладает наименьшим элементом $(-p)$, который и называется обратным для p. Сумма $q + (-p)$ обозначается $q - p$.

Операция (2) подчинена следующим аксиомам: для любых α, β из $\mathbb{R}$ и p, q из E справедливы равенства $(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$, $(-1) = -p$, $(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p$, $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$.

Таким образом, F-пространство в отличие от векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ имеет не один, а целое множество нейтральных элементов, и, как следствие этого, получается многозначность отображения $p \to N_p$, ставящего в соответствие точке p множество N_p ее "обратных" элементов. Если множество $\mathbb{O}$ состоит из одного элемента, то F-пространство есть векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Пример 1. Пусть $E = V \times \mathbb{N}$, где V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, а $\mathbb{N}$ — множество положительных целых чисел. Предположим, что множество $\mathbb{N}$ упорядочено следующим образом: $m \leq n$ тогда и только тогда, когда n делится на m. В этом случае нижняя грань $\inf(m, n)$ двух чисел m, n из $\mathbb{N}$ определяется как наибольший общий делитель этих чисел. Зададим в E операции (1), (2) по правилу: $(x, m) + (y, n) = (x + y, \inf(m, n))$, $\alpha(x, m) = (\alpha x, m)$. Тогда E — F-пространство над $\mathbb{R}$ с множеством $\mathbb{O} = \{0\} \times \mathbb{N}$ нейтральных элементов (здесь 0 — нулевой элемент пространства V и $(0, m) \leq (0, n) \iff m \leq n$). Для любого $p = (x, m) \in E$ имеем $o_p = (0, m)$, $(-p) = (-x, m)$.

Подмножество E_1 F-пространства E называется подпространством, если $E_1 + E_1 \subset E_1$, $\mathbb{R}E_1 \subset E_1$. Всякое подпространство E_1 есть F-пространство над полем $\mathbb{R}$ с множеством нейтральных элементов $\mathbb{O}_1 = \mathbb{O} \cap E_1$ и индуцированными из E операциями сложения элементов и умножения их на скаляры.

Далее предполагаем, что множество $\mathbb{O}$ нейтральных элементов удовлетворяет аксиоме F_6) из [1]: $\mathbb{O}$ является отрезком в упорядоченном множестве E, т.е. если для $p \in E$, $o \in \mathbb{O}$ выполняется $p \geq o$, то $p \in \mathbb{O}$. Тогда бинарное отношение ρ на E, определяемое условием "$p\rho q \iff p - q \in \mathbb{O}$", есть эквивалентность на E, согласующаяся с операциями (1), (2). Поэтому в фактор-пространстве $E_0 = E/\rho$ корректно определены сложение элементов и умножение их на скаляры по следующим правилам:

$$[p] + [q] = [p + q], \quad \alpha[p] = [\alpha p], \tag{3}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $[p]$ — класс элемента p. Операции (3) превращают E_0 в векторное пространство над $\mathbb{R}$, которое называется носителем F-пространства E.

Любая точка $p \in E$ однозначно определяется парой $([p], o_p)$; точнее, две точки p, q из E совпадают тогда и только тогда, когда $[p] = [q]$, $o_p = o_q$. Элемент $[p] \in E_0$ назовем *носителем* точки p, а элемент $o_p \in \mathbb{O}$ — ее *степенью*. Значит, две точки p, q из E совпадают, если и только если равны их носители и степени.

Пусть E и H — F-пространства над $\mathbb{R}$ с множествами нейтральных элементов $\mathbb{O}$ и Δ. Отображение $A : E \to H$ называется линейным, если для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, p, q из E справедливы равенства $A(\alpha p) = \alpha A(p)$ (свойство однородности) и $A(p + q) = A(p) + A(q)$ (свойство аддитивности).

Так как при всяком $o \in \mathbb{O}$ и $0 \in \mathbb{R}$ выполняются тождества $A(o) = A(0 \cdot o) = 0A(o)$, то $A(\mathbb{O}) \subset \Delta$. Поэтому из соотношения $q = p + o$ следует, что $A(q) = A(p) + A(o)$; значит, неравенство $p \geq q$ влечет за собой неравенство $A(p) \geq A(q)$, т.е. линейное отображение сохраняет порядок.

Множество $\{p \in E : A(p) \subset \Delta\}$ называется ядром оператора A и обозначается $\ker A$. Легко проверить, что $\ker A$ — подпространство пространства E.

Обозначим через δ_h индивидуальный нуль элемента $h \in H$.

Лемма 1. *Для любого $p \in E$ выполняется равенство $\delta_{A(p)} = A(o_p)$. В частности, если E — векторное пространство, то $\delta_{A(p)}$ не зависит от p и $\delta_{A(p)} = A(0)$, где 0 — нулевой элемент пространства E.*

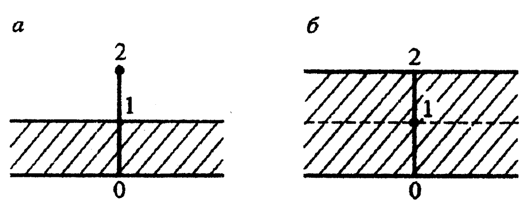
Доказательство. По определению обратного элемента имеем $\delta_{A(p)} = A(p) - A(p)$. С другой стороны, $A(p) - A(p) = A(p-p) = A(o_p)$. Значит, $\delta_{A(p)} = A(o_p)$. Вторая часть леммы следует из того, что в случае векторного пространства $o_p = 0$ для каждого $p \in E$. Лемма доказана.

Взаимно однозначное линейное отображение $A : E \to H$ называется изоморфизмом F-пространств E и H. Сюръективное линейное отображение $A : E \to H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\ker A = \mathcal{O}$ и A осуществляет биекцию $\mathcal{O}$ на Δ.

Обозначим через E' произведение $E_0 \times \mathcal{O}$. Если в E' определить операции сложения элементов и их умножения на числа из $\mathbb{R}$ покоординатно, то E' будет F-пространством с множеством $\mathcal{O}' = \{(\mathcal{O}, o) : o \in \mathcal{O}\}$ нейтральных элементов. Очевидно, что отображение $\gamma : p \to ([p], o_p)$ осуществляет *канонический* изоморфизм F-пространства E на подпространство F-пространства E'.

Отметим, что подпространство $\gamma(E)$ может не совпадать с E'. В самом деле, рассмотрим

Пример 2. Пусть $E = (\mathbb{R}\times[0,1])\cup(\{0\}\times[0,2])$, $\mathcal{O} = \{0\}\times[0,2]$, $(0,o_1) \le (0,o_2) \Longleftrightarrow o_1 \le o_2$, $p + q = (x + y, \min(o_1, o_2))$, $\alpha p = (\alpha x, o_1)$ для $\alpha \in \mathbb{R}$, $p = (x, o_1)$, $q = (y, o_2)$ из E. Тогда $E' = E_0 \times \mathcal{O} = \mathbb{R} \times [0,2]$, а $\gamma(E) = E$, т.е. $\gamma(E)$ — собственное подмножество пространства E' (см. рисунок, где *а* — $E = \gamma(E)$, *б* — $E' = E_0 \times \mathcal{O}$).



Для того чтобы выполнялось равенство $\gamma(E) = E'$, необходимо и достаточно выполнения условия $\mathcal{O} = \{o_p : p \in E, p\bar{\in}\mathcal{O}\}$. Ясно, что без ограничения общности это условие можно считать выполненным.

Воспользовавшись изоморфностью F-пространств E и E', дадим следующее описание линейного оператора $E \to H$. Пусть $\gamma : E \to E' = E_0 \times \mathcal{O}$, $\varepsilon : H \to H' = H_0 \times \Delta$ — канонические изоморфизмы E на E' и H на H'.

Канонической формой линейного отображения $A : E \to H$ назовем линейное отображение $\varepsilon \circ A \circ \gamma^{-1} : E' \to H'$.

Теорема 1. *Если в множестве $\mathcal{O}$ существует наименьший элемент $\underline{o}$, то оператор $A : E \to H$ линеен тогда и только тогда, когда его каноническая форма $A' = \varepsilon \circ A \circ \gamma^{-1}$ имеет вид*

$$A'(r, o) = (A_0 r, Q(o)), \tag{4}$$

где A_0 — линейное отображение E_0 в H_0, $Q : \mathcal{O} \to \Delta$ — изоморфизм нижних полурешеток, т.е. $Q(o_1 + o_2) = Q(o_1) + Q(o_2)$ для любых o_1, o_2 из $\mathcal{O}$.

Доказательство. Достаточность. Ясно, что отображение A', определенное формулой (4), есть линейное отображение E' в H'. Но тогда и отображение $A = \varepsilon^{-1} \circ A' \circ \gamma$ линейно как композиция линейных отображений ε^{-1}, A', γ.

Необходимость. Если отображение $A : E \to H$ линейно, то линейно и отображение $A' : E' \to H'$. Обозначим $A'(r, o) = (A'_1(r, o), A'_2(r, o))$, где $A'_1(r, o) \in H_0$, $A'_2(r, o) \in \Delta$. Так как A' однородно, то $A'_2(\alpha r, o) = A'_2(r, o)$ при $\alpha \in \mathbb{R}$. Полагая $\alpha = 0$, получаем $A'_2(r, o) = A'_2(0, o)$, где 0 — нуль пространства E_0. Значит, $A'_2(r, o)$ не зависит от $r \in E_0$, т.е. $A'_2(r, o) = Q(o)$. В силу аддитивности A' имеем $Q(o_1 + o_2) = Q(o_1) + Q(o_2)$.

Поскольку $A'_1(v_1 + v_2, \underline{o}) = A'_1(v_1, \underline{o}) + A'_1(v_2, o)$ для любого $o \in \mathcal{O}$, то $A'_1(v_2, \underline{o}) = A'_1(v_2, o)$, т.е. $A'_1(v, o)$ не зависит от $o \in \mathcal{O}$. Полагая $A_1(v, o) = A_0 v$, получаем требуемое представление (4). Теорема доказана.

Замечание. Достаточность теоремы 1 справедлива без требования наличия в множестве $\mathcal{O}$ наименьшего элемента.

Пример 3. Если $E = V \times [0,1]$, где V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\mathcal{O} = \{0\} \times [0,1]$ с естественным порядком, то по теореме 1 отображение $A : E \to E$ будет линейным тогда и только тогда, когда $A(x, o) = (A_0 x, q(o))$, где $A_0 : V \to V$ — линейный оператор, а отображение $q : [0,1] \to [0,1]$ не убывает. Если же, как и в примере 1, $E = V \times \mathbb{N}$, то линейным оператором $E \to E$ будет всякое отображение $(x, m) \to (A_0 x, m^p)$ при условии, что $p \in \mathbb{N}$.

2. Линейные процессы управления в F-пространствах. Пусть E и H — F-пространства над полем $\mathbb{R}$ с множествами нейтральных элементов $\mathbb{O}$ и Δ, $A : E \to E$ и $B : H \to E$ — линейные операторы. *Линейным процессом управления* назовем последовательность (p_t) элементов из E, определяемую из уравнения

$$p_{t+1} = A(p_t) + B(u_t) \quad (t = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

где u_t — элемент F-пространства H. Отображение $t \to u_t$ или последовательность $u = (u_t)$ трактуется как управление и может выбираться произвольным образом.

Пусть управляющая последовательность (u_t) фиксирована и q — заданный элемент из E. Полагая $p_0 = q$, из уравнения (5) рекуррентным образом находим, что

$$p_t = A^t(q) + \sum_{i=0}^{t-1}(A^i B)(u_{t-i-1}) \quad (t = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

(здесь степень A^t оператора A определяется по индукции исходя из условий $A^0(p) = p$, $A^{i+1}(p) = A^i(A(p))$, $p \in E$, $i = 1, 2, \ldots$, а $(A^i B)(v) = (A^i(B(v))$, $v \in H$).

Последовательность (p_t), определенную формулой (6), будем называть решением уравнения (5), соответствующим начальному условию $p_0 = q$ и управлению $u = (u_t)$. (Если это необходимо, то такое решение будем обозначать $p_t = p_t(q, u)$, подчеркивая этим его зависимость от начального условия и управления.)

Укажем более удобное для дальнейшего представление уравнения (5). Для этого воспользуемся тем, что точка $p \in E$ однозначно определяется ее носителем и степенью. Пусть E_0 и H_0 — носители F-пространств E и H. Определим операторы $A_0 : E_0 \to E_0$, $B_0 : H_0 \to E_0$, исходя из равенств $A_0[p] = [Ap]$, $B_0[v] = [Bv]$, которые должны выполняться при всех $p \in E$, $v \in H$. Очевидно, что такое определение отображений A_0, B_0 корректно в том смысле, что векторы $A_0[p]$, $B_0[v]$ не зависят от представителей p, v классов $[p]$ и $[v]$. Легко проверить, что A_0, B_0 — линейные операторы из E_0 в E_0 и из H_0 в E_0 соответственно.

Учитывая свойства отображений $p \to o_p$ и $p \to [p]$ (см. формулы (3)), получаем, что носители $[p_t]$ точек p_t и их степени $o_t = o_{p_t}$ описываются уравнениями

$$[p_{t+1}] = A_0[p_t] + B_0[u_t], \tag{7}$$

$$o_{t+1} = A(o_t) + B(\delta_t), \tag{8}$$

где δ_t — степени точек u_t. Уравнение (7) будем называть уравнением в носителях, а уравнение (8) — уравнением в степенях для точек p_t.

Имея решения уравнений (7), (8), можно однозначно восстановить последовательность (p_t) — решение уравнения (5). Значит, систему (7), (8) следует рассматривать как эквивалентное представление уравнения (5).

Замечание. Систему (7), (8) можно получить и исходя из теоремы 1. Действительно, производя в уравнении (5) замену неизвестной последовательности (p_t) и управляющей последовательности (u_t) по формулам $q_t = \gamma(p_t)$, $v_t = \varepsilon(u_t)$, придем к уравнению $q_{t+1} = (\gamma \circ A \circ \gamma^{-1})(q_t) + (\gamma \circ B \circ \varepsilon^{-1})(v_t)$ в пространстве E', которое с точностью до обозначений совпадает с системой (7), (8).

Далее будем исследовать частный случай уравнения (5), получающийся при $H = \mathbb{R}$ и соответственно при $B = b$, где b — элемент пространства E. Следовательно,

$$p_{t+1} = A(p_t) + bu_t \quad (t = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где $u_0, u_1, \ldots, u_t, \ldots$ — действительные числа. Для уравнения (9) соотношения (7), (8) имеют вид (см. лемму 1)

$$[p_{t+1}] = A_0[p_t] + [b]u_t, \quad o_{t+1} = A(o_t) + o_b \quad (t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Отметим, что последовательность (o_t) в (10) не зависит от управления $u = (u_t)$.

3. Управляемость линейных процессов. Исследование задач управляемости начнем с уравнения (9). Если E — векторное пространство, понятие управляемости, как известно, определяется следующим образом [5]: уравнение (9) называется управляемым, когда существует такое целое число $T > 0$, что для любых точек q, r из E найдется управление $u = (u_t)$, обеспечивающее равенство $p_T(q, u) = r$. Однако в случае F-пространства такое определение непригодно, поскольку задача управляемости в таком смысле будет неразрешимой.

Действительно, фиксируем точку q. Согласно (10), имеем

$$o_T = A^T(o_q) + \sum_{i=0}^{T-1} A^i(o_b).$$

Поэтому степень o_T точки $p_T(q, u)$ определяется однозначно. Следовательно, точка r обязана удовлетворять равенству $o_r = o_T$. Значит, задача управляемости в указанном выше смысле для уравнения (9) неразрешима. Поэтому используем более слабое понятие управляемости, описываемое следующим определением.

Определение 1. Уравнение (9) назовем ρ-управляемым, если существует такое целое число $T > 0$, что для любых точек q, r из E найдется управление $u = (u_t)$, обеспечивающее включение $p_T(q, u) \in [r]$, где $[r]$ — класс элемента r по отношению эквивалентности ρ.

Теорема 2. *Если носитель E_0 F-пространства E конечномерен и* $\dim E_0 = n$, *то уравнение (9) ρ-управляемо тогда и только тогда, когда размерность линейной оболочки векторов $[b]$, $A_0[b], \ldots, A_0^{n-1}[b]$ равна n.*

Доказательство. Очевидно, что ρ-управляемость имеет место тогда и только тогда, когда для любых точек q, r из E найдется управление u, при котором $[p_T(q, u)] = [r]$. В силу (10) это означает, что уравнение $[p_{t+1}] = A_0[p_t] + [b]u_t$ в векторном пространстве E_0 управляемо в обычном смысле, а это, как известно, имеет место в том и только в том случае, когда линейная оболочка векторов $[b]$, $A_0[b], \ldots, A_0^{n-1}[b]$ совпадает с E_0, т.е. имеет размерность n. Теорема доказана.

Замечание. Без каких-либо принципиальных изменений теорема 2 распространяется на уравнение (5) в предположении, что H — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $B : H \to E$ — линейный оператор. Точнее, при таком предположении уравнение (5) ρ-управляемо тогда и только тогда, когда управляемо уравнение в носителях.

Поскольку, как уже отмечалось, степени o_t последовательности (p_t), задаваемой уравнением (9), не зависят от u, то определение 1 усилить невозможно. Однако в случае уравнения (5) управление $u = (u_t)$ влияет, вообще говоря, на степени o_t, поэтому возможны различные модификации определения 1. Одна из таких модификаций связана с возможностью осуществить включение $p_T(q, u) \in [r]$ таким образом, чтобы оптимизировать критерий качества $I(\delta)$, определенный на последовательности $\delta = (\delta_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$, состоящей из степеней δ_t точек $u_t \in H$ ($I(\delta)$, вообще говоря, зависит от q и r).

Сначала уточним, какой смысл вкладывается в понятие оптимизации критерия $I(\delta)$. Будем считать, что $I(\delta)$ при каждом δ принадлежит некоторому частично упорядоченному множеству и что последовательность δ^0 оптимизирует критерий $I(\delta)$, если $I(\delta^0) \geq I(\delta)$ для любого δ.

Определение 2. Уравнение (5) назовем оптимально ρ-управляемым по критерию $I(\delta)$, если существует такое целое число $T > 0$, что для любых точек q, r из E найдется управление $u = (u_t)$, обеспечивающее включение $p_t(q, u) \in [r]$ и оптимизирующее критерий $I(\delta)$.

Точно так же, как в теореме 1, получаем, что включение $p_T(q, u) \in [r]$ для произвольной пары q, r из E обеспечивается тогда и только тогда, когда линейная оболочка подпространств

$$B_0(H_0), \quad (A_0B_0)(H_0), \ldots, (A_0^{n-1}B_0)(H_0) \tag{11}$$

пространства E_0 совпадает с E_0 (естественно, при условии, что E_0 конечномерно и $\dim E_0 = n$).

Что касается оптимизации функционала $I(\delta)$, то в первую очередь отметим, что требование $p_T(q,u) \in [r]$ накладывает ограничения только на носители $[u_t]$ элементов последовательности $u = (u_t) \subset H$. Поэтому степени δ_t могут свободно выбираться исходя из условия оптимизации критерия $I(\delta)$.

Таким образом, задача оптимальной ρ-управляемости распадается на две независимые задачи: задачу управляемости для обыкновенного дискретного уравнения $[p_{t+1}] = A_0[p_t] + B_0[u_t]$ в конечномерном векторном пространстве E_0 и задачу оптимального управления для уравнения $o_{t+1} = A(o_t) + B(\delta_t)$ в нижней полурешетке $\mathbb{O}$ по критерию качества $I(\delta)$. Вторая задача в такой общей постановке может быть решена лишь при дополнительных предположениях.

Рассмотрим случай, соответствующий принципу продолжения Л. Заде оператора A_0 из пространства E_0 на множество $E' = E_0 \times \mathbb{O}$ (которое можно трактовать как совокупность нечетких точек на E_0). Согласно этому принципу, продолжением A_0 на E' служит отображение $A : E' \to E'$, для которого $A([p], o) = (A_0[p], o)$. Поэтому в уравнении (8) следует считать оператор A тождественным на $\mathbb{O}$, т.е. $A(o) = o$ для $o \in \mathbb{O}$. Значит, последовательность (o_t) имеет вид

$$o_t = o_q + B(\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{t-1}). \tag{12}$$

Выберем в качестве $I(\delta)$ степень o_T точки $p_T(q,u)$, где T — число из определения 2. Тогда оптимальная ρ-управляемость по критерию $I(\delta) = o_T$ означает возможность перевода точки q в точку множества $[r]$ с "максимальной" степенью.

Из формулы (12) следует, что $o_t \le o_q$ при любом $t = 1, 2, \ldots$ Поэтому "максимальная" степень o_T, которая в принципе может быть достигнута, должна совпадать с o_q. Для того чтобы этого добиться, сделаем следующие предположения. Будем говорить, что F-пространство E *ограничено сверху*, если в множестве $\mathbb{O}$ его нейтральных элементов существует наибольший элемент $\mathbf{o}$ (который необходимо удовлетворяет равенству $p + \mathbf{o} = p$ для любого $p \in E$, т.е. является *универсальным* нулем пространства E). Элемент $p \in E$, для которого $o_p = \mathbf{o}$, назовем *идеальным* (ср. с [6]). Пусть F-пространства E и H ограничены сверху; линейный оператор $A : E \to H$ назовем *полным*, если образ каждой идеальной точки $p \in E$ — идеальная точка в H.

Пример 4. Если, как и в примере 2, $E = V \times [0,1]$, то F-пространство E ограничено сверху, всякая идеальная точка $p \in E$ имеет вид $p = (x, 1)$, а оператор $A : E \ni (x, o) \to \to A(x, o) = (A_0 x, q(o)) \in E$ полный тогда и только тогда, когда $q(1) = 1$.

Замечание. Как показывает пример 2, в F-пространстве может содержаться не один, а целое множество универсальных нулей (т.е. таких элементов $o \in \mathbb{O}$, что $p + o = p$ для любого $p \in E$). Однако если множество $\mathbb{O}$ обладает наибольшим элементом, то он необходимо является универсальным нулем.

Теорема 2. *Пусть F-пространства E и H ограничены сверху, носители их конечномерны и $\dim E_0 = n$, оператор A тождествен на $\mathbb{O}$ и оператор B полный. Тогда задача оптимальной ρ-управляемости по критерию $I(\delta) = o_T$ разрешима в том и только в том случае, когда линейная оболочка множеств (11) совпадает с E_0. Управление $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1})$, решающее указанную задачу, может быть составлено из идеальных точек.*

Доказательство. Требование совпадения линейной оболочки множеств $B_0(H_0)$, $(A_0 B_0)(H_0), \ldots, (A_0^{n-1} B_0)(H_0)$ с пространством E_0 является необходимым и достаточным условием управляемости уравнения $[p_{t+1}] = A_0[p_t] + B_0[u_t]$ в носителях. Пусть для заданных q, r из E управление $[u] = ([u_0], [u_1], \ldots, [u_{T-1}])$ обеспечивает равенство $[p_T] = [r]$. Тогда управление $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1})$ для уравнения (5), состоящее из идеальных точек с ранее выбранными носителями $[u_0]$, $[u_1], \ldots, [u_{T-1}]$, приводит к включению $p_T(q,u) \in [r]$ и равенству $o_T = o_q$. Теорема доказана.

Пусть оператор A удовлетворяет неравенству

$$A(o) \ge o \quad (o \in \mathbb{O}). \tag{13}$$

Тогда для заданного $o_q \in \mathbb{O}$ последовательность $(o_{tq}) = (A^t(o_q))$ линейно упорядочена и

$$o_q \leq o_{1q} \leq \ldots \leq o_{tq} \leq \ldots \tag{14}$$

Поскольку в силу (6), (8)

$$o_t = A^t(o_q) + \sum_{i=0}^{t-1}(A^i B)(\delta_{t-i-1}),$$

то, предполагая F-пространства E и H ограниченными сверху, а операторы A, B полными и выбирая в качестве δ_t при любом t универсальный нуль $\bar{\delta}$ пространства H, можем достигнуть любого элемента последовательности (14). Поэтому при сделанных предположениях относительно пространств E и H и операторов A, B и при условии управляемости уравнения (7) справедливо следующее утверждение: для любой пары точек q, r из E и любого элемента o_{Tq} последовательности (14) существует управление $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1})$, обеспечивающее включение $p_T(q,u) \in [r]$ и равенство $o_T = o_{Tq}$. Подчеркнем, что здесь величина T зависит от выбора элемента o_{Tq}, а не определяется заранее, как это имеет место в теореме 3.

Пример 5. Если в примере 3 $q(o) = 2o - o^2$, то оператор A из этого примера удовлетворяет неравенству (13), а последовательность (14) строго монотонно возрастает при всех o_q, отличных от 0 и 1.

Определенный интерес представляет случай, когда в любой последовательности (14) лишь конечное число различных элементов, причем элемент, начиная с которого элементы становятся одинаковыми, есть универсальный нуль пространства E.

Итак, пусть F-пространство E ограничено сверху. Скажем, что полный оператор A обладает *свойством* (U), если для любого $o \in \mathbb{O}$ найдется целое число $T = T(o) > 0$, что

$$A^T(o) = \mathbf{o}, \tag{15}$$

а следовательно, и $A^{T+k}(o) = \mathbf{o}$ при каждом неотрицательном целом k. Ясно, что если оператор A удовлетворяет свойству (U), то существует минимальное $T > 0$, удовлетворяющее условию (15).

Пример 6. Пусть $\mathbb{O}$ — множество $\{0,1,2\}$ с естественным порядком. Определим оператор $A : V \times \mathbb{O} \to V \times \mathbb{O}$ (V — векторное пространство над $\mathbb{R}$) следующим образом: $A(x,o) = (A_0 x, q(o))$, где, как обычно, A_0 — линейное отображение V в V, а отображение $q : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ задается равенствами $q(0) = 1$, $q(1) = 2$, $q(2) = 2$. Легко проверить, что A — полный линейный оператор, обладающий свойством (U).

Определение 3. Уравнение (5) назовем идеально ρ-управляемым, если для любой пары точек q, r из E найдется целое число $T \geq 0$ и управление $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1})$, что $p_T(q,u) \in [r]$ и $o_T = \mathbf{o}$.

Теорема 4. *Пусть F-пространства E и H ограничены сверху, причем* $\dim E_0 = n < \infty$, $\dim H_0 < \infty$, *и операторы A, B полны. Уравнение (5) идеально ρ-управляемо тогда и только тогда, когда линейная оболочка множеств (11) совпадает с E_0 и оператор A обладает свойством (U).*

Доказательство. Необходимость. Так как идеальная ρ-управляемость влечет за собой управляемость уравнения (7) в носителях, то необходимость совпадения линейной оболочки множеств (11) с пространством E_0 следует из критерия Каллмана управляемости обыкновенных дискретных систем.

Пусть o — произвольный элемент из $\mathbb{O}$, q — точка из E со степенью o и r — некоторая фиксированная точка из E. По определению идеальной ρ-управляемости $o_T = \mathbf{o}$ для некоторого целого $T \geq 0$. Это значит, что выполняется соотношение

$$A^T(o) + \sum_{i=0}^{t-1}(A^i B)(\delta_{t-i-1}) = \mathbf{o},$$

из которого следует равенство $A^T(o) = \mathbf{o}$, т.е. оператор A обладает свойством (U).

Достаточность. Пусть q, r — любые точки из E и целое число $T \geq 0$ таково, что $A^T(o_q) = \mathbf{o}$. Выберем для $t = 0, 1, \ldots, T-1$ управление $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1})$ исходя из условий $[u_0] = [u_1] = \ldots = [u_{T-1}] = 0$, $\delta_0 = \delta_1 = \ldots = \delta_{T-1} = \bar{\delta}$. Тогда, согласно (7), (8), $[p_T(q, u)] = A_0^T[q]$, $o_T = A^T(o_q) = \mathbf{o}$. Обозначим через q' точку из E, для которой $[q'] = A_0^T[q]$, $o_{q'} = \mathbf{o}$. Так как уравнение в носителях (7) управляемо, то существует целое число $\tau > o$ и управление $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{\tau-1})$, состоящее из идеальных точек и обеспечивающее включение $p_\tau(q', v) \in [r]$. Рассмотрим управление $w = (u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{\tau-1})$. Легко подсчитать, что

$$p_{T+\tau}(q, w) = A^\tau(q') + \sum_{i=0}^{\tau-1}(A^i B)(v_{t-i-1}) + A^\tau \sum_{i=0}^{T-1}(A^i B)(u_{T-i-1}),$$

откуда $[p_{T+\tau}(q, w)] = [p_\tau(q', v)] = [r]$, $o_{T+\tau} = \mathbf{o}$. А это и означает, что уравнение (5) идеально ρ-управляемо. Теорема доказана.

Литература

1. *Гайшун И. В.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 147 — 154.
2. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.
3. *Zadeh L. A.* // Inform. and Control. 1965. Vol. 8. P. 338 — 353.
4. *Goguen J. A.* // Journ. of Math. Analysis and Appl. 1967. Vol. 18. P. 145 — 174.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., 1968.
6. *Гайшун И. В.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 2. С. 187 — 196.

Институт математики АН Беларуси

Поступила в редакцию
24 января 1997 г.