В. С. Серебрякова, О круговых движениях связанных маятников, *Изв. вузов. Матем.*, 1961, номер 3, 103–108

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1961 МАТЕМАТИКА № 3 (22)

В. С. Серебрякова

О КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

В статье [1] было рассмотрено движение двух взаимодействующих точек по окружности, описываемое системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} + R_1(x, \dot{x}) + f(x) = k_1 \psi(y - x), \\ \ddot{y} + R_2(y, \dot{y}) + f(y) = -k_2 \psi(y - x), \end{cases} \tag{1}$$

где x, y — угловые координаты рассматриваемых точек; $m_1 R_1(x, \dot{x})$ и $m_2 R_2(y, \dot{y})$ — силы сопротивления; $m_1 f(x)$ и $m_2 f(y)$ — приложенные к точкам силы, $\mu\psi(y-x)$ — сила взаимодействия, k_1 и k_2 — постоянные, равные соответственно $\frac{\mu_1}{m_1}$ и $\frac{\mu_2}{m_2}$.

Механической моделью движений, описываемых уравнениями (1), может служить движение пары связанных маятников. В этой заметке рассматриваются маятники одинаковых масс с приложенными к ним одинаковыми вращающими моментами L.

В работе [1] рассмотрен случай достаточно малых k и сформулированы теоремы об оценке области притяжения начала координат, о существовании круговых и периодических движений и некоторые достаточные условия наличия их.

Напомним, что под круговым движением мы понимали такое движение, при котором скорость точки удовлетворяет при всех t условию $0 < a_1 < u(t) < b_1$ или $0 < a_2 < v(t) < b_2$.

В предлагаемой статье k берется не обязательно малым.

При накладываемых ограничениях на постоянные величины, входящие в уравнения (1), даются некоторые условия наличия периодических и круговых движений маятников.

Легко проверить, что система (1) для связанных маятников имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \alpha\dot{\varphi}_1 + \beta \sin \varphi_1 = k \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L, \\ \ddot{\varphi}_2 + \alpha\dot{\varphi}_2 + \beta \sin \varphi_2 = -k \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — угловые координаты маятников, α, β, k, L — постоянные числа.

Система (2) эквивалентна системе

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\varphi}_1 = x, \\ &\dot{x} = -\alpha x - \beta \sin\varphi_1 + k\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L, \\ &\dot{\varphi}_2 = y, \\ &\dot{y} = -\alpha y - \beta\sin\varphi_2 - k\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

особые точки которой определяются системой

$$\left\{\begin{aligned} &x = 0, \\ &-\alpha x - \beta\sin\varphi_1 + k\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L = 0, \\ &y = 0, \\ &-\alpha y - \beta\sin\varphi_2 - k\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L = 0, \end{aligned}\right.$$

имеющей решение

$$\left\{\begin{aligned} &x = 0, \\ &y = 0, \\ &\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \frac{L}{\beta}, \\ &\cos\left(\varphi_2 + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right) = \cos\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right) = \\ &= -\frac{\beta}{2k}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right), \\ &\sin\left(\varphi_1 - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right) = \sin\left(\varphi_2 - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right) = \\ &= \frac{\beta}{2k}\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Для исследования на устойчивость найденных особых точек сделаем замену переменных $\varphi_1 - \varphi_1^0 = \theta$, $\varphi_2 - \varphi_2^0 = \psi$, где $\sin\varphi_1^0 = \sin\varphi_2^0 = \frac{L}{\beta}$, и сведем систему (2) к виду

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \beta f(\theta) = k\sin(\psi - \theta), \\ &\ddot{\psi} + \alpha\dot{\psi} + \beta f(\psi) = -k\sin(\psi - \theta), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

где $f(\theta) = \sin\varphi_1 - \frac{L}{\beta}$ и $f(\psi) = \sin\varphi_2 - \frac{L}{\beta}$.

Так как функции $f(\theta)$, $f(\psi)$, $\sin(\psi - \theta)$ — периодические с периодом 2π, то они имеют три корня на периоде, причем

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi < 0.$$

Пусть $f(0) = f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$, где $\eta_1 > 0$, $\eta_2 < 0$ — ближайшие к $\varphi = 0$ нули функции $f(\varphi)$, причем $\eta_1 - \eta_2 = 2\pi$. Обозначим соответственно особые точки системы (3), определяемые первыми четырьмя уравнениями (4), M_1 (0, 0, 0, 0), $M_2(\eta_1, 0, \eta_1, 0)$, $M_3(\eta_2, 0, \eta_2, 0)$, $M_4(\eta_1, 0, \eta_2, 0)$, $M_5(\eta_2, 0, \eta_1, 0)$.

Характеристическое уравнение системы первого приближения системы (5) в окрестности некоторой точки $M_0(\theta_0, 0, \psi_0, 0)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2(\alpha+\lambda)^2 + \lambda(\alpha+\lambda)[\beta f'(\theta_0) + \beta f'(\psi_0) + 2kA] - \\ - k^2A^2[(\beta f'(\theta_0) + kA)(\beta f'(\psi_0) + kA)] = 0, \qquad (6)$$

здесь $A = \cos(\psi_0 - \theta_0)$.

Для найденных выше особых точек уравнение (6) распадается на два множителя:

$$\Delta(\lambda) = [\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta f'(\theta_0)][\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta f'(\theta_0) + 2kA] = 0, \qquad (7)$$

и так как $f'(M_1) > 0$, $f'(M_2) < 0$, $f'(M_3) < 0$, $f'(M_4) < 0$, $f'(M_5) < 0$, то из уравнения (7) следует, что начало координат асимптотически устойчиво, а $M_2 - M_5$ — неустойчивые особые точки типа обобщенного седла первого рода.

В дополнение к особым точкам системы (3), рассматриваемым в работе [1], в нашем случае появляются особые точки, определяемые последними двумя уравнениями (4), $M_6(\eta_1^0, 0, \eta_2^0, 0)$, $M_7(\eta_2^0, 0, \eta_1^0, 0)$, $M_8(\eta_1^0, 0, \eta_2^1, 0)$, $M_9(\eta_2^1, 0, \eta_1^0, 0)$, $M_{10}(\eta_2^0, 0, \eta_1^1, 0)$, $M_{11}(\eta_1^1, 0, \eta_2^0, 0)$, $M_{12}(\eta_2^1, 0, \eta_1^1, 0)$, $M_{13}(\eta_1^1, 0, \eta_2^1, 0)$, $M_{14}(\eta_1^0, 0, \eta_1^1, 0)$, $M_{15}(\eta_1^1, 0, \eta_1^0, 0)$, $M_{16}(\eta_2^0, 0, \eta_2^1, 0)$, $M_{17}(\eta_2^1, 0, \eta_2^0, 0)$. Эти особые точки лежат внутри области $\eta_2 < \theta < \eta_1$, $\eta_2 < \psi < \eta_1$.

Несложными рассуждениями можно убедиться, что других особых точек система (3) не имеет.

Выше предполагалось, что решения (4) существуют, что возможно при

$$L < \beta,\ 4kL < \beta^2,\ 4k^2 + L^2 > \beta^2. \qquad (8)$$

Качественное исследование системы (2) проводится тем же способом, как и качественное исследование системы (2) в работе [1], т. е. с помощью системы

$$\frac{dx}{d\varphi_1} = \frac{-\alpha x - \beta\sin\varphi_1 + k\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L}{x},$$
$$\frac{dy}{d\varphi_2} = \frac{-\alpha y - \beta\sin\varphi_2 - k\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + L}{y}, \qquad (9)$$

описывающей движение на фазовых плоскостях $xo\varphi_1$ и $yo\varphi_2$ и двух систем сравнения на каждой из фазовых плоскостей, полученных из (9) заменой $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$ на 1 и -1. На плоскости $xo\varphi_1$ указанные выше системы имеют вид

$$\frac{dx^-}{d\varphi_1} = \frac{-\alpha x - \beta\sin\varphi_1 - k + L}{x}, \qquad (10)$$

$$\frac{dx^+}{d\varphi_1} = \frac{-\alpha x - \beta\sin\varphi_1 + k + L}{x}. \qquad (11)$$

Очевидно, справедливы неравенства:

$$\frac{dx^-}{d\varphi_1} \leqslant \frac{dx}{d\varphi_1} \leqslant \frac{dx^+}{d\varphi_1} \quad \text{при } x \geqslant 0,$$
$$\frac{dx^+}{d\varphi_1} \leqslant \frac{dx}{d\varphi_1} \leqslant \frac{dx^-}{d\varphi_1} \quad \text{при } x < 0. \qquad (12)$$

Будем считать, что особые точки уравнений (10) и (11), определяемые уравнениями $x=0$, $\sin\varphi=\frac{L\pm k}{\beta}$, существуют, что возможно при

$$L\pm k\leqslant\beta. \tag{13}$$

Пусть особые точки уравнения (10) будут $(\xi_1, 0)$, $(\xi_0, 0)$, $(\xi_2, 0)$, а уравнения (11) — $(\zeta_1, 0)$, $(\zeta_0, 0)$, $(\zeta_2, 0)$; очевидно, $\zeta_1<\eta_1<\xi_1$. Легко проверить, что выполнимо, по крайней мере, одно из неравенств: $\zeta_1<\eta_1^1<\eta_1$ или $\zeta_1<\eta_1^0<\eta_1$.

Заметим, что при $L=0$ возможно лишь последнее неравенство и что $\eta_1^1=\eta_1$, а $\eta_2^1=\eta_2$. Обозначим через $x^+(\eta_i, \varphi)\{x^-(\eta_i, \varphi)\}$ интегральную кривую уравнения (11) $\{(10)\}$, выходящую из точки $(\eta_i, 0)$, а точку пересечения её с осью $x - x^+(\eta_i, 0)\{x^-(\eta_i, 0)\}$. Проводить исследование возможных типов расположения проекций на фазовых плоскостях $xo\varphi_1$ и $yo\varphi_2$, как это сделано в статье [1], мы не будем. Только заметим, что так как в системе (2) коэффициенты в обоих уравнениях одинаковы, то возможны лишь комбинации из одинаковых типов расположения проекций на фазовых плоскостях $xo\varphi_1$ и $yo\varphi_2$. Если маятники имеют одинаковые начальные состояния и начальные скорости, то они совершают одинаковые движения.

В этой статье нас интересует только третий случай расположения траекторий системы (2), т. е. случай наличия кругового движения для каждого из маятников. В этом случае, как следует из статьи [1], система (2) имеет верхнее периодическое решение.

Верхним периодическим решением системы (2) мы называли такое решение $x=X(\varphi_1, \varphi_2)$, $y=Y(\varphi_1, \varphi_2)$, которое для всех φ_1 и φ_2 удовлетворяет условиям:

$$X(\varphi_1, \varphi_2)=X(\varphi_1+2\pi;\ \varphi_2+2\pi),\quad Y(\varphi_1, \varphi_2)=Y(\varphi_1+2\pi;\ \varphi_2+2\pi)$$

и

$$X(\varphi_1, \varphi_2)\geqslant 0,\quad Y(\varphi_1, \varphi_2)\geqslant 0.$$

Решение $x=X(\varphi_1, \varphi_2)$, $y=Y(\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi_1=\varphi_1(t)$, $\varphi_2=\varphi_2(t)$, которое для всех φ_1 и φ_2 удовлетворяет условиям

$$X(\varphi_1, \varphi_2)=X(\varphi_1+2\pi;\ \varphi_2+2\pi),$$
$$Y(\varphi_1, \varphi_2)=Y(\varphi_1+2\pi;\ \varphi_2+2\pi)$$

и

$$X(\varphi_1, \varphi_2)\geqslant 0,\ Y(\varphi_1, \varphi_2)\geqslant 0.$$

Теорема 1. *Если существует верхнее периодическое по* φ_1 *решение уравнения* (10) *и выполняются неравенства* (8) *и* (13), *то существует периодическое по* φ_1 и φ_2 *решение системы* (2).

Для существования верхнего периодического решения уравнения (10), как известно из работы [2], при

$$L>k \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$x^-(\xi_2, 0)>x^-(\xi_1, 0).$$

В силу единственности интегральных кривых уравнений (10) и (11) и выполнения неравенств (12), замечаем, что всегда

$$x^+(\zeta_2, 0)>x^+(\zeta_1, 0),$$

а это необходимо и достаточно для существования верхнего периодического решения уравнения (11). Дальнейшие рассуждения проводятся как и в теоремах 2 и 3 статьи [1]. Условия существования периодических решений уравнений (10) и (11) даны в работах [2] и [3].

Теорема 2. *Для существования периодического по* φ_1 и φ_2 *решения системы* (2) *достаточно при выполнении неравенств* (8), (13) *и* (14), *чтобы имело место одно из условий*:

$$\alpha\xi_2+\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_2}{2}+(k-L)\xi_2}>\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_1}{2}+(k-L)\xi_1}+\alpha\xi_1 \tag{15}$$

или

$$2\pi\alpha\leqslant\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_2}{2}+(k-L)\xi_2}-\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_1}{2}+(k-L)\xi_1}. \tag{16}$$

По лемме 1 [3] для $x^-(\xi,\ 0)$ справедливо неравенство

$$\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_1}{2}+(k-L)\xi_1+\alpha^2\xi_1^2}<x^-(\xi_1,\ 0)<$$

$$<\alpha\xi_1+\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_1}{2}+(k-L)\xi_1}.$$

По лемме 2 той же статьи имеем

$$\alpha\xi_2+\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_2}{2}+(k-L)\xi_2}<x^-(\xi_2,\ 0)<$$

$$<\sqrt{4\beta\sin^2\frac{\xi_2}{2}+(k-L)\xi_2}.$$

Поэтому неравенство (15) доказываемой теоремы обуславливает наличие верхнего периодического решения уравнения (10), тогда по теореме 1 существует периодическое решение системы (2).

Аналогичные рассуждения проводятся при выполнении неравенства (16), если принять во внимание теорему 4 указанной выше статьи.

Следствие. Круговые движения связанных маятников существуют, если выполняются условия одной из теорем 1 или 2.

Приведем пример рассматриваемой в этой статье системы (2). Пусть $k=0{,}5$; $L=0{,}68$; $\beta=1{,}2$; $\alpha=0{,}01$, тогда система (2) имеет вид

$$\begin{cases}\ddot\varphi_1+0{,}01\dot\varphi_1+1{,}2\sin\varphi_1=0{,}5\sin(\varphi_2-\varphi_1)+0{,}68,\\ \ddot\varphi_2+0{,}01\dot\varphi_2+1{,}2\sin\varphi_2=-0{,}5\sin(\varphi_2-\varphi_1)+0{,}68.\end{cases} \tag{17}$$

Легко проверить, что неравенства (8), (13) и (14) выполняются. Имеем

$$\sin\eta=\frac{L}{\beta}=0{,}5667,\quad \eta_1=2{,}5394,\quad \eta_0=0{,}6021,\quad \eta_2=-3{,}7437,$$

$$\sin\xi=\frac{L-k}{\beta}=0{,}15,\quad \xi_1=2{,}9903,\quad \xi_0=0{,}1513,\quad \xi_2=-3{,}2928,$$

$$\cos\left(\varphi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right)=-0{,}9780,\quad \eta_1^0=2{,}3140,\quad \eta_2^0=-3{,}5503,$$

$$\sin\left(\varphi-\frac{1}{2}\arcsin\frac{4kL}{\beta^2}\right)=0{,}6954,\quad \eta_1^1=1{,}3869,\quad \eta_2^1=-3{,}2923.$$

Таким образом, указанные L, β, α, k удовлетворяют условиям теоремы 2, следовательно, система (17) имеет периодическое решение.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
13 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Серебрякова, Е. А. Барбашин. Качественное исследование уравнений, описывающих движение взаимодействующих точек по окружности. Изв. вузов, Матем., № 2, 1961.

2. В. А. Табуева. К вопросу о форме области притяжения нулевого решения дифференциального уравнения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. Изв. вузов, Матем., № 4, стр. 248—264, 1958.

3. В. А. Табуева. Оценка критического значения параметра α для дифференциального уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + f(x) = 0$. Изв. вузов, Матем., № 2, стр. 227—237, 1958.

А. Я. ВОЛЬПЕРТ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ В УЗКОМ СМЫСЛЕ И УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА ДЛЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

(аннотация статьи, принятой к печати)

В работе рассматриваются аддитивные функции множеств $f(e)$ определенные на измеримых по Лебегу подмножествах e ограниченного и измеримого множества E эвклидова пространства, для которых выполняется одно из двух условий: α (условия Липшица. Для всякого измеримого подмножества $e \subset E \, |f(e)| \leqslant K \operatorname{mes} e$, где K постоянная, независящая от e; β) условие абсолютной непрерывности в узком смысле. Функция $f(e)$ абсолютно непрерывна в узком смысле на E, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой системы подмножеств $e_i \subset E$ $i = 1, 2, \ldots, n$ (не обязательно различных), сумма мер которых меньше δ, выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| < \varepsilon$. Доказываются теоремы:

Теорема I. *Если аддитивная функция $f(e)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве E, то она абсолютно непрерывна в узком смысле на этом множестве.*

Теорема II. *Аддитивная функция $f(e)$, абсолютно непрерывная в узком смысле на множестве E, удовлетворяет на нем условию Липшица.* Из доказанных теорем вытекает эквивалентность условий для аддитивных функций множеств. (Работа поступила в журнал „Математика" 14. IV. 1960).