Ю. Г. Смирнов, Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТМ-поляризованной волны на дифракционной решетке, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2023, выпуск 1, 3–14

DOI: 10.21685/2072-3040-2023-1-1

УДК 517.958:535.4
doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-1

Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТМ-поляризованной волны на дифракционной решетке

Ю. Г. Смирнов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель работы – исследование дифракции ТМ-поляризованной электромагнитной волны на дифракционных решетках с несколькими штрихами на периоде. *Материалы и методы.* Для решения поставленной задачи применяется модифицированный метод разделения переменных. *Результаты.* Модифицированный метод разделения переменных применен к решению задачи дифракции ТМ-поляризованной электромагнитной волны на дифракционных решетках с несколькими штрихами на периоде. *Выводы.* Предложенный метод может использоваться для моделирования сложных дифракционных решеток с многослойным покрытием.

Ключевые слова: дифракционные решетки, модифицированный метод разделения переменных, электромагнитные волны, дифференциальные уравнения

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта 21-57-53001.

Для цитирования: Смирнов Ю. Г. Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТМ-поляризованной волны на дифракционной решетке // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 1. С. 3–14. doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-1

A modified method for separating variables in the diffraction problem of TM-polarized wave on diffraction grating

Yu.G. Smirnov

Penza State University, Penza, Russia

mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the work is to study the diffraction of a TM–polarized electromagnetic wave on diffraction gratings with several strokes on the period. *Materials and methods*. To solve the problem, a modified method of separation of variables is used. *Results*. The modified method for separatiing variables is applied to solving the problem of diffraction of a TM-polarized electromagnetic wave on diffraction gratings with several strokes on the period. *Conclusions*. The proposed method can be used to model complex diffraction gratings with a multilayer coating.

Keywords: diffraction gratings, modified method of separation of variables, electromagnetic TM-waves , differential equations

Financing: the research was financed by the RFBR and NNSF within the research project No. 21-57-53001.

For citation: Smirnov Yu.G. A modified method for separating variables in the diffraction problem of TM-polarized wave on diffraction grating. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(1):3–14. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-1

Введение

Проектирование многослойных дифракционных решеток проводится на основе расчетов дифракционной эффективности и оптимизации по небольшому числу параметров [1–3]. Для достижения нового уровня в проектировании многослойных дифракционных решеток требуется разработка высокопроизводительных методов решения прямой задачи дифракции поляризованной волны на решетке и применение современных методов оптимизации параметров покрытия и решетки.

В статье [4] был предложен новый численно-аналитический модифицированный метод разделения переменных для решения прямой задачи. Был рассмотрен случай TE-поляризации волны.

Исходная двумерная задача сводится к решению вспомогательной задачи сопряжения на собственные значения для одномерного дифференциального оператора второго порядка с разрывными коэффициентами. Собственные значения определяются численно как решения некоторого характеристического уравнения, зависящего от одной вещественной переменной. Собственные функции и решения исходной двумерной задачи получаются аналитически. Преимущество данного подхода заключается в «минимальном» использовании численных процедур, что позволяет построить быстрые вычислительные алгоритмы. Возможно решение задачи дифракции на структуре с произвольным количеством различных по ширине и электромагнитным характеристикам «штрихов».

На основе модифицированного метода разделения переменных был предложен, обоснован и реализован численный метод для решения задачи дифракции на дифракционной решетке, в котором может быть достигнута любая требуемая точность приближенного решения за счет увеличения количества численно определяемых собственных значений вспомогательной задачи. Особенность предложенного численного метода состоит в том, что для получения высокой точности достаточно учета первых нескольких собственных значений, что обеспечивает быстрое решение задачи даже на персональном компьютере [5].

Были реализованы вычислительные алгоритмы для решения задач распространения оптического и лазерного излучения, реализующие численные методы решения прямых задач – модифицированный метод разделения переменных. Вычислительные алгоритмы реализованы в виде пакетов прикладных программ на языке C++. Вычислялись коэффициенты прохождения и отражения (в различные порядки), дифракционная эффективность, электромагнитное поле в любой области структуры, энергетические характеристики.

Комплексы программ позволяют решать задачу в широком диапазоне частот. Предложены и разработаны параллельные вычислительные алгоритмы для решения прямых задач дифракции на препятствиях с многослойными покрытиями и дифракционными решетками [6, 7].

Выполнен сравнительный анализ метода плоских волн с предложенным методом для решения прямых задач дифракции [8].

Модифицированный метод разделения переменных позволил вычислять аналитически производные дифракционной эффективности по параметрам покрытия и решетки. Тем самым стало возможным применение градиентных методов оптимизации целевого функционала, оценивающего качество решения задачи проектирования [9]. Также совершенствования многослойных дифракционных решеток можно добиться и за счет увеличения числа допускающих оптимизацию параметров решетки. Естественным путем увеличения числа оптимизируемых параметров является рассмотрение решеток не с одним, а с большим числом штрихов в периоде.

Настоящая статья посвящена случаю ТМ-поляризации волны. В этом случае изменяются условия сопряжения на границе раздела сред, что приводит к ряду изменений в расчетных формулах. Однако основной подход к решению задачи дифракции остается прежним.

1. Постановка задачи

Пусть свободное от рассеивателя пространство характеризуется постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$. Рассмотрим двумерную прямоугольную дифракционную решетку, помещенную на многослойное отражающее покрытие (зеркало). Поперечное сечение дифракционной решетки представлено на рис. 1.

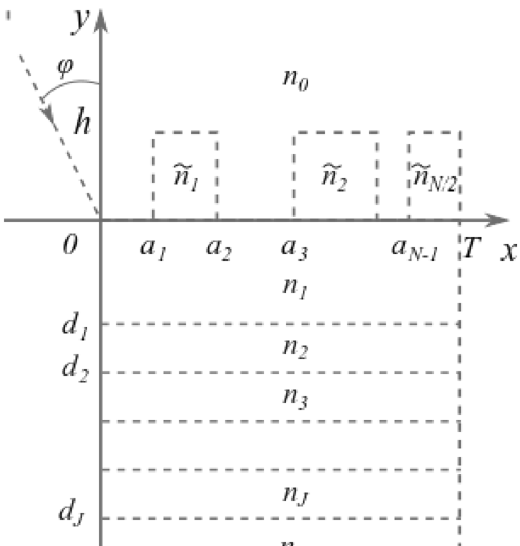

Рис. 1. Одномерно-периодическая диэлектрическая дифракционная решетка

Период решетки обозначен через $T > 0$, а высота штрихов решетки – $h > 0$.

На решетку под произвольным углом φ падает электромагнитная ТМ-волна. Падающее электромагнитное поле определяется продольной составляющей магнитного поля

$$u_0 = \exp\left(-ik_0 n_0 \left(x \sin\varphi - (y-h)\cos\varphi\right)\right).$$

Через $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ обозначено волновое число свободного пространства; λ_0 – длина волны; n_0 – показатель преломления свободного пространства. Рассмотрим показатель преломления $n(x,y)$, определяемый по формуле

$$n(x,y) = \begin{cases} \tilde{n}_i, a_{2i-1} < x < a_{2i}, 0 < y < h (i = \overline{1, N/2}), \\ n_j, d_j < y < d_{j-1} (j = \overline{1,J}), \\ n_0, \text{ иначе}, \end{cases}$$

здесь $N > 0$ – четное целое число; $N/2$ – количество штрихов решетки; $J \ge 0$ – количество слоев.

Требуется найти продольную составляющую $u(x,y)$ полного магнитного поля, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\left(\Delta + k_0^2 n^2(x,y)\right) u(x,y) = 0,$$

условию квазипериодичности Флоке [2],

$$u(x,y) = u(x+T, y) e^{ik_0 n_0 T \sin\varphi},$$

условию непрерывности на поверхности решетки, условиям сопряжения на границах раздела между слоями, условию излучения на бесконечности и условию конечности энергии в каждой ограниченной пространственной области. Обычно также определяют значения дифракционной эффективности основных порядков дифракции [1].

Представим отличную от нуля компоненту полного электрического поля в виде

$$u^{(0)}(x,y) = u_0(x,y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l z_l(x) \exp\left(-ik_{0,yl}(y-h)\right), \; y > h; \tag{1}$$

$$u^{(j)}(x,y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) \left(p_l^{(j)} \exp\left(ik_{j,yl}(y-d_j)\right) + q_l^{(j)} \exp\left(-ik_{j,yl}(y-d_j)\right)\right),$$

$$d_j < y < d_{j-1}, \tag{2}$$

где $z_l(x) := \exp\left(-i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \dfrac{2\pi l}{T}\right)x\right)$, $j = \overline{1,J}$, $p_l^{(J+1)} \equiv t_l$, $q_l^{(J+1)} \equiv 0$, $d_0 = 0$.

Коэффициенты $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ выражаются через t_l, как будет показано далее. Коэффициенты r_l и t_l – неизвестные амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l-х мод. Величины k_{xl}, $k_{j,yl}$ определяются соотношениями:

$$k_{xl} = k_0 n_0 \sin \varphi - \frac{2\pi l}{T},$$

$$k_{j,yl} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n_j^2 - k_{xl}^2}, & k_0 n_j > |k_{xl}|, \\ -i\sqrt{k_{xl}^2 - k_0^2 n_j^2}, & k_0 n_j < |k_{xl}|, \end{cases} \quad 0 \le j \le J+1.$$

Неограниченную двумерную область $V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le T\right\}$ решения задачи представим объединением открытых подобластей:

$$V_0 = \left\{(x,y) \in V : y > h > 0\right\},$$

$$V_1 = \left\{(x,y) \in V : 0 < y < h\right\},$$

$$V_j = \left\{(x,y) \in V : d_{j-1} < y < d_{j-2}\right\}, \ j = \overline{2, J+1},$$

и прямых: $S_h = \left\{(x,y) : y = h\right\}$ и $S_j = \left\{(x,y) : y = d_j\right\}$, $j = \overline{0, J}$.

Области V_0 и V_j, $j = \overline{2, J+1}$, однородны и характеризуются заданными волновыми числами (см. рис. 1). В области V_1 выделим подобласть $\bar{V}_T$ точек с абсциссой $x \in [0, T]$ и представим ее в виде

$$\bar{V}_T = \bigcup_i \overline{\prod_i}, \quad \prod_i = (a_i, a_{i+1}) \times (0, h), \ i = 0, \ldots, N-1.$$

Обозначено $a_0 = 0$, $a_N = T$.

В прямоугольниках $\prod_i$ значения волнового числа равны $\kappa_{2i} = k_0 n_0$, $\kappa_{2i+1} = k_0 \tilde{n}_{i+1}$, $i = \overline{0, N/2-1}$, и, вообще говоря, различны (см. рис. 1). Величина шага в решетке $a_{i+1} - a_i$ непостоянна, т.е. рассматриваются неравномерные решетки.

2. Модифицированный метод разделения переменных для решения задачи

Следуя [3], применим модифицированный метод разделения переменных для решения прямой задачи дифракции. Решение задачи в прямоугольниках $\prod_i$ будем искать в виде рядов

$$u(x,y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y), \tag{3}$$

требуя, чтобы функция $u(x,y)$ удовлетворяла уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике, а также условиям сопряжения на сторонах прямоугольников $\prod_i$, линиях разрыва показателя преломления в зеркале и условию квазипериодичности.

Применяя метод разделения переменных, получим, что функции Y_l имеют вид

$$Y_l(y) = b_l^{(1)} \exp\left(i\sqrt{\lambda_l}\, y\right) + b_l^{(2)} \exp\left(-i\sqrt{\lambda_l}\,(y-h)\right). \tag{4}$$

Функции $X_l(x)$ являются решениями краевых задач на собственные значения для дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\frac{X_l''}{X_l} + \kappa^2(x) = \lambda_l, \quad \kappa^2(x) = \kappa_i^2, \; x \in (a_i, a_{i+1});$$

$$X_l(0) = AX_l(T), \; X_l'(0) = AX_l'(T); \; [X_l] = \left[\kappa^{-2}(x) X_l'\right] = 0, \tag{5}$$

здесь

$$A = \exp\left(ik_0 n_0 T \sin\varphi\right) \; - \tag{6}$$

постоянная, входящая в условие квазипериодичности; $|A| = 1$.

Решение (3)–(6) будет точным решением задачи дифракции, полученным модифицированным методом разделения переменных.

Пусть $\gamma_i = \sqrt{\kappa_i^2 - \lambda_l}$. Из формул (5) получаем уравнения

$$X_l'' + (\kappa^2(x) - \lambda_l) X_l = 0,$$

решения которых имеют вид

$$X_l(x) = c_i \sin\gamma_i(x - a_i) + d_i \cos\gamma_i(x - a_i), \quad x \in (a_i, a_{i+1}),$$

а неизвестные коэффициенты определяются из условий сопряжения и условий квазипериодичности.

Из условий сопряжения во внутренних узлах a_{i+1} получаем систему из $(2N-2)$ уравнений:

$$c_i \sin\gamma_i\Delta_i + d_i \cos\gamma_i\Delta_i = d_{i+1},$$

$$c_i \cos\gamma_i\Delta_i - d_i \sin\gamma_i\Delta_i = c_{i+1}\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}\frac{\kappa_i^2}{\kappa_{i+1}^2}, \; 0 \le i \le N-2, \; \Delta_i := a_{i+1} - a_i, \tag{7}$$

а из условий квазипериодичности получим еще два уравнения:

$$d_0 = Ac_{N-1} \sin\gamma_{N-1}\Delta_{N-1} + Ad_{N-1} \cos\gamma_{N-1}\Delta_{N-1},$$

$$c_0\gamma_0 = A\gamma_{N-1}\left(c_{N-1} \cos\gamma_{N-1}\Delta_{N-1} - d_{N-1} \sin\gamma_{N-1}\Delta_{N-1}\right). \tag{8}$$

Таким образом, получена однородная система $2N$ уравнений для нахождения $2N$ неизвестных. Эта система имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы системы равен нулю.

Задача об отыскании собственных чисел λ_l задачи сводится к проблеме нахождения нулей некоторого определителя второго порядка, зависящего от спектрального параметра. Записывая уравнения (7), (8) в матричной форме

$$\left(c_{i+1}, d_{i+1}\right)^T = S_i\left(c_i, d_i\right)^T, \ 0 \le i \le N-2,$$

$$\left(c_0, d_0\right)^T = Q\left(c_N, d_N\right)^T,$$

сведем исходную систему линейных алгебраических уравнений к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left(c_0, d_0\right)^T = QS_{N-2}\ldots S_0\left(c_0, d_0\right)^T, \tag{9}$$

откуда получаем уравнение

$$\det\left(I - QS_{N-2}\ldots S_0\right) = 0. \tag{10}$$

В качестве $\left(c_0, d_0\right)^T$ можно взять любое нетривиальное решение системы (9) при $\lambda = \lambda_l$.

Определив собственные значения λ_l и собственные функции задачи (5), получим из (3) представление решения $u(x, y)$ в конечной области V_T

$$u(x, y) = \sum_{l=0}^{+\infty} X_l(x) Y_l(y)$$

с неизвестными коэффициентами $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$.

Заметим, что за счет выбора функций в (1)–(2) и выполнения условий (5) условия квазипериодичности автоматически выполняются.

Из условий сопряжения при $y = d_j$, $j = \overline{1, J-1}$, получаем

$$p_l^{(j)} + q_l^{(j)} = p_l^{(j+1)} \exp\Big(ik_{j+1,yl}\left(d_{j-1} - d_j\right)\Big) + q_l^{(j+1)} \exp\Big(-ik_{j+1,yl}\left(d_{j-1} - d_j\right)\Big),$$

$$\left(p_l^{(j)} - q_l^{(j)}\right) k_{j,yl} \frac{\kappa_{i+1}^2}{\kappa_i^2} = p_l^{(j+1)} k_{j+1,yl} \exp\Big(ik_{j+1,yl}\left(d_{j-1} - d_j\right)\Big) -$$

$$-q_l^{(j+1)} k_{j+1,yl} \exp\Big(-ik_{j+1,yl}\left(d_{j-1} - d_j\right)\Big).$$

Из последних формул находим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов:

$$p_l^{(j)} = \frac{1}{2}\Big(p_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + q_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} +$$

$$+\frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}}\frac{\kappa_i^2}{\kappa_{i+1}^2}\left(p_l^{(j+1)}P_l^{(j+1)}-q_l^{(j+1)}Q_l^{(j+1)}\right)\Bigg), \quad (11)$$

$$q_l^{(j)}=\frac{1}{2}\Bigg(p_l^{(j+1)}P_l^{(j+1)}+q_l^{(j+1)}Q_l^{(j+1)}-$$

$$-\frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}}\frac{\kappa_i^2}{\kappa_{i+1}^2}\left(p_l^{(j+1)}P_l^{(j+1)}-q_l^{(j+1)}Q_l^{(j+1)}\right)\Bigg), \quad (12)$$

где $P_l^{(j)}:=\exp\left(ik_{l,yj}\left(d_{j-1}-d_j\right)\right)$, $Q_l^{(j)}:=\exp\left(-ik_{l,yj}\left(d_{j-1}-d_j\right)\right)$, $j=\overline{1,J-1}$. Учитывая, что $p_l^{(J+1)}\equiv t_l$, $q_l^{(J+1)}\equiv 0$, все коэффициенты $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ выражаются через t_l. Тогда $p_l^{(1)}$ и $q_l^{(1)}$ могут быть записаны в виде $p_l^{(1)}=\tilde{p}_l^{(1)}t_l$, $q_l^{(1)}=\tilde{q}_l^{(1)}t_l$, где $\tilde{p}_l^{(1)}$ и $\tilde{q}_l^{(1)}$ определяются из (11), (12) при $\tilde{p}_l^{(J+1)}\equiv 1$, $\tilde{q}_l^{(J+1)}\equiv 0$.

Далее, коэффициенты r_l, t_l и $b_l^{(1)},b_l^{(2)}$ находятся из условий сопряжения при $y=0$ и $y=h$:

$$\sum_{l=0}^{+\infty}X_l(x)Y_l(h)=u_0(x,h)+\sum_{l=-\infty}^{+\infty}r_l z_l(x), \quad (13)$$

$$\frac{k_0^2n_0^2}{\kappa^2(x)}\sum_{l=0}^{+\infty}X_l(x)Y_l{}'(h)=u_0'(x,h)-\sum_{l=-\infty}^{+\infty}r_l ik_{0,yl}z_l(x), \quad (14)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty}X_l(x)Y_l(0)=$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}t_l z_l(x)\left(\tilde{p}_l^{(1)}\exp\left\{ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}+\tilde{q}_l^{(1)}\exp\left\{-ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}\right), \quad (15)$$

$$\frac{k_0^2n_1^2}{\kappa^2(x)}\sum_{l=0}^{+\infty}X_l(x)Y_l'(0)=$$

$$=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}ik_{1,yl}t_l z_l(x)\left(\tilde{p}_l^{(1)}\exp\left\{ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}-\tilde{q}_l^{(1)}\exp\left\{-ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}\right), \quad (16)$$

где в $u_0'(x,h)$ производная берется по y в точке h.

Заметим, что выражения справа в формулах (13)–(16) – это ряды Фурье функции на отрезке $[0,T]$. Умножая (13)–(16) на соответствующие экспоненты и интегрируя выражения от 0 до T, получаем два уравнения относительно $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$ для всех целых l:

$$-ik_{0,yl}\int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x)Y_p(h) - u_0(x,h)\right)dx =$$

$$= \int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x)Y_p'(h) - u_0'(x,h)\right)\frac{k_0^2 n_0^2}{\kappa^2(x)}dx, \quad (17)$$

$$ik_{1,yl}\left(\tilde{p}_l^{(1)}\exp\left\{ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\} - \tilde{q}_l^{(1)}\exp\left\{-ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}\right)\times$$

$$\times\int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x)Y_p(0)\right)dx =$$

$$= \left(\tilde{p}_l^{(1)}\exp\left\{ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\} + \tilde{q}_l^{(1)}\exp\left\{-ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}\right)\times$$

$$\times\int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} X_p(x)Y_p'(0)\right)\frac{k_0^2 n_1^2}{\kappa^2(x)}dx. \quad (18)$$

3. Численный метод решения задачи

Для численного решения задачи следует взять

$$u(x,y) = \sum_{l=0}^{M} X_l(x)Y_l(y)$$

для некоторого M. Тогда имеем $(2M+2)$ коэффициентов $b_l^{(1)}, b_l^{(2)}$. Выберем M четным числом. В уравнениях (17), (18) возьмем $(M+1)$ значений $l = -M/2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M/2$.

В результате получается система линейных алгебраических уравнений порядка $(2M+2)$:

$$-ik_{0,yl}\int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x)Y_p(h) - u_0(x,h)\right)dx =$$

$$= \int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x)Y_p'(h) - u_0'(x,h)\right)\frac{k_0^2 n_0^2}{\kappa^2(x)}dx, \quad (19)$$

$$ik_{1,yl}\left(\tilde{p}_l^{(1)}\exp\left\{ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\} - \tilde{q}_l^{(1)}\exp\left\{-ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}\right)\times$$

$$\times\int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x) Y_p(0)\right)dx =$$

$$=\left(\tilde{p}_l^{(1)}\exp\left\{ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}+\tilde{q}_l^{(1)}\exp\left\{-ik_{1,yl}(d_0-d_1)\right\}\right)\times$$

$$\times\int_0^T \exp\left\{i\left(k_0 n_0 \sin\varphi - \frac{2\pi l}{T}\right)x\right\}\left(\sum_{p=0}^{M} X_p(x) Y_p'(0)\right)\frac{k_0^2 n_1^2}{\kappa^2(x)}dx, \qquad (20)$$

где $l=-M/2,\ldots,-1,0,1,\ldots,M/2$.

Все интегралы в системе (19)–(20), которые определяют коэффициенты матрицы системы линейных алгебраических уравнений и коэффициенты правой части, вычисляются аналитически. Приближенные собственные значения λ_l определяются численно путем решения уравнения (10). Система (19)–(20), как правило, имеет небольшой порядок и может быть решена любым прямым методом, например методом Гаусса.

Заключение

В работе представлено применение модифицированного метода разделения переменных для решения задачи дифракции плоской волны на диэлектрической решетке с многослойным покрытием в случае ТМ-поляризации.

Получены расчетные формулы для определения приближенных собственных значений вспомогательной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами и система линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить коэффициенты отражения и прохождения в прямой задаче дифракции ТМ-поляризованной волны на периодической дифракционной решетке с прямоугольным профилем и несколькими штрихами в периоде.

Список литературы

1. Moharam M. G., Grann Eric B., Pommet Drew A. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. Vol. 12, iss. 5. P. 1068–1077.
2. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн : в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки. Киев : Наукова думка, 1986. 232 с.
3. Popov E. Gratings: Theory and Numeric Applications, Second Revisited Edition. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014.
4. Гусарова Е. В., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Об одном методе решения задачи дифракции электромагнитной волны на дифракционной решетке // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3. С. 31–38.
5. Smirnov Yu. G., Martynova V. Yu., Moskaleva M. A., Tikhonravov A. V. Modified method of separation of variables for solving diffraction problems on multilayer dielectric gratings // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2021. Vol. 9, № 4. P. 76–88.

6. Smirnov Yu. G., Martynova V. Yu., Wei Z., Cheng X., Tikhonravov A. V. Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, № 5. P. 1277–1284.
7. Qi H., Xie L., Zhu J., Wei Z., Jiao H., Smirnov Y. G., Tikhonravov A. V., Wang Z., Cheng X. High-efficiency, polarization-insensitive 1400-lines/mm retroreflective metagrating with cascaded nano-optical modes // Optics Letters. 2022. Vol. 47, № 16. P. 3972–3975.
8. Смирнов Ю. Г., Мартынова В. Ю., Москалева М. А., Цупак А. А. Анализ дифракционной эффективности дифракционных решеток модифицированным методом разделения переменных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 57–70.
9. Мартынова В. Ю., Смирнов Ю. Г., Тихонравов А. В. Оптимизация параметров многослойных дифракционных решеток с использованием игольчатых вариаций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. № 4. С. 56–68.

References

1. Moharam M.G., Grann Eric B., Pommet Drew A. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A.* 1995;12(5):1068–1077.
2. Shestopalov V.P., Kirilenko A.A., Masalov S.A., Sirenko Yu.K. *Rezonansnoe rasseyanie voln: v 2 t. T. 1. Difraktsionnye reshetki = Resonant wave scattering: in 2 t. T. 1. Diffraction gratings*. Kiev: Naukova dumka, 1986:232. (In Russ.)
3. Popov E. Gratings: *Theory and Numeric Applications, Second Revisited Edition*. Institut Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014.
4. Gusarova E.V., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. On one method for solving the problem of electromagnetic wave diffraction on a diffraction grating. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(3):31–38. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Moskaleva M.A., Tikhonravov A.V. Modified method of separation of variables for solving diffraction problems on multilayer dielectric gratings. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2021;9(4):76–88.
6. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Wei Z., Cheng X., Tikhonravov A.V. Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022;43(5):1277–1284.
7. Qi H., Xie L., Zhu J., Wei Z., Jiao H., Smirnov Y.G., Tikhonravov A.V., Wang Z., Cheng X. High-efficiency, polarization-insensitive 1400-lines/mm retroreflective metagrating with cascaded nano-optical modes. *Optics Letters*. 2022;47(16):3972–3975.
8. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Moskaleva M.A., Tsupak A.A. Study of diffraction efficiency of diffraction gratings by the modified method of variables separation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):57–70. (In Russ.)
9. Martynova V.Yu., Smirnov Yu.G., Tikhonravov A.V. Optimization of parameters of multilayer diffraction gratings using needle variations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022;(4):56–68. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Yuriy G. Smirnov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 09.01.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.02.2023

Принята к публикации / Accepted 16.03.2023