УДК 514.763.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТКАНЕЙ

М. А. Акивис

ВВЕДЕНИЕ

Теория тканей, основы которой были заложены еще в 20-х годах настоящего столетия в Гамбургской геометрической школе, руководимой В. Бляшке, продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время. При этом центр тяжести исследований переместился в сторону изучения различного рода многомерных тканей. Дифференциально-геометрические структуры, определяемые такими тканями на многообразиях, оказываются богатыми интересными свойствами и изучаются с разных точек зрения. Выясняются их связи с другими структурами, изучающимися в дифференциальной геометрии, а также с некоторыми другими разделами математики.

Особенно плодотворной оказалась связь теории многомерных тканей с теорией квазигрупп. Многомерные ткани позволили дать геометрическую реализацию для всех классов бинарных и n-арных квазигрупп, рассматриваемых в алгебре, что не удавалось сделать при рассмотрении тканей малых размерностей. Эта связь дала возможность построить основы теории локальных дифференцируемых квазигрупп.

Связь теории тканей с алгебраической геометрией отмечалась уже в начальном периоде развития теории тканей. В последние годы эта связь выявилась с новой силой. Проективные алгебраические многообразия позволяют строить интересные примеры многомерных тканей, а многомерные ткани общего типа можно рассматривать как некоторые обобщения алгебраических многообразий (см. [96]).

В последние годы обнаружились связи геометрии тканей с почти грассмановыми и почти комплексными структурами, с теорией симметрических пространств, с теорией точечных соответствий между тройками (и бóльшим числом) пространств, наделенных одинаковой структурой, с геометрической теорией дифференциальных уравнений т. д. Методы, развитые при изучении теории тканей, находят применение при исследовании других дифференциально-геометрических структур. Все это делает теорию тканей важным разделом современной дифференциальной геометрии.

Настоящий обзор является непосредственным продолжением первой части обзора [29]. За годы, прошедшие после публикации этого обзора, появилось много работ, посвященных различным вопросам теории тканей, и в большинстве из них изучаются многомерные ткани, а также различные алгебраические и геометрические структуры, связанные с ними. Именно эти работы рассматриваются в настоящем обзоре.

Ввиду ограниченности объема обзора в него не вошли вопросы, связанные с рангом тканей, интенсивно изучающиеся в настоящее время (см., например, [98]), а также некоторые специальные вопросы теории тканей и их приложений. К этим вопросам мы надеемся вернуться в следующем обзоре по теории тканей.

В обзоре не рассматриваются также вопросы теории тканей на двумерных многообразиях, несущих некоторую дифференциально-геометрическую структуру, хотя работы, посвященные этой тематике, еще продолжают появляться. Не рассматриваются в нем также задачи номографии, связанные с теорией двумерных тканей.

Вопросы алгебраической теории тканей, которым посвящена вторая часть обзора [29], в настоящем обзоре затрагивается лишь постольку, поскольку они связаны с геометрической теорией тканей.

В основном, в обзоре рассматривается локальный аспект теории тканей. Поэтому все многообразия, которые в нем встречаются, предполагаются дифференцируемыми и достаточно малыми, исключающими возможность появления особенностей. Работы, посвященные вопросам глобальной теории тканей на многообразиях, еще только начинают появляться (см. [102], [103]), и они не рассматриваются в настоящем обзоре.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТКАНЕЙ

Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности rn. d-тканью коразмерности r на M называется d гладких слоений, находящихся на M в общем положении. Такая ткань обозначается через $W(d, n, r)$.

Две ткани $W_1(d, n, r)$ и $W_2(d, n, r)$, заданные на многообразиях M_1 и M_2, называются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi: M_1 \to M_2$, при котором слои первой ткани переходят в слои второй.

Ткань $W(d, n, r)$ называется параллелизуемой, если она эквивалентна ткани, образованной в rn-мерном аффинном пространстве d слоениями, состоящими из параллельных плоскостей коразмерности r. Очевидно, что при $d \leqslant n$ ткань всегда параллелизуема. Поэтому далее предполагается, что $d \geqslant n+1$.

Обозначим через λ_u, $u=1, \ldots, d$ слоения, образующие ткань $W(d, n, r)$. Так как они находятся в общем положении на M, то в достаточно малой окрестности U_p каждой точки $p \in M$ их можно определить уравнениями $x_u^r = c_u^i$ $i=1, \ldots, r$, где переменные x_a^i, $\alpha=1, \ldots, n$, являются координатами в U_p, а переменные $x_\varkappa^i$, $\varkappa=n+1, \ldots, d$, выражаются через эти координаты в виде

$$x_\varkappa^i = f_\varkappa^i \left(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \ldots, x_n^{j_n}\right) \tag{1}$$

и $f_\varkappa^i$ — дифференцируемые функции. При этом для каждых фиксированных значений α и $\varkappa$

$$\det \left(\frac{\partial f_\varkappa^i}{\partial x_\alpha^j}\right) \neq 0.$$

Конечно, в качестве координат могут быть выбраны любые n из систем переменных x_u^i, определяющих ткань в U_p.

Каждое из слоений λ_u в окрестности U_p можно задать также с помощью системы 1-форм ω_u^i, удовлетворяющей условиям интегрируемости

$$d\omega_u^i = \omega_u^j \wedge \theta_{uj}^i \tag{2}$$

При этом любая система форм $\omega_{u_1}^i, \ldots, \omega_{u_n}^i$ будет линейно независимой, а все формы ω_u^i связаны системой, состоящей из $(d-n)r$ линейных уравнений.

При $d=n+1$ указанные лин[illegible]ые соотношения могут быть приведены к виду

$$\omega_1^i + \omega_2^i + \ldots + \omega_{n+1}^i = 0. \tag{3}$$

Эти соотношения остаются инвариантными при преобразованиях

$$'\omega_u^i = A_j^i \omega_u^j, \quad \det (A_j^i) \neq 0, \tag{4}$$

образующих группу $G_1 = GL(r)$ — структурную группу ткани $W(n+1, n, r)$. В силу (3) структурные уравнения (2) этих тканей могут быть записаны так:

$$\left.\begin{aligned} d\omega_\alpha^i &= \omega_\alpha^j \wedge \theta_j^i + \sum_{\beta \neq \alpha} a_{\alpha\beta}{}^i_{jk} \omega_\alpha^j \wedge \omega_\beta^k, \\ d\omega_{n+1}^i &= \omega_{n+1}^j \wedge \theta_j^i, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где $a_{\alpha\beta}{}^i_{jk}$ — тензор кручения ткани, удовлетворяющий соотношениям

$$a_{\alpha\beta}{}^i_{jk} = a_{\beta\alpha}{}^i_{kj}, \quad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}{}^i_{jk} = 0. \tag{6}$$

Формы θ_j^i определяют аффинную связность Γ_{n+1} на M и удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}{}^i_{jkl} \omega_\alpha^k \wedge \omega_\beta^l. \tag{7}$$

При $\omega^i_\alpha=0$ формы θ_j^i являются инвариантными формами структурной группы G_1 ткани $W(n+1, n, r)$. Величины $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jkl}$ образуют тензор кривизны ткани $W(n+1, n, r)$. Этот тензор удовлетворяет ряду конечных соотношений, которые показывают, что при $n\geqslant 3$ он полностью выражается через тензор $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$ и ковариантные производные последнего тензора. Ввиду этого ткань $W(n+1, n, r)$ при $n\geqslant 3$ будет параллелизуемой тогда и только тогда, когда ее тензор кручения $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$ тождественно обращается в нуль.

Так как на ткани $W(n+1, n, r)$ система базисных форм $\omega^i_{u\alpha}$ может быть выбрана $n+1$ способом и для каждого из них могут быть записаны структурные уравнения вида (5) и (7), то на M определяется $n+1$ аффинных связностей Γ_u. Слоения λ_u, образующие ткань $W(n+1, n, r)$, будут вполне геодезическими для каждой из этих связностей, а тензоры кручения и кривизны этих связностей выражаются через соответствующие тензоры связности Γ_{n+1}.

При $n=2$, т. е. для три-ткани $W(3, 2, r)$ структурные уравнения могут быть записаны также в виде [2].

$$\left.\begin{aligned} d\omega_1^i &= \omega_1^j\wedge\tilde{\theta}_j^i + a^i_{jk}\omega_1{}^j\wedge\omega_1^k \\ d\omega_2^i &= \omega_2^j\wedge\tilde{\theta}_j^i - a^i_{jk}\omega_2{}^j\wedge\omega_2^k \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

$$d\tilde{\theta}_j^i=\tilde{\theta}_j^k\wedge\tilde{\theta}_k^i+b^i_{jkl}\omega_1^k\wedge\omega_2^l, \tag{9}$$

где $\tilde{\theta}_j{}^i$ — 1-формы, определяющие новую связность $\tilde{\Gamma}_3$, $a^i_{jk}=-a^i_{kj}=\underset{12}{a}{}^i_{jk}$ — тензор кручения ткани $W(3, 2, r)$, а b^i_{jkl} — ее тензор кривизны. Эти тензоры связаны соотношениями

$$b^i_{[jkl]}=2a^m_{[jk}a^i_{|m|l]}, \tag{10}$$

$$\tilde{\nabla}a^i_{jk}=b^i_{[j|l|k]}\omega_1{}^l+b^i_{[jk]l}\omega_2{}^l, \tag{11}$$

где $\tilde{\nabla}$ — символ ковариантного дифференцирования в связности $\tilde{\Gamma}_3$. Для ткани $W(3, 2, r)$, как видно из предыдущих формул, симметричная часть тензора кривизны не выражается через тензор кручения и его ковариантные производные. Ввиду этого ткань $W(3, 2, r)$ будет параллелизуемой тогда и только тогда, когда на ней выполнены условия $a^i_{jk}=0$, $b^i_{(jkl)}=0$. Заметим, что структурные уравнения многомерной три-ткани в близкой к написанной выше форме были получены в работе [95] еще в 1936 г.

Выбирая на многообразии M, несущем три-ткань $W(3, 2, r)$, в качестве базисных формы ω_2^i, ω_3^i или ω_3^i, ω_1^i можно определить на нем связности $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$, аналогичные $\tilde{\Gamma}_3$. Эти связности были построены в работе [18]. Слоения λ_u ($u=1, 2, 3$) будут вполне геодезическими и для этих трех связностей. Тензоры кручения связностей $\tilde{\Gamma}_u$ совпадают, а их тензоры кривизны отличаются лишь перестановкой индексов. На ткани $W(3, 2, r)$ построена также средняя связность $\overset{*}{\Gamma}$.

Тензоры кривизны и кручения ткани $W(n+1, n, r)$ могут быть выражены через частные производные функций $f_{n+1}{}^i(x_\alpha{}^j)$, входящих в уравнения (1). Для $n=2$ эти выражения были найдены в работе [16].

Рассмотрим еще четыре-ткань $W(4, 2, r)$ на многообразии M размерности $2r$. Она содержит четыре три-подткани, образованные любыми тремя из четырех ее слоений. Подткань, образованная слоениями λ_{u^1}, λ_{u^2}, λ_{u_3} обозначается символом $\{u_1, u_2, u_3\}$. Соотношения, связывающие основные формы $\omega_u{}^i$ ткани $W(4, 2, r)$, могут быть приведены к виду

$$-\omega_3^i=\omega_1^i+\omega_2^i, \quad -\omega_4^i=\lambda_j^i\omega_1^j+\omega_j^2. \tag{12}$$

где $\det(\lambda_j^i)\neq0$, $\det(\delta^i_j-\lambda_j^i)\neq0$. Величины λ^i_j при преобразованиях типа (4) преобразуются по тензорному закону и образуют основной аффинор 4-ткани.

Структурные уравнения ткани $W(4, 2, r)$ состоят из структурных уравнений (8)—(11) ее подткани $\{1, 2, 3\}$ и уравнений

$$\tilde{\nabla}\lambda^i_j=\lambda^i_{jk}\omega_1{}^k+\mu^i_{jk}\omega_2^k,$$

где величины λ^i_{jk} и μ^i_{jk} удовлетворяют соотношениям

$$\lambda^i_{[jk]}-\mu^i_{[j|p|}\lambda^p_{k]}=\lambda^i_p a^p_{jk}+\lambda^p_{[k}\lambda^q_{j]}a^i_{pq}, \tag{13}$$

обеспечивающим полную интегрируемость системы форм $\omega_4{}^i$. Ткань $W(4, 2, r)$ будет параллелизуемой тогда и только тогда, когда параллелизуема ее подткань $\{1, 2, 3\}$, а основной аффинор ковариантно постоянен относительно связности, определяемой этой тканью, т. е. когда выполняются условия

$$a^i_{jk}=0, \quad b^i_{jkl}=0, \quad \lambda^i_{jk}=0, \quad \mu^k_{jk}=0. \tag{14}$$

§ 2. ТКАНИ И ПОЧТИ ГРАССМАНОВЫ СТРУКТУРЫ

Важный пример тканей $W(d, n, r)$ строится следующим образом [97], [11]. Пусть P^m — m-мерное проективное пространство, $G(m-r, m)$ — грассманово многообразие его $(m-r)$-мерных подпространств P^{m-r}, $\Sigma(x)$ — шубертово многообразие $(m-r)$-мерных подпространств, проходящих через точку $x\in P^m$. Гладкое многообразие $V\subset P^m$ размерности r определяет в некоторой области $D\subset G(m-r, m)$ слоение λ коразмерности r, слоями которого являются многообразия $\Sigma(x)$, где $x\in V$. Если в P^m задано d подмногообразий V_u, $u=1, \ldots, d$, $d\geqslant m-r+2$, размерности r общего положения, то в некоторой области U многообразия $G(m-r, m)$ они определяют d-ткань коразмерности r. Такую d-ткань назовем грассмановой. Так как $\dim G(m-r, m) = r(m-r+1)$, то для этой ткани $n=m-r+1$. Поэтому обозначим ее через $GW(d, m-r+1, r)$. При $d=3$, $m=r+1$ такие ткани изучались в работе [3].

Если все подмногообразия V_u, порождающие ткань $GW(d, m-r+1, r)$ принадлежат одному алгебраическому многообразию $V_d{}^r \subset P^m$ размерности r и степени d, то эта ткань называется алгебраической и обозначается через $AW(d, m-r+1, r)$.

В связи с этим возникают две важные проблемы теории тканей, которые сформулированы в работах [97] и [11]: (а) найти условия, при выполнении которых ткань $W(d, n, r)$ эквивалентна грассмановой ткани; (б) найти условия, при выполнении которых эта ткань эквивалентна алгебраической ткани. Первая из них называется проблемой грассманизуемости, а вторая — проблемой алгебраизуемости тканей.

При $r=1$ проблема грассманизуемости ткани эквивалентна проблеме ее линеаризуемости, состоящей в отыскании условий, при выполнении которых ткань $W(d, n, r)$ эквивалентна d-ткани, образованной в проективном пространстве P^{nr} плоскими слоениями коразмерности r.

При $r=1$ проблемы грассманизуемости и алгебраизуемости ткани рассматриваются в работе [97] и находят в ней достаточно полное решение. Это решение связано с понятием ранга ткани, и мы его не будем рассматривать в настоящем обзоре. А сейчас, следуя работе [11], выясним, как эти условия выглядят при $r \geqslant 2$.

Заметим прежде всего, что грассманово многообразие $G(m-r, m)$ допускает изображение в виде точечного алгебраического многообразия размерности rn, где $n=m-r+1$, в проективном пространстве P^N при $N=C^n_{m+1}-1$. Касательное пространство T_p к этому многообразию в его точке p пересекает его по конусу $C_p(r, n)$, несущему два семейства плоских образующих размерностей r и n, которые мы обозначим через $\xi_p(r)$ и $\zeta_p(n)$. Проективизация конуса $C_p(r, n)$ представляет собой многообразие Сегре $S(r-1, n-1) = P^{r-1} \times P^{n-1}$ (см. [84]). Поэтому и сам этот конус называется конусом Сегре. В P^m ему соответствует шубертово многообразие $(m-r)$-мерных подпространств, пересекающих выделенное подпространство $P^{m-r}=p$ по плоскостям размерности $m-r-1$.

В связи с этим естественно следующее определение: почти грассмановой структурой на многообразии M размерности rn называется g-структура, задаваемая на M дифференцируемым полем конусов $C_p(r, n) \subset T_p(M)$. Эта структура обозначается через $AG(n-1, n+r-1)$. Ее структурной группой является группа $G_2 = GL(r) \times SL(n)$ преобразований пространства $T_p(M)$, оставляющих инвариантным конус $C_p(r, n)$. Несколько иначе, но по существу эквивалентным способом, почти грассмановы структуры определены в работах [99], [63]. При $r=n=2$ конусы Сегре $C_p(2, 2)$ становятся конусами второго порядка. Поэтому почти грассманова структура $AG(1, 3)$ представляет собой псевдоконформную структуру $CO(2, 2)$ [68].

Почти грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$ называется r-полуинтегрируемой, если на M существует семейство r-мерных подмногообразий V^r таких, что $T_p(V^r)=\xi_p(r)$ и каждая образующая $\xi_p(r)$ конуса $C_p(r, n)$ касается одного и только одного подмногообразия V^r. Точно так же определяется и n-полуинтегрируемость почти грассмановой структуры. Если почти грассманова структура является одновременно r- и n-полуинтегрируемой, то она называется интегрируемой и, как следует из [63], будет локально-грассмановой структурой. При $r=n=2$ полуинтегрируемая структура $AG(1, 3)=CO(2, 2)$ называется автодуальной или антиавтодуальной [91]. Если же эта структура интегрируема, то она является конформно плоской.

Рассмотрим теперь ткань $W(n+1, n, r)$ на многообразии M размерности rn. Пусть $T_p(M)$ — касательное пространство к M в его точке p. Его подпространства $T_p(F_u)$, касательные к слоям F_u $(u=1, \ldots, n+1)$ этой ткани, проходящим через p, имеют коразмерность r и находятся в общем положении. Как доказано в работе [11], они определяют в $T_p(M)$ конус Сегре $C_p(r, n)$ с вершиной в p, по отношению к которому подпространства $T_p(F_u)$ конконичны, т. е. пересекаются с $C_p(r, n)$ по конусам $C_p(r, n-1)$. r-мерные плоские образующие конуса $C_p(r, n)$ называются изоклинными плоскостями ткани $W(n+1, n, r)$, а его n-мерные образующие — трансверсальными плоскостями. К семейству изоклинных r-плоскостей принадлежат $(n-1)$-кратные пересечения подпространств $T_p(F_u)$, касательных к слоям.

Так как ткань $W(n+1, n, r)$ предполагается дифференцируемой на M, то и определяемое ею поле конусов Сегре $C_p(r, n)$ будет дифференцируемым. Это поле конусов задает на M почти грассманову структуру $AG(n-1, n+r-1)$, связанную с тканью $W(n+1, n, r)$. Так как структурная группа G_1 такни $W(n+1, n, r)$ является подгруппой структурной группы G_2 почти грассмановой структуры $AG(n-1, n+r-1)$, то последняя является надструктурой для ткани $W(n+1, n, r)$ [14].

Если структура $AG(n-1, n+r-1)$, определяемая тканью $W(n+1, n, r)$, будет r-полуинтегрируемой, то ткань называется изоклинной, если эта структура n-полуинтегрируема, то ткань называется трансверсально геодезической. В последнем случае все n-мерные интегральные многообразия V^n структуры $AG(n-1, n+r-1)$ будут вполне геодезическими относительно всех аффинных связностей, определяемых на ткани.

Далее выводятся аналитические условия трансверсальной геодезичности и изоклинности тканей $W(n+1, n, r)$. А именно, при $n>2$ условие трансверсальной геодезичности записывается в виде

$$\underset{\alpha\beta}{a}{}^l_{jk} = \delta^l_{(j} \underset{\alpha\beta}{b}{}_{k)}, \tag{15}$$

а при $n=2$ (см. [2]) — в виде

$$b^l_{(jkl)} = \delta^l_{(j} b_{kl)}. \tag{16}$$

При $r>2$ условие изоклинности выглядит так:

$$\underset{\alpha\beta}{a}{}^l_{[jk]} = \delta^l_{[j} \underset{\alpha\beta}{a}{}_{k]}. \tag{17}$$

В частности, при $n=2$ оно записывается в виде (см. [5])

$$a^l_{jk} = \delta^l_{[j} a_{k]}. \tag{18}$$

При $r=2$ условия (17) и (18) выполняются автоматически. Поэтому условия изоклинности в этом случае выражаются через ковариантные производные тензоров $\underset{\alpha\beta}{a}{}_k$ и a_k соответственно (см. [19]).

Теперь легко формулируется решение проблемы грассманизуемости для ткани $W(n+1, n, r)$ при $r \geqslant 2$ (см. [11]): эта ткань будет грассманизуема тогда и только тогда, когда она одновременно изоклинна и трансверсально геодезична. Аналитические условия грассманизуемости состоят в одновременном выполнении условий изоклинности и трансверсальной геодезичности для соответствующих значений n и r. В частности, при $r>2$ и $n>2$ ткань $W(n+1, n, r)$ будет грассманизуема тогда и только тогда, когда ее тензор кручения имеет вид:

$$\underset{\alpha\beta}{a}{}^l_{jk} = \delta^l_k \underset{\alpha\beta}{\lambda}{}_j + \delta^l_j \underset{\beta\alpha}{\lambda}{}_k. \tag{19}$$

Рассмотрим далее ткань $W(d, n, r)$ при $d>n+1$. Каждая ее $(n+1)$-подткань определяет на многообразии M почти грассманову структуру $AG(n-1, n+r-1)$, но все эти структуры, вообще говоря, будут различными. Назовем ткань $W(d, n, r)$ почти грассманизуемой, если все почти грассмановы структуры, определяемые ее $(n+1)$-подтканями на многообразии M, совпадают. Для ткани $W(4, 2, r)$ условие почти грассманизуемости записывается в виде $\lambda^i_j = \lambda\delta^i_j$, где λ^i_j — основной аффинор этой ткани, входящей в уравнения (12). Аналогично записываются условия почти грассманизуемости и для $n>2$ [13]. Справедливой оказывается следующая теорема: Если ткань $W(d, n, r)$ при $d>n+1$ почти грассманизуема и $r>2$, то определяемая ею почти грассманова структура будет r-полуинтегрируемой, а сама ткань — изоклинной. Для $n=2$, $d=4$ доказательство этой теоремы легко следует из соотношения (13); для любых n и $d>n+1$ она доказана в [13].

Теперь легко решается вопрос о грассманизуемости тканей $W(d, n, r)$ для $d>n+1$ [11]. При $r>2$ эта ткань будет грассманизуемой тогда и только тогда, когда она почти грассманизуема и трансверсально геодезична. При $r=2$ к этому условию **нужно** еще добавить требование изоклинности ткани.

Далее в работе [11] рассматривается вопрос об алгебраизуемости тканей $W(n+1, n, r)$. Здесь важную роль играет условие шестиугольности, введенное для двумерных тканей еще В. Бляшке, а также теорема Графа — Зауэра о шестиугольных прямолинейных три-тканях на плоскости [30]. В работе [2] условие шестиугольности обобщается на ткани $W(3, 2, r)$, далее на ткани $W(n+1, n, r)$. При этом дается следующее решение проблемы алгебраизуемости: ткань $W(n+1, n, r)$ при $n>2$ алгебраизуема тогда и только тогда, когда она грассманизуема и шестиугольна. Для алгебраизуемости ткани $W(3, 2, r)$ достаточно ее изоклинности и шестиугольности (см. [11]). Наконец, как показал недавно В. Боцу (его работа доложена на семинаре в Московском институте стали и сплавов, но еще не опубликована), для алгебраизуемости ткани $W(3, 2, 2)$ достаточно одной ее шестиугольности. Но уже для алгебраизуемости ткани $W(3, 2, 3)$, как показывают примеры, построенные в работах [80], [82], [83] одной шестиугольности недостаточно, так как на шестимерном многообразии существуют шестиугольные, но не изоклинные (а, следовательно, и не алгебраизуемые) три-ткани. Тем самым дается отрицательное решение проблемы 3 из работы [96].

Как показано в работе [2], условие шестиугольности ткани $W(3, 2, r)$ выражается через ее тензор кривизны в виде

$$b^i_{(jkl)}=0. \tag{20}$$

Для ткани $W(3, 2, 2)$ из этого условия уже вытекает ее алгебраизуемость (В. Боцу). При $r>2$, как следует из [11], аналитическое условие алгебраизуемости ткани $W(3, 2, r)$ состоит из соотношений (20) и (18). Для ткани $W(n+1, n, r)$ при $n>2$ и $r>2$ аналитическое условие алгебраизуемости состоит из соотношения (19) и некоторого уравнения, связывающего ковариантные производные тензора $\underset{\alpha\beta}{\lambda_k}$.

Проблема алгебраизуемости ткани $W(d, n, r)$ при любых n, r и $d\geqslant n+1$ эквивалентна проблеме алгебраизуемости системы подмногообразий V^r_u, $u=1, \ldots, d$, размерности r вещественного проективного пространства P^m, где $m=n+r-1$, состоящей в определении условий, при выполнении которых эти подмногообразия принадлежат одному проективному алгебраическому подмногообразию V^r_d степени d и размерности r.

Если $n=2$, то $m=r+1$ и подмногообразия V^r_u являются гиперповерхностями. Для этого случая и $d\geqslant 3$ проблема алгебраизуемости подмногообразий V^r_u решена в работе [106]. В этой работе использован тот же метод, что и в работе [32] при решении проблемы алгебраизуемости ткани $W(3, 2, n)$, но вычисления, конечно, значительно усложняются. Результат работы

[106] может быть сформулирован следующим образом. Пусть точки $x_u = V_u^r \cap l$ находятся в общем положении на прямых l пространства P^{r+1}, принадлежащих некоторой области $U \subset G(1, r+1)$, ξ_u — касательная гиперплоскость к V_u^r в точке x_u и $\varphi(x_u) = \langle \xi_u, d^2x_u \rangle$ — асимптотическая квадратичная форма гиперповерхности V_u^r в этой точке. Гиперповерхности V_u^r принадлежат одной и той же алгебраической гиперповерхности порядка d тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{u=1}^{d} \varphi(x_u) = 0.$$

При этом квадратичные формы $\varphi(x_u)$ вычисляются для направлений, соответствие между которыми устанавливается двумерными плоскостями, проходящими через прямую l, и нормированы соответствующим образом.

При $n>2$ подмногообразия V_u^r уже не являются гиперповерхностями пространства P^m и дело обстоит более сложно. Однако и для этого случая в работе [15] с помощью результата работы [106] и метода проектирования находится необходимое и достаточное условие алгебраизуемости системы подмногообразий V_u^r. Таким образом, в настоящее время проблема алгебраизуемости тканей $W(d, n, r)$ имеет полное решение.

§ 3. ТРИ-ТКАНИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ КВАЗИГРУППЫ

Глубокая связь теории тканей с алгеброй была замечена еще в первом периоде ее развития. В это время появляется несколько статей учеников и сотрудников. В. Бляшке под одним и тем же названием «Ткани и группы» (см. [104], [100], [93]), вводится понятие квазигруппы [101], устанавливается связь между алгебраическими свойствами квазигрупп и условиями замыкания на соответствующих им абстрактных тканях (см. [92], [89], [27]). Заметим только, что ткани, которые мы здесь называем абстрактными (см. также [19]) в обзоре [29] и в связанных с ним работах, называются алгебраическими. Но последний термин мы уже использовали в другом смысле в § 2.

Пусть $Q(\cdot)$ — бинарная квазигруппа, заданная на множестве Q. На множестве $M = Q \times Q$ она определяет три-ткань $W(3, Q)$, образованную тремя расслоениями λ_u, слои которых определяются равенствами $F_1 = \{x, y) \mid x = a\}$, $F_2 = \{(x, y) \mid y = b\}$, $F_3 = \{(x, y) \mid x \cdot y = c\}$ (см. например, [27]). Обратно, абстрактная триткань W. образованная на множестве M тремя расслоениями λ_u с базами X_u такими, что $M = X_u \times X_v$ $(u, v = 1, 2, 3)$, определяет отображение $q: X_1 \times X_2 \to X_3$, при котором соответствующие слои проходят через одну и ту же точку p множества M. Это отображение представляет собой трехбазисную квазигруппу

[28], а каждая тройка биективных отображений $\alpha_u : X_u \to Q$ определяет на множестве Q квазигруппу $Q(\cdot)$ с операцией

$$x \cdot y = \alpha_3\left[q\left(\alpha_1^{-1}(x), \alpha_2^{-1}(y)\right)\right].$$

Все квазигруппы, определяемые таким образом, будут изотопны между собой. Ввиду этого абстрактной три-ткани W, заданной на M, ставится в соответствие не одна, а целое семейство изотопных между собой квазигрупп $Q(\cdot)$ и свойствам три-ткани соответствуют те свойства этих квазигрупп, которые остаются инвариантными при преобразовании изотопии. Квазигруппы $Q(\cdot)$ называют координатными квазигруппами ткани W.

Среди всех координатных квазигрупп $Q(\cdot)$ три-ткани W выделяются так называемые координатные лупы L_p. Каждая из них связана с некоторой точкой $p(a, b) \in M = X_1 \times X_2$ и определяется отображениями $\alpha_1 : X_1 \to X_3$, $\alpha_2 : X_2 \to X_3$, $\alpha_3 = id$, где $\alpha_1(x) = q(x, b)$, $\alpha_2(y) = q(a, y)$. При этом алгебраические свойства координантных луп L_p три-ткани W оказываются связанными с условиями замыкания, выполняемыми на этой ткани (см. [29], [89], [4]). Эта связь может быть представлена в виде следующей таблицы:

Таблица 1

Название луп L_p	Тождества в L_p	Условия замыкания на W
Абелевы группы	$uv = vu$ $(uv)w = u(vw)$	(T)—Томсена
Группы	$(uv)w = u(vw)$	(R)—Рейдемейстера
Лупы Муфанг	$(uu)v = u(uv)$ $u(vv) = (uv)v$	$(M) = (B_l) \cap (B_r)$
Левые лупы Боля	$(uu)v = u(uv)$	(B_l)—Боля левое
Правые лупы Боля	$u(vv) = (uv)v$	(B_r)—Боля правое
Моноассоциативные лупы	$u(uu) = (uu)u$	(H)—шестиугольности

Эквивалентность тождеств, записанных во втором столбце таблицы, и соответствующих условий замыкания для всех случаев, кроме первого, непосредственно следует из определения умножения в лупе L_p [29]. Для условия (T) дело обстоит несколько сложнее. В недавней работе [90] дано новое и более простое, чем известное ранее, доказательство эквивалентности условия (T) соответствующим тождествам второго столбца.

Указанные в таблице условия замыкания связаны импликацией

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & & & (B_l) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (T) \arrow[r, Rightarrow] & (R) \arrow[r, Rightarrow] & (M) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (B_m) \arrow[r, Rightarrow] & (H) \\ & & & (B_r) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

Здесь через (B_m) обозначено среднее условие Боля, которое связано не со свойствами луп L_p, а со свойствами их левых или правых обратных луп.

При переходе от абстрактных три-тканей к геометрическим тканям $W(3, 2, r)$, заданным на дифференцируемом многообразии M, возникает следующая картина. Квазигруппы $Q(\cdot)$, связанные с тканью $W(3, 2, r)$ определяются не в целом, а только в локальном смысле, но зато они будут дифференцируемыми [4]. Координатные лупы L_p для ткани $W(3, 2, r)$ становятся локальными дифференцируемыми лупами. На ткани $W(3, 2, r)$ можно рассматривать такие же условия замыкания, как и на абстрактных тканях, но следует ограничиться построением достаточно малых фигур замыкания, целиком лежащих на рассматриваемом многообразии M.

При этом оказывается, что для двумерных три-тканей $W(3, 2, 1)$ все условия замыкания, приведенные в таблице 1, будут эквивалентными, так как уже из условия (H) следует параллелизуемость ткани. Для тканей $W(3, 2, r)$ при $r=2, 3$ эквивалентными оказываются условия (R) и (M). И только при $r \geqslant 4$ ткани $W(3, 2, r)$ дают возможность построить геометрическую реализацию для всех указанных выше условий замыкания. Этот факт впервые был отмечен в работе [95] и подробно изучен в работах московских геометров.

Рассмотрим, следуя [4], координатную лупу L_p, присоединенную к точке p многообразия M, несущую ткань $W(3, 2, r)$. Она является r-мерной локальной дифференцируемой лупой и, если ввести в окрестности единицы этой лупы координаты, то умножение в ней представляется в виде

$$(u \cdot v)^i = u^i + v^i + \lambda^i_{jk} u^j v^k + \frac{1}{2}\left(\mu^i_{jkl} u^j u^k v^l + \nu^i_{jkl} u^j v^k v^l\right) + o(\rho^3), \quad (21)$$

где $u, v \in L_p$, $u=\{u^i\}$, $v=\{v^i\}$, $\rho=\max(|u^i|, |v^i|)$, $\mu^i_{jkl}=\mu^i_{kjl}$, $\nu^i_{jkl}=\nu^i_{jlk}$. При допустимых преобразованиях координат в лупе L_p коэффициенты этого разложения тензоров не образуют, но из них можно построить тензоры

$$\alpha^i_{jk} = \lambda^i_{[jk]}, \quad \beta^i_{jkl} = \mu^i_{jkl} - \nu^i_{jkl} + \lambda^m_{jk}\lambda^i_{ml} - \lambda^m_{kl}\lambda^i_{jm}, \quad (22)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\beta^i_{[jkl]} = 2\alpha^m_{[jk}\alpha^i_{|m|l]}. \quad (23)$$

В работе [8] устанавливается связь между коммутатором и ассоциатором лупы L_p и тензорами (22). В ней определяются левый и правый коммутаторы и ассоциаторы лупы L_p и доказывается, что формы

$$\alpha^i = 2\alpha^i_{jk} u^j v^k \quad \text{и} \quad \beta^i = \beta^i_{jkl} u^j v^k w^l \quad (24)$$

представляют собой соответственно главные части обоих коммутаторов элементов $u, v \in L_p$ и обоих ассоциаторов элементов

u, v, w этой лупы. Тензоры (22) позволяют определить в касательном пространстве $T_e(L_p)$ операции коммутирования $[\xi, \eta]$ и ассоциирования (ξ, η, ζ), которые в силу (22) и (23) связаны соотношениями

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi], \quad [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] =$$
$$= (\xi, \eta, \zeta) + (\eta, \zeta, \xi) + (\zeta, \xi, \eta) - (\eta, \xi, \zeta) - (\zeta, \eta, \xi) - (\xi, \zeta, \eta). \quad (25)$$

Тем самым пространство $T_e(L_p)$ превращается в тройную систему [107]. Второе соотношение (25) называется обобщенным тождеством Якоби.

Далее в работе [16] устанавливается связь между тензорами (22) и тензорами кручения и кривизны ткани $W(3, 2, r)$, введенными в [2] (см. § 1). А именно, в ней доказывается, что

$$a^i_{jk} = -\alpha^i_{jk}, \quad b^i_{jkl} = -\beta^i_{kjl}. \quad (26)$$

Эти соотношения вместе с формулами (24) и таблицей 1 позволяют дать аналитическую характеристику приведенным выше условиям замыкания ткани, а также описать соответствующие им локальные тройные системы (л. т. с). Эти сопоставления приведены в таблице 2.

Таблица 2

Условие замыкания	Аналитическая характеристика	Характеристика л. т. с	Литература
(T)	$a^i_{jk} = 0, \quad b^i_{jkl} = 0$	тривиальная алгебра	[2]
(R)	$b^i_{jkl} = 0$	алгебра Ли	[2]
(M)	$b^i_{jkl} = b^i_{[jkl]}$	алгебра Мальцева	[17], [105]
(Bl)	$b^i_{(jk)l} = 0$	тройные системы Боля	[81], [67] [42]
(B_r)	$b^i_{(j\|k\|l)} = 0$		
(B_m)	$b^i_{j(kl)} = 0$		
(H)	$b^i_{(jkl)} = 0$	не исследованы	[2]

Отметим, что если необходимость аналитических условий, указанных во втором столбце приведенной таблицы, для выполнения соответствующих условий замыкания непосредственно следует из (24), (26) и таблицы 1, то для доказательства их достаточности пришлось привлечь аппарат, указанный в § 1 настоящего обзора и провести довольно сложные аналитические и геометрические построения.

При изучении три-тканей указанных выше классов выяснено также следующее важное обстоятельство: g-структуры, определяемые тканями каждого из этих классов, кроме последнего, являются замкнутыми в смысле работы [7]. Такие структуры характеризуются тем, что они определяются конечным числом констант. Так все ткани, удовлетворяющие условию (T) параллелизуемы и эквивалентны между собой, а число определяющих их констант равно нулю; ткани, удовлетворяющие условию (R), вполне определяются структурными константами некоторой алгебры Ли; ткани, удовлетворяющие условию (M), определяются структурными константами алгебры Мальцева, связанными тождествами Сейгла [105]; ткани (B_l), (B_r) и (B_m) определяются компонентами своих тензоров кручения и кривизны, связанными некоторыми соотношениями, выведенными в работах [81], [42]. Разумеется, все эти рассуждения носят только локальный характер.

К этому можно еще добавить следующее. В работе [1] рассматривались локальные аналитические лупы и строились их канонические разложения, аналогичные формуле Кемпбела—Хаусдорфа для групп Ли. Но, в отличие от этой формулы, коэффициенты различных порядков канонического разложения произвольной лупы оказались между собой никак не связанными. Если же рассматривать координатные лупы для тканей классов, указанных в таблице 2 (кроме последнего), то, как и для групп Ли, все коэффициенты их канонических разложений будут выражаться через некоторое конечное число первых. Это вытекает из указанной выше замкнутости g-структур, определяемых рассматриваемыми тканями. В частности, для луп Муфанг канонические разложения, как доказано в [61], [60], совпадают с обычной формулой Кемпбела—Хаусдорфа.

Так как все коэффициенты канонических разложений координатных луп указанных выше тканей выражаются через некоторое конечное число первых, то для этих тканей из гладкости определенного порядка следует их аналитичность. Так для тканей (T), (R) и (M) аналитичность следует из гладкости второго порядка, а для тканей (B_l), (B_r) и (B_m) — из гладкости третьего порядка. Конечно, последнее утверждение требует еще аккуратного доказательства.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТРИ-ТКАНЕЙ

Как уже отмечалось в § 2, всякая шестиугольная ткань $W(3, 2, r)$ будет трансверсально геодезической. Ввиду этого трансверсально геодезическими будут и остальные ткани, указанные в таблице 2. При $r=2$ все эти ткани, как вытекает из указанного в § 2 результата В. Боцу, будут изоклинными, а следовательно и грассманизуемыми. При $r>2$ эти ткани, вообще говоря, изоклинными не будут (за исключением, конечно, тканей (T)). Если же они будут изоклинными, то допускают следующие изображения на грассмановом многообразии

$G(1, r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1} [3]: изоклинная шестиугольная ткань алгебраизуема (см. § 2) и все ее слои изображаются связками прямых, центры которых лежат на одной и той же кубической гиперповерхности V_3^r. Для изоклинных тканей Боля (B_l), (B_r) и (B_m) эта кубическая гиперповерхность распадается на гиперквадрику и гиперплоскость, для изоклинных тканей Муфанг и Рейдемейстера она распадается на три гиперплоскости общего положения и, наконец, для тканей (T) эти гиперплоскости принадлежат одному пучку. Соответствующие этим тканям локальные квазигруппы реализуются как отображения, ставящие в соответствие паре различных точек x и y гиперкубики V_3^r точку z ее пересечения с прямой xy. В книге [62] с помощью более сложного построения с гиперкубикой $V_3^r \subset P^{r+1}$ связывается квазигруппа Q, определенная в целом. Она называется CH-квазигруппой.

В работе [81] устанавливается связь между три-тканями Боля и симметрическими пространствами. А именно, доказано, что база одного из трех слоений, образующих три-ткань Боля, несет структуру симметрического пространства. Например, для ткани (B_m) таким слоением будет λ_3. Тензор кривизны его базы X_3 выражается через тензоры кривизны и кручения ткани (B_m) в виде

$$R^l_{jkl}=\frac{1}{4}(b^l_{jkl}+2a^l_{jm}a^m_{kl})$$

и будет ковариантно постоянным относительно связности Γ_3 (см. §1). В работах [80], [82], [83] дается полная классификация шестимерных тканей Боля и строится геометрическая интерпретация наиболее интересных из них с помощью геометрических образов трехмерного проективного пространства.

В работе [85] рассматриваются три-ткани $W(3, 2, r)$ с частично симметричным тензором кривизны. Доказывается, что если, например, тензор кривизны ткани удовлетворяет условию $b^l_{[jk]l}=0$ (такая ткань обозначается через T_1), то на слоях слоения λ_1, принадлежащего этой ткани, индуцируется групповая связность, т. е. связность с ковариантно постоянным тензором кручения. Ввиду этого с тканью связано r-параметрическое семейство групп Ли. Локальные тройные системы, определяемые три-тканью T_1 характеризуются тем, что их операция коммутирования удовлетворяет тождеству Якоби, а операция ассоциирования симметрична по первой паре сомножителей. Грассманизуемые ткани с частично симметричным тензором кривизны рассмотрены в [12]. Если тензор кривизны ткани $W(3, 2, r)$ вполне симметричен, то ее тензор кручения будет ковариантно постоянным. С его помощью строится ковариантно постоянный симметричный тензор $g_{ij}=a_{ikl}a^k_{jl}$ и на ткани определяется инвариантная метрика.

С тканями Муфанг оказываются связаны так называемые циклические ткани, рассмотренные в работе [86]. Тензор кривизны таких тканей ковариантно постоянен относительно средней связности (см. § 1) и они характеризуются условием $b^i_{jkl} = b^i_{(jkl)} + b^i_{[jkl]}$. Локальные тройные системы циклической ткани характеризуются тем, что их коммутатор удовлетворяет тождеству Сейгла, ассоциатор инвариантен по отношению к циклированию и эти операции связаны тождеством

$$(x, y, z) - (x, z, y) = \frac{4}{3}([[x, y] z] + [[y, z] x] + [[z, x] y]).$$

В работе [87] дифференциальные уравнения восьмимерной циклической три-ткани интегрируются и уравнения ткани записываются в конечном виде, подобно тому, как для восьмимерной ткани Муфанг это проделано в [9].

Из множества координатных квазигрупп ткани $W(3, 2, r)$, кроме координатных луп, выделяются еще идемпотентные квазигруппы. В работе [65] доказано, что на каждом r-мерном гладком подмногообразии $V \subset M$, которое находится в общем положении относительно ткани $W(3, 2, r)$, естественно определяется бинарная операция, по отношению к которой $V(\cdot)$ становится идемпотентной локальной квазигруппой. Обратно, всякая идемпотентная координатная квазигруппа ткани $W(3, 2, r)$ может быть реализована на некотором подмногообразии $V \subset M$, $\dim V = r$. На идемпотентной квазигруппе $V(\cdot)$ рассматривается условие дистрибутивности и выясняется его геометрический смысл. Рассматриваются также некоторые примеры идемпотентных квазигрупп, определяемых три-тканями.

Как уже упоминалось выше, четырехмерные три-ткани $W(3, 2, 2)$ занимают особое положение в теории тканей, так как связанные с ними почти грассмановы структуры становятся псевдоконформными структурами $CO(2,2)$. Поэтому их изучению посвящен целый ряд специальных работ. В работе [56] компоненты тензора Вейля структуры $CO(2,2)$, присоединенной к ткани $W(3, 2, 2)$, выражаются через компоненты ее тензоров кручения и кривизны. Затем с помощью отображения в шестимерное бивекторное пространство ([64], стр. 114) изучается алгебраическая структура тензора Вейля. Его характеристический многочлен распадается на два множителя, первый из которых связан с изоклинным, а второй — с трансверсальным расслоением над многообразием M, определяемыми тканью. Три слоения, образующие ткань $W(3, 2, 2)$, являются интегрируемыми сечениями первого из этих расслоений. В работе [59] доказывается, что в общем случае это расслоение имеет четвертое инвариантное, но, вообще говоря, не интегрируемое сечение. Трансверсальное расслоение над M также имеет четыре инвариантных сечения, вообще говоря, не интегрируемых. Рассматриваются различные случаи взаимного расположения этих сечений. В работе [58] с помощью тензора Вейля структуры $CO(2, 2)$ записываются условия изоклинности, трансверсальной геодезичности и грассманизуемости ткани W (3, 2, 2).

В работе [76] рассматривается ткань $W(3, 2, 2)$ с симметричным тензором кривизны. Производится канонизация корепера, присоединенного к ткани, определяются некоторые ее инварианты, позволяющие дать классификацию изучаемых тканей. Затем в [77] показано, что эта классификация связана с классификацией тканей $W(3, 2, 2)$ по кратности инвариантных сечений трансверсального расслоения над M, определенных в [59]. Для некоторых из рассмотренных в этих работах классов тканей их структурные уравнения удается проинтегрировать и записать уравнения ткани в виде (1).

Четырехмерные ткани Боля были изучены в работах [49]—[55]. Тензоры кривизны и кручения ткани $W(3, 2, 2)$, на которой выполняются условия замыкания (B_m), записываются в виде

$$a^i_{jk}=a_{[j}\delta^i_{k]}, \quad b^i_{jkl}=b_{j[k}\delta^i_{l]}.$$

Доказывается, что четырехмерная ткань Боля всегда грассманизуема и строится ее интерпретация на грассмановом многообразии $G(1,3)$ прямых пространства P^3 [51]. При этом слоения, составляющие рассматриваемую ткань, порождаются квадрикой Q и плоскостью π этого пространства. Дается вещественная классификация четырехмерных тканей Боля, связанная со строением квадрики Q и взаимным расположением плоскости π и этой квадрики. Затем, в работах [53], [54] строятся плоские интерпретации четырехмерных тканей Боля, которые в общем случае получаются при проектировании квадрики Q на плоскость π из полюса этой плоскости относительно квадрики. При этом на плоскости π возникает некоторая неевклидова геометрия и точки многообразия M^4 изображаются тройками коллинеарных точек плоскости π, одна из которых делит пополам расстояние между двумя другими. Таким образом, на плоскости π реализуется структура симметрического пространства, связанного с тканью Боля, о котором шла речь в работе [81].

При изучении четырехмерных шестиугольных три-тканей, как было уже сказано выше, выяснилось, что всякая такая ткань грассманизума, а следовательно и алгебраизуема. Поэтому изучение и классификация таких тканей связано с изучением кубических поверхностей в P^3. Некоторые результаты в этом направлении были получены в работах [32], [33]. В первой из них дано непосредственное доказательство теоремы о том, что изоклинная шестиугольная ткань $W(3, 2, r)$ допускает отображение на три слоения грассманова многообразия $G(1, r+1)$, определяемые гиперповерхностью третьего порядка в P^{r+1}. Во второй — рассматривается специальный класс шестиугольных тканей $W(3, 2, 2)$, для которых соответствующая им кубическая поверхность в P^3 тангенциально вырождается, т. е. становится конусом. Доказано, что при этом все основные тензоры ткани имеют ранг, равный единице. Дается полное описание локальной тройной системы координатной лупы такой три-ткани.

Еще одним важным вопросом теории тканей является изучение их инфинитезимальных автоморфизмов. В работах [39]—[43] эта задача решается для тканей $W(3, 2, r)$. Устанавливается, что координаты векторного поля $\xi = (\xi_1^i, \xi_2^i)$ на многообразии M, определяющего инфинитезимальный автоморфизм такой ткани, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\nabla}\xi_1^i &= (\xi_j^i + 2a_{jk}^i \xi_1^k)\,\omega_1^j \\ \tilde{\nabla}\xi_2^i &= (\xi_j^i - 2a_{jk}^i \xi_2^k)\,\omega_2^j \\ \tilde{\nabla}\xi_j^i &= b_{jkl}^i\,(\xi_2^l \omega_1^k - \xi_1^k \omega_2^l) \end{aligned}\right\}, \qquad (27)$$

где $\tilde{\nabla}$ — символ ковариантного дифференцирования относительно связности $\tilde{\Gamma}_3$ (см. § 1). При этом величины ξ_1^i, ξ_2^i определяют трансляции ткани, а ξ_j^i — ее изотропии (т. е. преобразования, оставляющие инвариантной ее точку). При дифференциальном продолжении уравнений (28) получается система линейных соотношений, которые связывают компоненты векторных полей, порождающих инфинитезимальные автоморфизмы тканей, и величины ξ_j^i с тензорами кручения, кривизны ткани и их ковариантными производными. Доказывается, что множество векторных полей определяющих инфинитезимальные автоморфизмы некоторой ткани, образует алгебру Ли g, размерность которой равна $r^2 + 2r - s$, где s — число независимых из указанных выше линейных соотношений. Находятся условия, при выполнении которых алгебра g совпадает с алгеброй инфинитезимальных автоморфизмов аффинных связностей, определяемых тканью $W(3, 2, r)$ на многообразии M.

В работах [40], [41] устанавливается, что максимальной подвижностью обладают параллелизуемые ткани — группа их автоморфизмов зависит от $r^2 + 2r$ параметров. Затем рассматриваются ткани, для которых $\dim g \geqslant r^2 - r$. Такие ткани называются тканями повышенной подвижности. Находятся все отрезки конденсации размерностей алгебры инфинитезимальных автоморфизмов для тканей повышенной подвижности и соответствующие им лакуны. При этом используются методы, развитые в [44]. Изучаются инфинитезимальные автоморфизмы некоторых частных классов три-тканей — групповых тканей, изоклинных тканей, тканей Боля и Муфанг [42]. В алгебрах инфинитезимальных автоморфизмов этих тканей выделяются подалгебры, связанные с ними инвариантно. Устанавливаются неравенства, ограничивающие размерности этих подалгебр. Отдельно рассматриваются алгебры инфинитезимальных автоморфизмов тканей Боля и Муфанг малых размерностей. Наконец, показано, что для ткани $W(3, 2, 1)$ теория инфинитезимальных автоморфизмов совпадает с рассмотренной еще Э. Картаном [94] геометрической теорией дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ по отношению к преобразованиям переменных вида $x \to \alpha(x)$, $y \to \beta(y)$.

§ 5. ДРУГИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТРИ-ТКАНЯМИ

Так как ткань $W(3, 2, r)$ определяется на многообразии M размерности $2r$, то к ней естественным образом присоединяется почти комплексная структура $A\mathbb{C}(r)$. При $r=1$ это сделано еще в [30]. Случай $r>1$ рассматривается в работах [6], [14]. Структура $A\mathbb{C}(r)$ присоединяется к ткани $W(3, 2, r)$ так, что для любой точки $p \in M$ все двумерные трансверсально геодезические направления ткани, принадлежащие $T_p(M)$, оказываются инвариантными по отношению к основному оператору I, $I^2=-E$ этой структуры. Тогда конус трансверсально геодезических направлений $C_p(2, r)$ принадлежит линейной эллиптической конгруэнции двумерных комплексно аналитических направлений структуры $A\mathbb{C}(r)$, лежащей в пространстве $T_p(M)$. При этом тензор кручения структуры $A\mathbb{C}(r)$ оказывается пропорциональным тензору кручения ткани $W(3, 2, r)$ и ткань будет равноугольной относительно любой почти эрмитовой метрики, совместимой с присоединенной к ней почти комплексной структурой.

Ввиду того, что касательное расслоение $T(M)$ дифференцируемого многообразия M, $\dim M=r$ имеет размерность $2r$, то на нем естественно рассмотреть три-ткань, одно из слоений λ_3 которой совпадает с исходным касательным расслоением, а два другие — определяются семействами векторных полей на M [24]. Такая три-ткань индуцирует на $T(M)$ инфинитезимальную связность γ, тензор кривизны которой совпадает с тензором кручения ткани. Затем на $T(M)$ рассматриваются связности Γ_3 и $\tilde{\Gamma}_3$, определяемые присоединенной тканью $W(3, 2, r)$ и находятся условия их проектируемости на многообразие M. Так, для того чтобы связность Γ_3 допускала проектирование на M, необходимо и достаточно, чтобы присоединенная ткань $W(3, 2, r)$ была тканью Боля (B_m). На ткани, присоединенной к $T(M)$, естественно определяется инвариантное трансверсальное бивекторное распределение [20], [21] и доказывается, что, если на произвольной ткани $W(3, 2, r)$ задано трансверсальное распределение Δ^2, то в общем случае она может быть рассмотрена как три-ткань на любом из трех касательных расслоений $T(X_u)$, $(u=1, 2, 3)$, определяемых базами X_u слоений λ_u, принадлежащими этой ткани. С распределением Δ^2 естественным образом связывается его распределение параллельности Δ^r и изучаются различные вопросы геометрии этих распределений. В работах [22] и [23] рассматриваются три-ткани, присоединенные указанным выше способом к касательному расслоению $T(V)$, определяемому r-мерным подмногообразием V аффинного пространства размерности $2r$.

Другой способ реализации три-тканей рассматривается в работах [34]—[38]. Для этой цели рассматривается аффинное пространство размерности $3r$, в котором выделены три направления коразмерности r, находящиеся в общем положении. Такое пространство называется обобщенным пространством Аппеля Ap^{3r} ввиду того, что при $r=1$ пространства с такой структурой были названы ранее пространствами Аппеля [68]. На подмногообразии V размерности $2r$, находящемся в общем положении относительно выделенных направлений, $2r$-плоскости, параллельные этим направлениям, высекают ткань $W(3, 2, r)$, называемую координатной три-тканью подмногообразия V. Случай $r=1$ рассматривается в работах [37], [38]. На двумерной поверхности $V^2 \subset Ap^3$ вводится относительно инвариантная положительно определенная квадратичная форма ds^2, связанная с окрестностью первого порядка, и асимптотическая квадратичная форма φ. Они позволяют определить линии кривизны на V^2. Строится инвариантное оснащение поверхности V^2 и доказывается, что, как и в классической геометрии, развертывающиеся поверхности конгруэнции нормалей пересекают V^2 по линиям кривизны. Рассматриваются поверхности V^2, на которых координатная три-ткань шестиугольна. Дифференциальные уравнения, определяющие такие поверхности, удается проинтегрировать в квадратурах. В частности, к ним относятся сферы Аппеля, на которых линии кривизны не определены, а конгруэнция нормалей вырождается в связку прямых.

Случай $r>1$ рассмотрен в работах [34]—[36]. Для подмногообразия $V^{2r} \subset Ap^{3r}$ асимптотические квадратичные формы φ^i позволяют определить три симметричных тензора $\underset{u}{\lambda}{}^i_{jk}$, $u=1, 2, 3$ и кососимметричный тензор a^i_{jk}, совпадающий с тензором кручения ее координатной ткани $W(3, 2, r)$. Изучаются подмногообразия V^{2r}, на которых $a^i_{jk}=0$. Доказано, что такие многообразия существуют с произволом в r^2 функций от $r+1$ переменных. При доказательстве этого факта использован результат работы [31]. Затем изучаются подмногообразия V^{2r}, координатная ткань которых параллелизуема. Как и в случае $r=1$ дифференциальные уравнения таких тканей интегрируются в квадратурах.

Рассматриваются и некоторые частные виды подмногообразий V^{2r} с параллелизуемой координатной три-тканью. Из них особенно интересными являются подмногообразия, аналогичные сферам Аппеля трехмерного пространства. На таких подмногообразиях $\lambda^l_{jk}=\underset{u}{\lambda}^l_{jk}$, а тензор λ^l_{jk} имеет постоянные компоненты и удовлетворяет условиям, показывающим, что он определяет коммутативную *ассоциативную алгебру*. Этот факт дает возможность найти конечные уравнения обобщенных поверхностей Аппеля в Ap^{3r}.

Изучение подмногообразий V^{2r} в пространстве Ap^{3r} естественным образом связывается с теорией точечных соответствий между тройками аффинных пространств размерности r. В качестве этих пространств можно взять любую тройку различных r-мерных координатных подпространств пространства Ap^{3r}, проходящих через одну точку. Подмногообразие V^{2r} будет графиком этого отображения. Точечные соответствия между тройками пространств различной структуры представляют собой отдельную тему геометрических исследований. Обзор работ по этой теме до 1970 года содержится в работе [66].

К работам, в которых изучаются точечные соответствия между тремя проективными пространствами, примыкают также работы [45]—[48]. В них изучаются двупараметрические семейства S^2 двумерных плоскостей P^2 проективного пространства P^5 и доказывается, что в общем случае такое семейство несет три однопараметрических семейства фокальных моносистем плоскостей P^2, которые образуют на нем три-ткань $W(3, 2, 1)$. Эта ткань называется фокальной три-тканью семейства S^2. В проективной теории конгруэнций прямых трехмерного проективного пространства этой три-ткани соответствует фокальная сеть развертывающихся поверхностей. В работе [45] строится канонический репер, присоединенный к семейству $S^2\subset P^5$, инвариантно связанный с фокальной три-тканью, находится форма связности и кривизна этой ткани и рассматриваются семейства S^2 с шестиугольной фокальной три-тканью. В частности показано, что при проектировании многообразия Сегре $S(2, 2)\subset P^8$ в подпространство $P^5\subset P^8$ из двумерного центра, каждое семейство двумерных плоскостей, принадлежащее $S(2, 2)$, переходит в семейство $S^2\subset P^5$, несущее прямолинейную шестиугольную фокальную три-ткань.

В работе [46] рассматривается проективное изгибание Фубини—Картана первого и второго порядка для двупараметрического семейства S^2 двумерных плоскостей в P^5. Доказано, что два семейства S^2 и $\bar{S}^2$ допускают наложение первого порядка тогда и только тогда, когда их фокальные три-ткани эквивалентны. Установлено, что семейства S^2 в общем случае не допускают нетривиальных изгибаний второго порядка и выделены некоторые частные классы, которые такие изгибания допускают.

Затем в работах [47], [48] рассматриваются семейства S^2, фокальные поверхности которых вырождаются в прямые l_u, $u=1, 2, 3$. В этом случае плоскости семейства S^2 определяют точечное соответствие между прямыми l_u и связанную с ним локальную дифференцируемую квазигруппу $q: l_1 \times l_2 \to l_3$. Если фокальная три-ткань такого семейства шестиугольна, то его дифференциальные уравнения удается проинтегрировать в квадратурах. Найдены условия, при выполнении которых соответствие между прямыми l_u, определяемое семейством S^2, будет трилинейным.

Связь теории три-тканей с алгеброй осуществляется не только в том направлении, которое было указано в § 3. В дифференциальной геометрии стало уже традицией распространять изучение различного рода дифференциально-геометрических структур на дифференцируемые многообразия над алгебрами. И теория тканей не является исключением из общего правила. Изучению тканей над алгебрами посвящены работы [69]—[75]. В них рассматриваются три-ткани на двумерном дифференцируемом многообразии $M^r(A)$ над коммутативной ассоциативной алгеброй A размерности r с единицей. Предварительно над алгеброй A строится исчисление внешних форм. С его помощью выводятся структурные уравнения ткани $W(3, 2, 1; A)$. Они имеют точно такой же вид, как для ткани $W(3, 2, 1; \mathbf{R})$ над полем вещественных чисел, но входящие в них функции и формы имеют областью значений алгебру A. В частности, кривизна k такой ткани является аналитической функцией на $M^r(A)$ со значениями в A.

Для ткани $W(3, 2, 1; A)$ строится реализация на вещественном многообразии M^{2r} в виде ткани $W(3, 2, r; \mathbf{R})$ специального вида. Эта ткань не имеет кручения, т. е. является изоклинно геодезической (см. [6]), а ее тензор кривизны симметричен и выражается в виде $b^l_{jkl} = \gamma^l_{jp}\gamma^p_{qm}\gamma^m_{kl}k^q$, где k^q — компоненты кривизны $k = k^q e_q$ ткани $W(3, 2, 1; A)$, γ^l_{jk} — структурные константы алгебры A и e_q — ее базис. Если в алгебре A имеется делитель нуля l ранга $\rho = \rho(l)$, $0 < \rho < r$, то ткань $W(3, 2, r; \mathbf{R})$, являющаяся вещественной реализацией ткани $W(3, 2, 1; A)$, расслаивается на подткани $W(3, 2, r-\rho; \mathbf{R})$ (см. [71]). В [72] проводится классификация тканей $W(3, 2, 1; A)$ в зависимости от того, является ли кривизна этой ткани делителем нуля алгебры A или нет и каков ранг $\rho(k)$ этого делителя нуля.

Отметим еще, что изоклинно геодезические ткани первоначально были рассмотрены в работе [2] под названием паратактических. Существование таких тканей, отличных от параллелизуемых, в этой работе было доказано только для $r=2$. Существование вещественных реализаций тканей $W(3, 2, 1; A)$ подтверждает существование нетривиальных изоклинно геодезических тканей при любом r.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акивис М. А.*, О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы. Докл. АН СССР, 1969, *188*, № 5, 967—970 (РЖМат, 1970, 3А468)
2. —, О три-тканях многомерных поверхностей. «Тр. геометр. семинара, Ин-т научн. информ. АН СССР», 1969, 2, 7—31 (РЖМат, 1970, 4А647)
3. —, О локальной дифференцируемой квазигруппе и три-ткани, которые определяются тройкой гиперповерхностей. Сиб. мат. ж., 1973, *14*, № 3, 467—474 (РЖМат, 1973, 9А669)
4. —, Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей. В сб. «Исслед. по теории квазигрупп и луп», Кишинев, «Штиинца», 1973, 3—12 (РЖМат, 1973, 12А635)
5. —, Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности. Сиб. мат. ж., 1974, *15*, № 1, 3—15 (РЖМат, 1974, 6А797)
6. —, О почти комплексной структуре, присоединенной к три-ткани многомерных поверхностей. Тр. семинара кафедры геометрии. Казан. ун-т, 1975, вып. 8, 11—15 (РЖМат, 1976, 2А831)
7. —, О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 7 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)». М., 1975, 69—79 (РЖМат, 1976, 9А623)
8. —, О локальных алгебрах многомерной три-ткани. Сиб. мат. ж., 1976, *17*, № 1, 5—11 (РЖМат, 1976, 7А888)
9. —, Об интегрировании структурных уравнений три-ткани Муфанг минимальной размерности. В сб. «Дифференц. геометрия». Калинин, 1977, 3—9 (РЖМат, 1977, 12А775)
10. —, О геодезических лупах и локальных тройных системах пространства аффинной связности. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 2, 243—253 (РЖМат, 1978, 9А684)
11. —, Ткани и почти грассмановы структуры. Докл. АН СССР, 1980, *252*, № 2, 267—270 (РЖМат, 1980, 9А653)
12. —, Об одном классе три-тканей, определяемых тройкой гиперповерхностей. Сиб. мат. ж., 1981, *22*, № 1, 3—7 (РЖМат, 1981, 6А684)
13. —, Об одном геометрическом условии изоклинности многомерной ткани. В сб. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1981, 3—7 (РЖМат, 1982, 1А890)
14. —, Дифференциально-геометрические структуры, связанные с три-тканью. В сб. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1982, 3—6 (РЖМат, 1982, 12А733)
15. —, О локальном условии алгебраизуемости системы подмногообразий вещественного проективного пространства. Докл. АН СССР, 1983, *272*, № 6
16. —, *Шелехов А. М.*, О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы. Сиб. мат. ж., 1971, *12*, № 5, 953—966 (РЖМат, 1972, 1А1088)
17. —, —, О локальных дифференцируемых квазигруппах и связностях, присоединенных к три-ткани многомерных поверхностей. Сиб. мат. ж., 1971, *12*, № 6, 1181—1191 (РЖМат, 1972, 3А671)
18. —, —, О структуре многообразия изоклинных поверхностей изоклинной три-ткани. «Сб. статей по дифференц. геометрии», Калинин, 1974, 11—20 (РЖМат, 1975, 8А672)
19. —, —, Основы теории тканей. Калининский гос. ун-т. Калинин, 1981, 1—88
20. *Андикян М. А.* О трансверсальном распределении на многомерной три-ткани. Мос. гос. пед. ин-т, М., 1980, 28 с., библиогр. 5 назв (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21 окт. 1980 г., № 4479—80 Деп) (РЖМат, 1981, 2А722 ДЕП)
21. —, О трансверсальном распределении на многомерной три-ткани. Изв. вузов. Мат., 1981, № 4, 69—73 (РЖМат, 1981, 10А560)

22. —, Три-ткани в касательном расслоении, определяемом многомерной поверхностью аффинного пространства. Укр. геометрич. сб., Харьков, 1981, № 24, 3—12 (РЖМат, 1981, 8А734)
23. —, О три-тканях, симметрично присоединенных к нормализованной поверхности аффинного пространства. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1981, *72*, № 4, 231—237 (РЖМат, 1982, 2А783)
24. —, О три-тканях на касательном расслоении дифференцируемого многообразия. Ереванн амалсаран. Гитакан тегекагир. Бнакан гитутюннер, Уч. зап. Ереван. ун-т. Естеств. н., 1981, № 1, 3—12 (РЖМат, 1981, 11А737)
25. —, О три-тканях, симметрично присоединенных к нормализованной поверхности аффинного пространства. Мос. гос. пед. ин-т. М., 1981, 41 с., библиогр. 10 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11 февр. 1981 г., № 646—81 Деп) (РЖМат, 1981, 5А655ДЕП)
26. —, Три-ткани в касательном расслоении, определяемом многомерной поверхностью аффинного пространства. Моск. гос. пед. ин-т. М., 1981, 20 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 февр. 1981 г., № 517—81 Деп) (РЖМат, 1981, 6А683ДЕП)
27. *Белоусов В. Д.*, Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука, 1967, 223 с. (РЖМат, 1967, 11А212К)
28. —, Алгебраические сети и квазигруппы. Кишинев, «Штиинца», 1971, 168 с. (РЖМат, 1972, 8А311К)
29. —, *Рыжков В. В.*, Геометрия тканей. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. т. 10 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР», М., 1972, 159—188 (РЖМат, 1973, 2А602)
30. *Бляшке В.*, Введение в геометрию тканей. Перев. с нем. Физматгиз, 1959, 144 с. (РЖМат, 1961, 6А475К)
31. *Болодурин В. С.*, К инвариантной теории точечных соответствий трех проективных пространств. Изв. вузов. Мат., 1982, № 5, 9—15 (РЖМат, 1982, 9А586)
32. *Боцу В. П.*, Прямое доказательство обобщенной теоремы Графа — Зауэра. «Сб. статей по дифференц. геометрии», Калинин, 1974, 36—51 (РЖМат, 1975, 8А673)
33. —, Об одном классе четырехмерных шестиугольных три-тканей. Укр. геометрич. сб., Харьков, 1975, вып. 18, 27—36 (РЖМат, 1976, 4А732)
34. *Бычек В. И.*, О многомерном обобщении гиперболического пространства Аппеля и некоторых вопросах его дифференциальной геометрии. Моск. гос. пед. ин-т, М., 1979, 18 с., библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 янв. 1980 г., № 146—80 деп) (РЖМат, 1980, 5А659ДЕП)
35. —, О координатных три-тканях на подмногообразиях обобщенного пространства Аппеля. Моск. гос. пед. ин-т. М., 1980, 34 с., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 13 окт. 1980 г., № 4335—80Деп) (РЖМат, 1981, 1А713ДЕП)
36. —, О многомерном обобщении гиперболического пространства Аппеля и некоторых вопросах его дифференциальной геометрии. Изв. вузов. Мат., 1981, № 6, 65—68 (РЖМат, 1981, 11А715)
37. —, *К теории поверхностей пространства Аппеля гиперболического типа.* Редкол. ж. «Изв. вузов. Мат.», Казань, 1981, 27 с., ил., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 30 марта 1981 г., № 1425—81Деп) (РЖМат, 1981, 7А676ДЕП)
38. —, О конгруэнциях нормалей поверхности в трехмерном пространстве Аппеля гиперболического типа. Сб. «Ткани и квазигруппы», Калинин, 1981, 23—29 (РЖМат, 1982, 1А855)
39. *Гвоздович Н. В.*, Об инфинитезимальных автоморфизмах многомерных три-тканей. Минск. гос. пед. ин-т, Минск, 1980, 20 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 апр. 1980 г., № 1291—80Деп) (РЖМат, 1980, 8А622ДЕП)
40. —, О три-тканях, допускающих максимальные группы инфинитезимальных автоморфизмов. Минск. гос. пед. ин-т, Минск, 1980, 9 с., библиогр.

3 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 окт. 1980 г., № 4286—80Деп) (РЖМат, 1981, 2А721ДЕП)
41. —, О три-тканях максимальной подвижности. «Дифференц. геометрия многообразий фигур», Калининград, 1981, № 12, 13—17 (РЖМат, 1981, 11А736)
42. —, Инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей Боля и Муфанг. «Ткани и квазигруппы», Калинин, 1981, 83—91 (РЖМат, 1982, 1А933)
43. —, Об инфинитезимальных автоморфизмах многомерных три-тканей. Изв. вузов. Мат., 1982, № 5, 73—75 (РЖМат, 1982, 9А599)
44. *Егоров И. П.*, Движения в пространствах аффинной связности. В сб. «Движения в пространствах аффин. связности», Казань, Казанск. ун-т, 1965, 5—179 (РЖМат, 1966, 10А422)
45. *Жогова Т. Б.*, О фокальной три-ткани двупараметрического семейства двумерных плоскостей в P_5. В сб. «Геометрия погруженных многообразий», М., 1978, 40—46 (РЖМат, 1979, 4А722)
46. —, К вопросу о проективном изгибании двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P_5. Редкол. ж. «Изв. вузов. Мат.», Казань, 1979, 16 с., библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 июля 1979 г. № 2761—79Деп) (РЖМат, 1979, 10А485ДЕП)
47. —, Об одном классе двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P_5 с шестиугольной фокальной тканью. «Геометрия погружен. многообразий», М., 1979, 44—50 (РЖМат, 1980, 9А650)
48. —, О квазигруппе, порождаемой одним классом двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P_5. Изв. вузов. Мат., 1980, № 2, 63—66 (РЖМат, 1980, 6А749)
49. *Иванов А. Д.*, О четырехмерных три-тканях Боля эллиптического и гиперболического типов. Моск. гос. пед. ин-т, М., 1972, 18 с., ил., библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 2 окт. 1972 г., № 4832—72Деп) (РЖМат, 1973, 3А693ДЕП)
50. —, О четырехмерных три-тканях Боля параболического типа. Мос. гос. пед. ин-т. М., 1972, 11 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 2 окт. 1972 г., № 4833—72Деп) (РЖМат, 1973, 3А689ДЕП)
51. —, Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве. В сб. «Геометрия однород. пространств». М., 1973, 42—57 (РЖМат, 1973, 11А594)
52. —, Конечные уравнения четырехмерных три-тканей Боля. «Сб. статей по дифференц. геометрии.» Калинин, 1974, 70—78 (РЖМат, 1975, 8А675)
53. —, О четырехмерных тканях Боля эллиптического и гиперболического типов. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 9, 25—34 (РЖМат, 1976, 6А659)
54. —, О четырехмерных тканях Боля параболического типа. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1976, № 1, 42—47 (РЖМат, 1976, 10А422)
55. —, Взаимно-полярные три-ткани Боля гиперболического типа. В сб. Дифференц. геометрия многообразий фигур», Калининград, 1979, № 10, 30—35 (РЖМат, 1980, 1А819)
56. *Клековкин Г. А.*, О пучке связностей Вейля, присоединенном к четырехмерной три-ткани. В сб. «Геом. погружен. многообразий». М., 1981, 59—62
57. —, Пучок связностей Вейля и нормальная конформная связность на многообразии с относительно инвариантной квадратичной формой. «Ткани и квазигруппы», Калинин, 1981, 47—55 (РЖМат, 1982, 1А929)
58. —, О тензоре Вейля псевдоконформной структуры, присоединенной к четырехмерной три-ткани. Киров. гос. пед. ин-т, Киров, 1982, 25 с., библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 авг. 1982 г., № 4289—82Деп) (РЖМат, 1982, 11А617ДЕП)
59. —, К геометрии четырехмерной три-ткани. Киров. гос. пед. ин-т, Киров, 1982, 21 с., библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 авг. 1982 г., № 4288—82Деп) (РЖМат, 1982, 11А618ДЕП)
60. *Кузьмин Е. Н.*, О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лупами Муфанг. Алгебра и логика, 1971, *10*, № 1, 3—22 (РЖМат, 1971, 11А309)

61. *Мальцев А. И.*, Аналитические лупы. Матем. сб., 1955, *36*, № 3, 569—576 (РЖМат, 1956, 7204)
62. *Манин Ю. И.*, Кубические гиперповерхности. I. Квазигруппы классов точек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, *32*, № 6, 1223—1244 (РЖМат, 1969, 9А294)
63. *Михайлов Ю. И.*, О структуре почти грассмановых многообразий. Изв. вузов. Математика, 1978, № 2, 62—72 (РЖМат, 1978, 12А1065)
64. *Петров А. З.*, Пространства Эйнштейна. М., ГИФ—МЛ, 1961, 464 с.
65. *Помаскина Л. А.*, Идемпотентные квазигруппы, определяемые на многомерной три-ткани. «Ткани и квазигруппы», Калинин, 1982, 55—63 (РЖМат, 1982, 12А232)
66. *Рыжков В. В.*, Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия, 1970. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1971, 153—174 (РЖМат, 1972, 3А649)
67. *Табинин Л. В.*, *Михеев П. О.*, Об аналитических лупах Боля. «Ткани и квазигруппы», Калинин, 1982, 102—109 (РЖМат, 1982, 12А227)
68. *Стернберг С.*, Лекции по дифференциальной геометрии. Перев. с англ. М., Мир, 1970, 412 с. (РЖМат, 1971, 7А754К)
69. *Тимошенко В. В.*, О три-тканях над коммутативными ассоциативными алгебрами. Укр. геометр. сб., 1975, вып. 18, 136—151 (РЖМат, 1976, 4А733)
70. —, О три-ткани над коммутативными ассоциативными алгебрами. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 11, 109—112 (РЖМат, 1976, 9А639)
71. —, О подтканях, определяемых делителями нуля коммутативной ассоциативной алгебры. В сб. «Геометрия однородных пространств», М., 1976, 102—115 (РЖМат, 1977, 4А729)
72. —, О три-тканях над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля. Укр. геометр. сб. Респ. межвед. темат. науч. сб., 1977, вып. 20, 102—114 (РЖМат, 1977, 11А632)
73. —, О три-тканях над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1977, № 3, 116—118 (РЖМат, 1977, 12А777)
74. —, Три-ткани над некоторыми классами коммутативных ассоциативных алгебр. «Геометрия погружен. многообразий». М., 1978, 104—111 (РЖМат, 1979, 4А746)
75. —, О структуре многомерной три-ткани, являющейся вещественной реализацией три-ткани над коммутативной ассоциативной алгеброй. «Геометрия погружен. многообразий», М., 1979, 93—100 (РЖМат, 1980, 9А652)
76. *Толстихина Г. А.*, О четырехмерных тканях с симметричным тензором кривизны. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1981, 12—22 (РЖМат, 1982, 1А891)
77. —, Классификация четырехмерных три-тканей W_8. Материалы 5 Конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов, М., март 1982, ч. 1. М., 1982, 43—46, библиогр. 2 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 15 июля 1982 г., № 3814—82Деп) (РЖМат, 1982, 11А616ДЕП)
78. —, Об инвариантных трансверсальных распределениях четырехмерных три-тканей W_8. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1982, 115—120 (РЖМат, 1982, 12А737)
79. *Федорова В. И.*, О три-тканях с частично-симметричным тензором кривизны. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1976, № 11, 114—117 (РЖМат, 1977, 6А556)
80. —, Об одном классе три-тканей W_6 с частично кососимметричным тензором кривизны. Укр. геометр. сб. Респ. межвед. темат. науч. сб. Харьков, 1977, вып. 20, 115—124 (РЖМат, 1977, 11А633)
81. —, Об условии, определяющем многомерные три-ткани Боля. Сиб. мат. ж., 1978, *19*, № 4, 922—928 (РЖМат, 1978, 12А1076)

82. —, Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a_{ij}. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1981, 110—123 (РЖМат, 1982, 1А894)
83. —, Об интерпретации шестимерной три-ткани Боля в трехмерном проективном пространстве. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1982, 142—148 (РЖМат, 1982, 12А739)
84. *Ходж В., Пидо Д.*, Методы алгебраической геометрии. Т. 2, Перев. с англ. М., Изд. ин-лит., 1954, 432 с. (РЖМат, 1956, 5454К)
85. *Шелехов А. М.*, О три-тканях с частично симметричным тензором кривизны. Сиб. мат. ж., 1981, 22, № 1, 210—219 (РЖМат, 1981, 6А685)
86. —, О локальных алгебрах циклической три-ткани. «Дифференц. геометрия многообразий фигур». Калининград, 1980, № 11, 115—122 (РЖМат, 1981, 1А714)
87. —, О восьмимерных циклических три-тканях. В сб. «Ткани и квазигруппы», Калинин, 1981, 124—135 (РЖМат, 1982, 1А895)
88. —, Об алгебраической восьмимерной три-ткани на многообразии пучков кривых второго порядка. «Ткани и квазигруппы». Калинин, 1982, 133—142 (РЖМат, 1982, 12А738)
89. *Aczel J.*, Quasi groups, nets and nomograms. Adv. Math. 1965, *1*, № 3, 383—450 (РЖМат, 1966, 10А425)
90. —, On the Thompsen condition for webs. J. Geom., 1981, *17*, № 2, 155—160 (РЖМат, 1982, 9А553)
91. *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M.*, Self-duality in four-dimentional Riemannien geometry. Proc. Roy. Soc. London, 1978, *A362*, № 1711, 425—461 (РЖМат, 1979, 5А538)
92. *Blaschke W., Bol G.*, Geometrie der Gewebe. Springer Verlag, Berlin, 1938, 339 S.
93. *Bol G.*, Gewebe und Gruppen. Math. Ann., 1937, *114*, 414—431
94. *Cartan E.*, Les sous-groupes continus de transformations. Ann. Ec. Normale, 1908, 25, 57—194
95. *Chern Shiing-Shen*, Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Maigfältigkeiten in R_{2r}. Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936, *11*, 333—358
96. —, Web geometry. Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *6*, № 1, 1—8 (РЖМат, 1982, 9А600)
97. —, Griffits Ph. A., Abel's theorem and webs. Jahresber. Dtsch. Math. — Ver., 1978, *80*, № 1—2, 13—110 (РЖМат, 1978, 12А1078)
98. —, —, An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank. Ann. Scu. norm. super Pisa Cl. Sci. 1978, *5*, № 3, 539—557 (РЖМат, 1979, 4А655)
99. *Hangan Th.*, Géométrie differentielle grassmaniene. Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 1966, *11*, № 5, 519—531, (РЖМат, 1967, 3А429)
100. *Knesser H.*, Gewebe und Gruppen. Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1932, *9*, 147—151
101. *Moufang R.*, Zur Struktur von Alternativkorpern. Math. Ann., 1935, *110*, 416—430
102. *Nisthimori* Toshiyuki, Octahedral webs on closed manifolds. Tohoku Math. J., 1980, *32*,, № 3, 399—410 (РЖМат, 1981, 4А580)
103. —, Some remarks on octahedral webs. Jap. J. Math., 1981, 7, № 1, 169—179
104. *Reidemeister K.*, Gewebe und Gruppen. Math. Z., 1928, 427—435
105. *Sagle A. A.*, Malcev algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, *101*, № 3, 426—458 (РЖМат, 1963, 5А293)
106. *Wood J. A.*, An algebraization theorem for local hipersurfaces in projective space. University of Bercley, 1982, Doct. Diss., 1—87
107. *Yamaguti Kiyosi*, On algebras of totally geodesic space (Lie triple systems). J. Sci. Hirosima Univ., 1957, *A21*, № 2, 107—113 (РЖМат, 1960, 4982)