Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Ф. Вакуленко, Неравенство Трева и отсутствие положительных собственных значений у оператора Шредингера с комплексным потенциалом, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 147, 13–17

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
28 марта 2025 г., 12:48:37

А.Ф.Вакуленко

НЕРАВЕНСТВО ТРЕВА И ОТСУТСТВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ У ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В этой заметке мы продолжим обсуждение теоремы Като для оператора Шредингера и оператора Штарка, начатое в [I] .

ТЕОРЕМА I. Пусть $f \in L_2(R^n)$ – решение уравнения

$$-\Delta f + v f = f , \tag{I}$$

где v – комплексная функция такая, что $|x|\, v(x)$ ограничено и стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Тогда f равна нулю тождественно.

В [I] были приведены следующие неравенства $(a>0, r=|x|)$:

$$\int_{R^n} r^{2a+2} |\Delta\varphi+\varphi|^2 dx \geqslant 4a \int_{R^n} r^{2a} |\varphi|^2 dx , \tag{2}$$

$$\int_{R^n} e^{2ar} |\Delta\varphi+\varphi|^2 dx \geqslant a \int_{R^n} e^{2ar} r^{-2} |\varphi|^2 dx . \tag{3}$$

Неравенство (2) использовалось ранее в [3] в доказательстве теоремы единственности для уравнения (I). Кроме того, сравнительно давно известно неравенство Трева, которое применялось для доказательства существования фундаментального решения у произвольного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Для оператора Лапласа неравенство Трева выглядит следующим образом:

$$\int_{R^n} e^{2ar^2} |\Delta\varphi+\varphi|^2 dx \geqslant 4a^2 \int_{R^n} e^{2ar^2} |\varphi|^2 dx \tag{4}$$

Указанные неравенства применяются для доказательства теоремы I по следующей схеме. Пусть $\|\varphi\|_a$ означает L_2 – норму функции $\rho\varphi$, где ρ – один из весов r^a, e^{ar} или e^{ar^2} . Пусть $A=(\Delta+I)^{-1} v$. Уравнение (I) запишем в следующем виде

$$A f = f . \tag{5}$$

Неравенства (2)-(4) означают, что норма A относительно $\|\cdot\|_a$ стремится к нулю с ростом a . Равенство $f \equiv 0$ вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА I. Пусть f – решение уравнения (5). Тогда величина $\|f\|_a$ конечна при всех a, если она конечна при некотором $a=a_0 \geqslant 0$. Допустим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\|Af\|_{a+\varepsilon} \leqslant C_a \|f\|_a$ при всех a. Тогда утверждение леммы I справедливо. Действительно, пусть d таково, что $\|f\|_a < \infty$ при $a<d$ и $\|f\|_a = \infty$ при $a>d$. Но $\|f\|_{d+\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant C\|f\|_{d-\frac{\varepsilon}{2}}$ и, значит $d=\infty$. Это рассуждение, названное в [2] бутстрапом, провел Агмон для потенциалов, убывающих как $r^{-1-\varepsilon}$. Он использовал аналог неравенства (2), в котором вес r заменен на $1+r$. Для того, чтобы провести бутстрап с неравенствами (3) и (4), нужно потребовать $|V(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon r}$ и, соответственно $|V(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon r^2}$. Доказательство леммы I (иными словами, уточнение бутстрапа на $V= = o(\frac{1}{r})$) не представляет большого труда в случае неравенства (2). Его можно провести непосредственно в терминах оператора A. Это связано с тем, что $a=0$ не является точной границей справедливости неравенства (2). Применение неравенств (3) и (4) требует дополнительных оценок интерполяционного типа, которые удобнее получать из дифференциального уравнения.

ЛЕММА 2. В условиях теоремы I все нормы $\|e^{ar} f\|$ конечны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В приложении мы построим последовательность функций ρ_n таких, что ρ_n ограничены, $\rho_n = e^{ar}$ при $r<n$, и оценка

$$\|r\rho_n(\Delta\varphi+\varphi)\| \geqslant c\,\|\rho_n\varphi\| \tag{6}$$

равномерна по n. Из этой оценки и уравнения (I) следует, что

$$\|r\rho_n V f\| = \|r\rho_n(\Delta f + f)\| \geqslant c\,\|\rho_n f\|. \tag{7}$$

Предположим, что $\|e^{ar} f\| = \infty$. Тогда величина $\|\rho_n f\|$ неограниченно растет с ростом n. Пусть χ – характеристическая функция шара радиуса m. При $n>m$ норма $\|\rho_n \chi_m f\|$ не зависит от n. Поэтому при больших n из (7) следует

$$\|rV\rho_n(1-\chi_m)f\| > \frac{c}{2}\,\|\rho_n(1-\chi_m)f\|.$$

Выбрав m так, что $|rV(1-\chi_m)| < \frac{c}{2}$, получим противоречие. Отсутствие L_2 – решений уравнения (I) известно для потенциалов V вида $V=V_1+V_2$, где

$$V_1 = o\left(\frac{1}{r}\right) \tag{8}$$

V_2 - вещественно, $V_2 = o(1)$, $r \frac{\partial}{\partial^2} V_2 = o(1)$. (9)

Возможность считать V_1 комплексной отмечалось в [4], где также допускались локальные сингулярности у V.

В работе [5] доказано отсутствие L_2 - решений уравнения

$$(-\Delta + x_1) f + V f = f . \tag{10}$$

Условия на V в этой работе следует, вероятно, считать аналогом условия (9) для уравнения (I). Наш подход основан на неравенстве

$$\int_{R^n} e^{2ax_1} |\Delta \varphi + x_1 \varphi|^2 dx \geqslant a \int_{R^n} e^{2ax_1} |\varphi|^2 dx .$$

Из него немедленно следует, что уравнение (10) не имеет решений с конечной при всех a нормой $\| e^{ax_1} f \|$, если V ограниченная комплексная функция. Если $V = o(1)$, то справедлив аналог леммы I с $a_0 > 0$. Вероятно, что потребовав $V = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ можно положить $a_0 = 0$.

Приложение

Оценку (6) мы докажем, применяя разложение по парциальным волнам

$$\| x \rho (\varphi'' + \varphi - \frac{b}{x^2} \varphi) \| \geqslant c \| \rho \varphi \| .$$

Отбрасывая для простоты двумерный случай, будем считать, что $b \geqslant 0$. Перепишем это неравенство, введя обозначения $\rho = e^{\alpha}$ $g = \rho \varphi$,

$$J = \| x (g'' + g + \alpha'^2 g - \frac{b}{x^2} g - 2 \alpha' g' - \alpha'' g) \| \geqslant c \| g \| .$$

Слагаемые под знаком нормы слева обозначим соответственно

$$G_1 = x (g'' + g + \alpha'^2 g - \frac{b}{x^2} g),$$

$$G_2 = x (2 \alpha' g' + \alpha'' g).$$

Интегрируя по частям, получим следующие тождества

$$-2\int_0^\infty G_1G_2\,dx=\int_0^\infty 4x(x\alpha')'g'^2dx+\int_0^\infty\{2\alpha'(x^2+x^2\alpha'^2)'-(x^2\alpha'')''\}g^2dx \tag{II}$$

$$\int_0^\infty G_1^2dx=\int_0^\infty\left(G_1+\frac{1}{2}g'\right)^2dx+\int_0^\infty\frac{b}{2x^2}g^2dx+$$
$$+\int_0^\infty\left(\frac{1}{4}g'^2+\frac{1}{2}g^2\right)dx+\int_0^\infty\frac{1}{2}\left(x\alpha'^2\right)'g^2dx. \tag{I2}$$

Положим

$$\mathcal{F}_1=4x(x\alpha')'$$

$$\mathcal{F}_2=2\alpha'(x^2+x^2\alpha'^2)'-(x^2\alpha'')''+\frac{1}{2}\left(x\alpha'^2\right)'.$$

Из $\mathcal{J}^2\geqslant\int_0^\infty G_1^2-2\int_0^\infty G_1G_2$, (II) и (I2), в котором отброшены два первые слагаемые, получается следующее неравенство

$$\mathcal{J}^2\geqslant\int_0^\infty\left(\frac{1}{4}g'^2+\frac{1}{2}g^2\right)dx+\int_0^\infty\left(\mathcal{F}_1g'^2+\mathcal{F}_2g^2\right)dx.$$

(Заметим, что, если положить $\alpha\equiv 0$, получится неравенство, уточняющее (2) при $a=0$. Благодаря наличию члена g'^2 мы можем также допустить потенциалы вида $o\left(\frac{1}{z}\right)\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ такой, что $\|\mathcal{U}g\|^2\leqslant c\left(\|\nabla g\|^2+\|g\|^2\right)$). Построим функцию α . Обозначим $\omega=x\alpha'$, тогда

$$\mathcal{F}_1=4x\omega',$$

$$\mathcal{F}_2=4\,\frac{\omega^2\omega'}{x}+\omega''-(x\omega')''+\left\{4\omega-\frac{\omega^2}{2x^2}+\frac{\omega\omega'}{x}\right\}.$$

Выберем производную ω' следующим образом. На $(0,n)$ она равна a , затем на $(n,2n)$ она гладко спадает до нуля таким образом, что $\omega''\sim\frac{a}{n}$ и $\omega'''\sim\frac{a}{n^2}$. Далее продолжаем ω' отрицательной так, что

$$\omega'>-\frac{a}{nx},\quad \omega''\sim\frac{a}{nx^2},\quad \omega'''\sim\frac{a}{nx^3}. \tag{I3}$$

Потребуем, чтобы выполнялось $\int_0^\infty\omega'dx=0$. Это условие совместно с (I3) поскольку интеграл от $\frac{1}{x}$ расходится. Функцию ω (соответственно α) выберем так, что ω (соответственно α) равна ax на $(0,n)$. В итоге ω - неотрицательная функция с компактным носителем, α - постоянная при больших n . Коэффициенты $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ допускают при больших n оценку снизу через $\left(-\frac{1}{n}\right)$. Для $\mathcal{F}_1$ это видно из (I3). Для $\mathcal{F}_2$ возьмем, например, выражение в скобках. При $x\in(0,n)$ имеем

$$\left\{4\omega - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega\omega'}{x}\right\} = 4\omega + \frac{a^2}{2} > 0 .$$

При $x \in (n, \infty)$ получим

$$\frac{\omega\omega'}{x} > \frac{ax}{x}\left(-\frac{a}{nx}\right) > -\frac{a^2}{n^2} ,$$

$$4\omega - \frac{\omega^2}{2x^2} = \omega\left(4 - \frac{\omega}{2x^2}\right) > \omega\left(4 - \frac{a}{n}\right) > 0 .$$

Литература

1. В а к у л е н к о А.Ф. Многомерные неравенства Харди и отсутствие положительных собственных значений у оператора Шредингера с комплексным потенциалом. В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.16. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1984, т.138, с.33-34.
2. Р и д М., С а й м о н Б. Методы современной математической физики, т.4, М., 1982.
3. H ö r m a n d e r L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators II, Springer-Verlag, 1983.
4. F r o e s e R., H e r b s t I., H o f f m a n n - O s t e n h o f M., H o f f m a n n - O s t e n h o f T. On the absence of positive eigenvalues for one-body Schrodinger operators. Journal D'Analyse Mathematique, 1982, v.41, p.272-284.
5. A v r o n J.E., H e r b s t I.W. Spectral and Scattering Theory of Schrodinger Operators Related to the Stark Effect. Comm.Math.Phys. 1977, v.52, n° 3, p.239-254.

Vakulenko A.F. The Treves estimate and absence of positive eigenvalues for Shrodinger operator with complex potentials.

The absence of embedded eigenvalues for Shrodinger and Stark operators is proved using inequalities of the Hardy type.