



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. V. Karpov, Minimal k -connected graphs with minimal number of vertices of degree k , *Žap. Nauchn. Sem. POMI*, 2014, Volume 427, 41–65

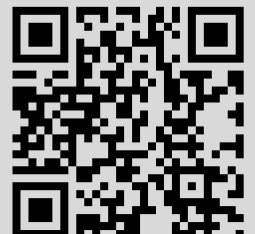
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.169

February 18, 2025, 19:57:40



Д. В. Карпов

МИНИМАЛЬНЫЕ k -СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ С
МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН СТЕПЕНИ k

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество – через $v(G)$. Для множества и количества рёбер графа G мы будем применять обозначения $E(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а максимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\Delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $N_G(x)$.

Через $K_{m,n}$ мы будем обозначать полный двудольный граф, доли которого содержат m и n вершин.

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* – в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

Определение 1. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Через $G - R$ мы обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и рёбер из R , а также всех рёбер, инцидентных вершинам из R .

2) Назовем множество R разделяющим, если граф $G - R$ несвязен.

3) Пусть $X, Y \subset V(G)$, $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R отделяет множество X от множества Y , если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

4) Будем говорить, что R разделяет множество $X \subset V(G)$, если $X \not\subset R$ и не все вершины множества $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

Ключевые слова: связность, минимальный k -связный граф.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ No. 14-01-00545 и гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1.

5) Для разделяющего множества R обозначим через $V(R)$ множество, состоящее из всех входящих в R вершин.

Определение 2. 1) Граф G называется k -связным, если $v(G) > k$ и G остается связным при удалении любого множества из не более чем $k - 1$ вершин.

2) k -связный граф G называется минимальным, если для любого ребра $e \in E(G)$ граф $G - e$ не является k -связным.

Итак, пусть G — k -связный граф. Тогда любое его разделяющее множество содержит не менее k элементов. Очевидно, все вершины k -связного графа имеют степень не менее k .

Через $V_k(G)$ мы обозначим множество всех вершин графа G , имеющих степень k , пусть $V_{k+1}(G) = V(G) \setminus V_k(G)$. Будем использовать обозначения $v_k(G) = |V_k(G)|$ и $v_{k+1}(G) = |V_{k+1}(G)|$.

Дирак [1] в 1967 году и Пламмер [2] в 1968 году исследовали минимальные двусвязные графы. Из результатов этих работ можно вывести, что $v_2(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ для минимального двусвязного графа G .

В 1979 году В. Мадер [5, 6] доказал очень сильный результат, обобщающий написанное выше:

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G) + 2k}{2k-1} \quad (1)$$

для минимального k -связного графа G . Эта оценка точная: для любого $k \geq 2$ существуют бесконечные серии минимальных k -связных графов, для которых неравенство (1) обращается в равенство. Далее мы рассмотрим такие графы и будем называть их *экстремальными* минимальными k -связными графами.

Определение 3. Пусть $k \geq 2$, а T — дерево с $\Delta(T) \leq k + 1$. Граф $G_{k,T}$ строится из k копий T_1, \dots, T_k дерева T с непересекающимися множествами вершин. Для каждой вершины $a \in V(T)$ обозначим через a_i соответствующую вершину копии T_i . Если $d_G(a) = j$, то мы добавим $k + 1 - j$ новых вершин степени k , смежных с $\{a_1, \dots, a_k\}$.

Очевидно, если $v(T) = n$, то $v(G_{k,T}) = (2k - 1)n + 2$. Несложно проверить, что $G_{k,T}$ — минимальный k -связный граф и, следовательно, он — экстремальный.

В 1982 Оксли [7] представил алгоритм построения всех минимальных двусвязных и трёхсвязных графов. Было доказано, что любой

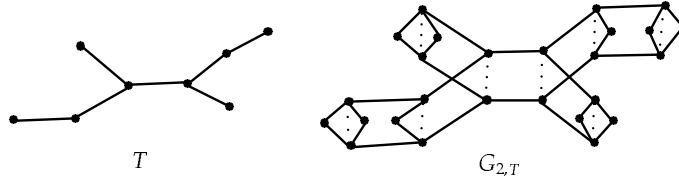


Рис. 1. Дерево T и экстремальный минимальный двусвязный граф $G_{2,T}$.

минимальный двусвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{2,3}$ несколькими операциями замены вершины степени 2 на граф $K_{2,2}$, присоединенный к двум вершинам из окрестности заменяемой вершины (см. рисунок 2а). Любой минимальный трёхсвязный граф может быть получен из полного двудольного графа $K_{3,4}$ несколькими операциями замены вершины степени 3 на граф $K_{3,3}$ (см. рисунок 2б).

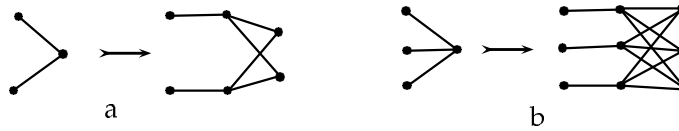


Рис. 2. Операции замены.

В [10] автор доказал, что любой экстремальный минимальный двусвязный граф – это граф $G_{2,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \leq 3$. В этой работе мы представим аналогичный результат для произвольного k .

Теорема 1. *Любой экстремальный минимальный k -связный граф – это граф $G_{k,T}$ для некоторого дерева T с $\Delta(T) \leq k + 1$.*

В качестве иллюстрации рассмотрим случай $k = 1$. Минимальные связные графы – это, очевидно, деревья. Экстремальные минимальные графы – деревья, имеющие ровно две висячие вершины, то есть, простые пути. Легко понять, что это как раз графы вида $G_{1,T}$, где T – дерево с $\Delta(T) = 2$.

Из теоремы несложно вывести алгоритм построения минимальных k -связных графов, аналогичный предложенному Оксли [7].

Следствие 1. Пусть G – экстремальный минимальный k -связный граф. Тогда G может быть получен из $K_{k,k+1}$ серией операций замены вершины степени k на полный двудольный граф $K_{k,k}$ (в ходе операции добавляется паросочетание, соединяющее k вершин одной доли $K_{k,k}$ с вершинами, входящими в окрестность заменяемой вершины степени k).

Доказательство. Отметим, что граф $K_{k,k+1}$ – это граф $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T .

Пусть $G_{k,T}$ – экстремальный минимальный k -связный граф, $v(T) > 1$, a – висячая вершина дерева T , а a_1, \dots, a_k – соответствующие a вершины в копиях дерева T , на которых построен граф $G_{k,T}$. Тогда по построению этого графа он содержит полный двудольный граф $K_{k,k}$, одна доля которого – это $\{a_1, \dots, a_k\}$, а другая – это k присоединенных к ним вершин степени k .

Пусть a'_i – единственная вершина дерева T_i , смежная с a_i . Произведем операцию, обратную к описанной в формулировке следствия: заменим найденный подграф $K_{k,k}$ на новую вершину b степени k , смежную с a'_1, \dots, a'_k . Легко видеть, что мы получили граф $G_{k,T'}$ где $T' = T - a$, то есть, из дерева T мы удалили висячую вершину. Понятно, что в результате таких операций дерево станет одновершинным, а значит, наш k -связный граф превратится в $K_{k,k+1}$. \square

§2. РАЗРЕЗЫ

Определение 4. 1) Будем называть разрезом k -элементное разделяющее множество из вершин и рёбер графа G , содержащее хотя бы одно ребро. Множество всех разрезов графа G обозначим через $\mathfrak{T}(G)$.

2) Для разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ обозначим через $V(T)$ множество всех входящих в T вершин, а через $W(T)$ – множество всех вершин, входящих в разрез T или инцидентных рёбрам разреза T .

В работе [8] исследовались разрезы трёхсвязного графа. Наша терминология будет в основном согласована с этой работой.

Замечание 1. 1) Никакая вершина разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ не может быть инцидентна никакому ребру из T .

2) Для любого разреза $T \in \mathfrak{T}(G)$ граф $G - T$ имеет две компоненты связности, пусть это U_1 и U_2 . Для каждого ребра $e \in T$ компоненты U_1 и U_2 содержат по одному концу e .

Теперь определим части разбиения графа разрезом и границы разреза.

Определение 5. 1) Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, а U_1 и U_2 – компоненты связности графа $G - T$. Назовем множества вида $A_i = U_i \cup V(T)$ частями разбиения графа G разрезом T . Мы будем использовать обозначение $\text{Part}(G; T) = \{A_1, A_2\}$. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, мы будем писать просто $\text{Part}(T)$.

2) Мы будем называть множество U_i внутренностью части A_i и использовать обозначение $\text{Int}(A_i) = U_i$.

3) Границами разреза T мы будем называть множества вершин $A_1 \cap W(T)$ и $A_2 \cap W(T)$.

Замечание 2. Пусть $T \in \mathfrak{T}(G)$, $\text{Part}(T) = \{A_1, A_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $A_1 \cup A_2 = V(G)$, $A_1 \cap A_2 = V(T)$.

2) Границы разреза T содержат по k элементов. Каждая из границ разреза T содержит $V(T)$ и по одному концу всех входящих в T ребер.

3) Если множество $A' = A_1 \setminus W(T)$ непусто, то $A_1 \cap W(T)$ – граница разреза T – отделяет A' от $V(G) \setminus A_1$, а каждая вершина $x \in A_1 \cap W(T)$ смежна хотя бы с одной вершиной из A' . Таким образом, в этом случае граница разреза является k -вершинным разделяющим множеством в k -связном графе G .

§3. МИНИМАЛЬНЫЕ k -СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

В этом разделе мы будем вести разговор о минимальном k -связном графе G и использовать для него обозначения V_k вместо $V_k(G)$ и V_{k+1} вместо $V_{k+1}(G)$. Пусть

$$G_k = G(V_k), \quad G_{k+1} = G(V_{k+1}), \\ E_k = E(G_k), \quad e_k = |E_k|, \quad E_{k+1} = E(G_{k+1}).$$

Для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ существует разрез, содержащий e и $k - 1$ вершину. Пусть \mathfrak{R} – семейство всех таких разрезов.

Мы изучим свойства разрезов из \mathfrak{R} .

3.1. Независимые разрезы.

Определение 6. Разрезы $S, T \in \mathfrak{T}(G)$ называются независимыми, если можно ввести такие обозначения

$$\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \text{Part}(T) = \{B_1, B_2\},$$

что $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Иначе мы будем называть разрезы S и T зависимыми.

Лемма 1. Пусть разрезы $S, R, T \in \mathfrak{T}(G)$ таковы, что S и R независимы, а также T и R независимы. Пусть

$$\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}, \quad \text{Part}(T) = \{B_1, B_2\}, \quad \text{Part}(R) = \{D_1, D_2\},$$

причем $D_1 \supset A_1$ и $D_2 \supset B_2$. Тогда разрезы S и T независимы.

Доказательство. Из независимости разрезов S и R следует, что $A_2 \supset D_2 \supset B_2$. Из независимости разрезов T и R следует, что $B_1 \supset D_1 \supset A_1$. Таким образом, S и T независимы. \square

Лемма 2. Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{X}$ независимы, $\text{Part}(S) = \{A_1, A_2\}$, $\text{Part}(T) = \{B_1, B_2\}$, причем $A_1 \supset B_2$ и $B_1 \supset A_2$. Предположим, что разрезы S и T не имеют общего ребра. Тогда $A_1 \supset W(T)$.

Доказательство. Пусть $b_1 b_2 \in T$, причем $b_i \in \text{Int}(B_i)$. Из $A_1 \supset B_2$ следует, что A_1 содержит одну из границ разреза T , а именно, $A_1 \supset V(T) \cup \{b_2\}$.

Если $b_2 \in S$, то $b_2 \in A_2 \subset B_1$, что неверно. Значит, $b_2 \notin S$. Поскольку $b_1 b_2 \notin S$, то вершины b_1 и b_2 не разделены разрезом S , то есть, $b_1 \in A_1$. Следовательно, $A_1 \supset W(T)$. \square

3.2. Пара зависимых разрезов. Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{X}$ зависимы, причем входящие в них рёбра различны. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \text{Part}(S) &= \{F_1, F_2\}, & \text{Part}(T) &= \{H_1, H_2\}, \\ G_{i,j} &= F_i \cap H_j, & P &= T \cap S, \\ T_i &= \text{Int}(F_i) \cap T, & S_j &= \text{Int}(H_j) \cap S \quad \text{и} \\ \text{Int}(G_{i,j}) &= G_{i,j} \setminus (P \cup T_i \cup S_j). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть множество $R_{i,j}$ состоит из $P \cup T_i \cup S_j$ и рёбер разрезов T и S , инцидентных вершинам из $\text{Int}(G_{i,j})$, а $\overline{G}_{i,j}$ – объединение трёх отличных от $G_{i,j}$ частей.

В дальнейшем для описания свойств пар зависимых разрезов мы будем употреблять именно такие обозначения.

Замечание 3. 1) Множество P в нашем случае содержит только вершины.

2) Отметим, что

$$|R_{i,j}| + |R_{3-i,3-j}| \leq |S| + |T| = 2k. \tag{3}$$

Действительно, вершины из P в обеих частях считаются дважды, а остальные вершины и рёбра из S и T в левой части считаются не более чем один раз, а в правой части – ровно один раз.

Лемма 3. Пусть $\text{Int}(G_{i,j}) \neq \emptyset$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $R_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $\overline{G}_{i,j}$.
- 2) Если $R_{i,j}$ содержит хотя бы одно ребро и $|R_{i,j}| = k$, то $R_{i,j}$ – разрез с $\text{Part}(R_{i,j}) = \{G_{i,j}, \overline{G}_{i,j}\}$, независимый и с S , и с T .

Доказательство. 1) Отметим, что

$$G_{i,j} \cap \overline{G}_{i,j} = P \cup T_i \cup S_j, \quad G_{i,j} \cup \overline{G}_{i,j} = V(G).$$

Любое ребро $e \in E(G)$, выходящее из $\text{Int}(G_{i,j})$ в $\overline{G}_{i,j} \setminus R_{i,j}$, соединяет две вершины, разделенные хотя бы одним из разрезов S и T , а значит, принадлежит одному из этих двух разрезов. Но тогда $e \in R_{i,j}$.

2) Из условия и пункта 1 следует, что $R_{i,j}$ – разрез. Значит, $|\text{Part}(R_{i,j})| = 2$. В силу пункта 1 тогда $\text{Part}(R_{i,j}) = \{G_{i,j}, \overline{G}_{i,j}\}$. Так как $G_{i,j} \subset F_i$ и $F_{3-i} \subset \overline{G}_{i,j}$, разрезы $R_{i,j}$ и S независимы. Аналогично, $R_{i,j}$ и T независимы. \square

3.3. Леммы Мадера. Следующие лемма и следствие практически полностью повторяют результаты из работы Мадера [4]. Мы приведем доказательство для полноты работы.

Лемма 4. Пусть $ab, ac \in E_{k+1}$, $T_{ab} \ni ab$ и $T_{ac} \ni ac$ – разрезы из \mathfrak{R} , причем $a \in F_a \in \text{Part}(T_{ab})$ и $c \in H_c \in \text{Part}(T_{ac})$. Тогда

$$|\text{Int}(F_a)| > |\text{Int}(H_c)|.$$

Доказательство. Так как

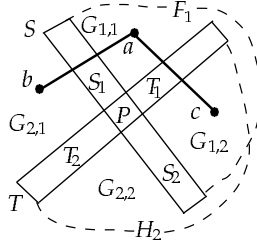
$$|F_a| - |\text{Int}(F_a)| = k - 1 = |H_c| - |\text{Int}(H_c)|,$$

достаточно доказать, что $|F_a| > |H_c|$.

Отметим, что $c \in F_a$. Если разрезы T_{ab} и T_{ac} независимы, то легко понять, что $F_a \supset H_c$ и $a \in F_a \setminus H_c$, а значит, $|F_a| > |H_c|$.

Если эти разрезы зависимы, то положим $S = T_{ab}$, $T = T_{ac}$ и применим введенные выше обозначения для пары зависимых множеств (2). Пусть $F_1 = F_a$, $H_2 = H_c$. Тогда нетрудно понять, что

$$a \in \text{Int}(G_{1,1}), \quad b \in \text{Int}(G_{2,1}), \quad c \in \text{Int}(G_{1,2}).$$

Рис. 3. Множества S , T и части разбиения.

Нам нужно доказать, что $|H_2| < |F_1|$. Определенные выше множества изображены на рисунке 3.

Вершина $a \in \text{Int}(G_{1,1})$ смежна с b , c и вершинами из $G_{1,1}$. Значит, если $\text{Int}(G_{1,1}) = \{a\}$, то из $d_G(a) \geq k + 1$ следует, что $R_{1,1}$ содержит хотя бы $k - 1$ вершину. Если же $A = \text{Int}(G_{1,1}) \setminus \{a\} \neq \emptyset$, то множество вершин $V(R_{1,1}) \cup \{a\}$ отделяет A от остальных вершин графа и, следовательно, содержит хотя бы k вершин. В любом случае мы имеем $|V(R_{1,1})| \geq k - 1$ и $|R_{1,1}| \geq k + 1$.

Из неравенства (3) нам известно, что $|R_{1,1}| + |R_{2,2}| \leq 2k$. Следовательно, $|R_{2,2}| \leq k - 1$, а значит, $\text{Int}(G_{2,2}) = \emptyset$. Отметим, что

$$F_1 \setminus H_2 = \text{Int}(G_{1,1}) \cup S_1 \quad \text{и} \quad H_2 \setminus F_1 = \text{Int}(G_{2,2}) \cup T_2 = T_2.$$

Поскольку

$$|S_1| + |P| + |S_2| = |V(S)| = k - 1 \geq |R_{2,2}| \geq |T_2| + |P| + |S_2|,$$

то $|S_1| \geq |T_2|$. Учитывая, что $|\text{Int}(G_{1,1})| \geq 1$, мы получаем $|F_1| > |H_2|$. \square

Следствие 2. Граф G_{k+1} – лес.

Доказательство. Иначе есть цикл с ребрами из E_{k+1} , существование которого, очевидно, противоречит лемме 4. \square

Лемма 5. Пусть c – количество компонент связности графа G_{k+1} . Тогда

$$v_k(G) \geq \frac{(k-1)v(G) + 2(c + e_k)}{2k-1}.$$

Доказательство. Из каждой вершины множества V_{k+1} выходит не менее чем $k + 1$ ребро, сумма степеней вершин леса G_{k+1} равна

$2v_{k+1} - 2c$, следовательно, не менее чем $(k-1)v_{k+1} + 2c$ ребер выходит из V_{k+1} в V_k . Из вершин множества V_k выходит ровно $kv_k - 2e_k$ рёбер к вершинам множества V_{k+1} . Поэтому

$$(k-1)v_{k+1} + 2c \leq kv_k - 2e_k,$$

откуда немедленно следует утверждение леммы. \square

Непосредственно из определения экстремального графа и леммы 5 можно сделать следующий вывод.

Следствие 3. Пусть G – минимальный k -связный граф, такой, что $v_k + c > k$. Тогда граф G – не экстремальный.

Замечание 4. Неравенство Мадера (1) следует из $e_k + c \geq k$. Мы докажем это утверждение и исследуем случаи, когда достигается равенство. Отметим, что из доказательства леммы 5 ясно, что при $e_k + c = k$ равенство в (1) достигается только в случае, когда $\Delta(G) \leq k+1$.

3.4. Нормальные разрезы.

Определение 7. Назовем разрез $S \in \mathfrak{R}$ кривым, если существует часть $A \in \text{Part}(S)$ с $|\text{Int}(A)| < \frac{k}{2}$ и нормальным, если такой части не существует.

Лемма 6. Пусть оба зависимых разреза $S, T \in \mathfrak{R}$ – нормальные, $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ – различные рёбра из E_{k+1} . Тогда для каждого из рёбер a_1a_2 и b_1b_2 существуют такие $i, j \in \{1, 2\}$, что $R_{i,j}$ – разрез, содержащий это ребро.

Доказательство. Пусть $\text{Int}(G_{1,1}) \neq \emptyset$, $\text{Int}(G_{2,2}) \neq \emptyset$. Тогда из неравенства (3) следует, что $|R_{1,1}| = k = |R_{2,2}|$ и $R_{1,1} \cup R_{2,2} = S \cup T$. Тогда $R_{1,1} \cup R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$, откуда следует утверждение леммы. Случай $\text{Int}(G_{1,2}) \neq \emptyset$, $\text{Int}(G_{2,1}) \neq \emptyset$ разбирается аналогично.

Пусть условия рассмотренных выше случаев не выполнены. Тогда не умаляя общности можно считать, что $\text{Int}(G_{1,1}) = \text{Int}(G_{1,2}) = \emptyset$, то есть, $\text{Int}(F_1) = T_1$ (см. рисунок 4а). Из нормальности разреза S следует, что $|T_1| \geq \frac{k}{2}$.

Так как $T = T_1 \cup T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}$, отсюда можно сделать вывод

$$|T_2 \cup P| \leq \frac{k}{2} - 1 \quad \text{и} \quad |R_{2,1}| + |R_{2,2}| \leq |S| + 2|T_2 \cup P \cup \{b_1b_2\}| \leq 2k. \quad (4)$$

Если $\text{Int}(G_{2,1}) = \emptyset$ (см. рисунок 4б), то из нормальности разреза T мы имеем $\text{Int}(H_1) = |S_1| \geq \frac{k}{2}$, а следовательно, $|S_2 \cup P| \leq \frac{k}{2} - 1$, откуда

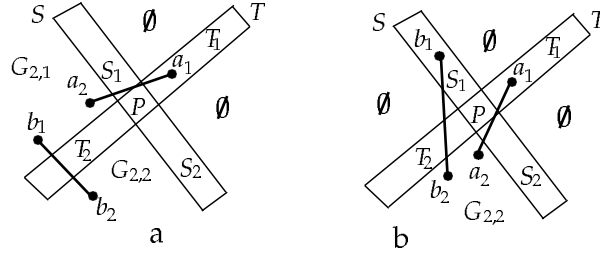


Рис. 4. Разбиение графа парой нормальных зависимых разрезов.

очевидно следует

$$|R_{2,2}| \leq |S_2| + |T_2| + |P| + |\{a_1a_2, b_1b_2\}| \leq k.$$

Если и $\text{Int}(G_{2,2}) = \emptyset$, то $\text{Int}(F_2) = S_2$, что противоречит нормальности разреза T . Значит, $\text{Int}(G_{2,2}) \neq \emptyset$, но это возможно только при $|R_{2,2}| = k$, что, в частности, означает, что $R_{2,2} \supset \{a_1a_2, b_1b_2\}$. Тогда разрез $R_{2,2}$ нам подходит.

Остается случай, когда $\text{Int}(G_{2,1}) \neq \emptyset$ и $\text{Int}(G_{2,2}) \neq \emptyset$. По неравенству (4) это означает, что $|R_{2,1}| = |R_{2,2}| = k$. Тогда оба разреза $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержат ребро b_1b_2 и $R_{2,1} \cup R_{2,2} \supset S \ni a_1a_2$. Следовательно, один из разрезов $R_{2,1}$ и $R_{2,2}$ содержит оба ребра b_1b_2 и a_1a_2 , откуда следует утверждение леммы. \square

Лемма 7. Пусть разрезы $S, T \in \mathfrak{R}$ зависимы, причем $a_1a_2 \in S$ и $b_1b_2 \in T$ – различные рёбра из E_{k+1} , $R_{i,j} \ni b_1b_2$ и $|R_{i,j}| = k$. Тогда существует разрез $R \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

1° $\text{Part}(R) = \{G_{i,j}, U\}$, причём либо $U = \overline{G_{i,j}}$, либо $U = \overline{G_{i,j}} \cup \{a\}$, где a – конец ребра a_1a_2 , лежащий в $G_{i,j}$;

2° R независим и с S , и с T .

Доказательство. Пусть $i = j = 1$. По построению $R_{1,1}$, один из концов ребра b_1b_2 лежит в $\text{Int}(G_{1,1})$, пусть это b_1 . Значит, $\text{Int}(G_{1,1}) \neq \emptyset$ и по лемме 3 мы знаем, что $R_{1,1}$ – разрез, $\text{Part}(R_{1,1}) = \{G_{1,1}, \overline{G_{1,1}}\}$. Если $a_1a_2 \notin R_{1,1}$, то $R_{1,1} \in \mathfrak{R}$ и разрез $R = R_{1,1}$ нам подходит.

Пусть $a_1a_2 \in R_{1,1}$. По построению множества $R_{1,1}$ ребро a_1a_2 имеет конец в $\text{Int}(G_{1,1})$, пусть это a_1 . Рассмотрим множество R , полученное

из $R_{1,1}$ заменой $a_1 a_2$ на a_1 . Если $\text{Int}(G_{1,1}) \neq \{a_1\}$, то R – разрез,

$$\text{Part}(R) = \{G_{1,1}, \overline{G}_{1,1} \cup \{a_1\}\}$$

(см. рисунок 5а), откуда очевидно следует, что этот разрез независим с S и T , а стало быть, он нам подходит.

Пусть $\text{Int}(G_{1,1}) = \{a_1\}$. Тогда, в частности, $a_1 = b_1$ (см. рисунок 5б). Кроме a_2 и b_2 эта вершина может быть смежна только с вершинами из $R_{1,1}$. Тогда из $d_G(a_1) \geq k + 1$ следует, что $|V(R_{1,1})| \geq k - 1$, а значит, $|R_{1,1}| \geq k + 1$, противоречие. \square

Лемма 8. Пусть G – минимальный k -связный граф, а множество $E \subset E_{k+1}$ таково, что все разрезы из \mathfrak{R} , содержащие ребра из E – нормальные. Тогда существует множество

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где } e \in S_e,$$

состоящее из попарно независимых разрезов.

Доказательство. Пронумеруем f_1, \dots, f_m ребра из E . Пусть

$$\mathfrak{S}' = \{S_1, \dots, S_{\ell-1}\} \subset \mathfrak{R}$$

– множество попарно независимых разрезов, причем $f_i \in S_i$.

Пусть $f_\ell \in T \in \mathfrak{R}$. Докажем, что можно изменить разрез T так, чтобы он стал независимым со всеми разрезами из \mathfrak{S}' . Доказательство будет индукцией по $|\mathfrak{S}'|$. База для случая $|\mathfrak{S}'| = 0$ очевидна.

Докажем индукционный переход. Пусть разрез T независим с разрезами S_1, \dots, S_{i-1} , но зависим с S_i . Пусть

$$\text{Part}(T) = \{H_1, H_2\}, \quad \text{Part}(S_i) = \{F_1, F_2\}, \quad G_{x,y} = F_x \cap H_y.$$

Так как разрезы S_i и T нормальны, по леммам 6 и 7 существует такой разрез $R \ni f_\ell$, что одна из частей $\text{Part}(R)$ – это $G_{\alpha,\beta}$, а другая часть

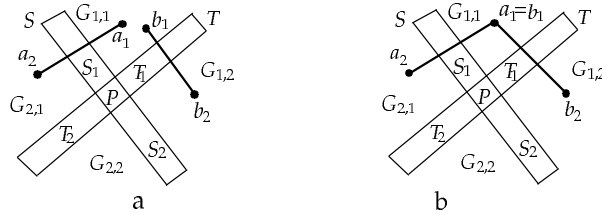


Рис. 5. Разбиение графа парой зависимых разрезов.

U – либо $\overline{G_{\alpha,\beta}}$, либо $\overline{G_{\alpha,\beta}} \cup \{a\}$, где a – конец ребра $f_\ell = ab$, лежащий в $G_{\alpha,\beta}$.

Мы хотим доказать, что R независим с произвольным разрезом $S_j \in \mathfrak{S}'$. Пусть $\text{Part}(S_j) = \{D_1, D_2\}$. Так как разрезы S_i и S_j независимы, разрезы T и S_j независимы, а разрезы T и S_i зависимы, по лемме 1 можно считать, что

$$F_1 \supset D_2, \quad F_2 \subset D_1, \quad H_1 \supset D_2, \quad H_2 \subset D_1. \quad (5)$$

Разберем несколько случаев.

1. $\alpha = 2$.

Тогда $G_{2,\beta} \subset F_2 \subset D_1$ и $U \supset F_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6а), то есть, R и S_j независимы.

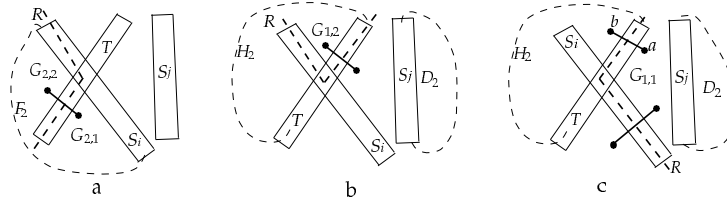


Рис. 6. Разрезы S_i , S_j и T .

2. $\alpha = 1$. Разберем два подслучая.

2.1. $\beta = 2$.

Тогда $G_{\alpha,\beta} = G_{1,2} \subset H_2 \subset D_1$ и $U \supset H_1 \supset D_2$ (см. рисунок 6б), что означает независимость разрезов S_j и R .

2.2. $\beta = 1$.

В силу (5) мы имеем $D_1 \supset H_2 \cup F_2 = \overline{G_{1,1}}$ (см. рисунок 6с). Так как разрезы T и S_j независимы и не имеют общих рёбер, по лемме 2 мы имеем $D_1 \supset W(T) \ni a$. Значит, $D_1 \supset \overline{G_{1,1}} \cup \{a\} \supset U$. Из $D_2 \subset F_1$ и $D_2 \subset H_1$ следует, что $D_2 \subset H_1 \setminus \text{Int}(F_2) = G_{1,1}$. Таким образом, мы проверили независимость разрезов S_j и R . \square

Лемма 9. Пусть G – минимальный k -связный граф, а $P = a_1 \dots a_n$ – простой путь, все вершины которого принадлежат множеству V_{k+1} . Предположим, что существуют попарно независимые разрезы

$S_1, \dots, S_{n-1} \in \mathfrak{R}$, такие, что

$$a_i a_{i+1} \in S_i, \quad \text{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\},$$

причем $a_i \in \text{Int}(A_i)$ и $a_{i+1} \in \text{Int}(B_{i+1})$.

Тогда $B_2 \supset B_n \supset N_G(a_n)$.

Доказательство. При $n = 2$ это утверждение очевидно. Предположим, что $n \geq 3$. Докажем, что $B_i \supset B_{i+1}$ при $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Так как разрезы S_{i-1} и S_i независимы, $a_i \in \text{Int}(B_i)$ и $a_i a_{i+1} \notin S_{i-1}$, мы имеем $a_{i+1} \in B_i$. Значит, ни одна из частей $\text{Part}(S_i)$ не может содержать $B_i \ni a_i, a_{i+1}$. В силу независимости разрезов S_{i-1} и S_i , тогда B_i содержит одну из частей $\text{Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}$.

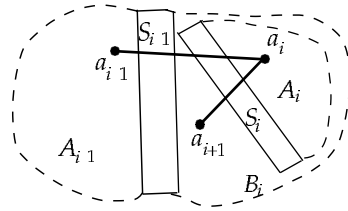


Рис. 7. Разрезы S_{i-1} и S_i : случай, когда $B_i \supset A_i$.

Предположим, что $B_i \supset A_i$ (см. рисунок 7). Тогда из $a_{i-1} \notin B_i$ следует $a_{i-1} \notin A_i$. Однако, вершина a_{i-1} смежна с вершиной $a_i \in \text{Int}(A_i)$, что невозможно. Следовательно, $B_i \supset B_{i+1}$.

Из доказанного следует, что $B_2 \supset B_n$. Так как $a_n \in \text{Int}(B_n)$, мы имеем $N_G(a_n) \subset B_n \subset B_2$. \square

Лемма 10. Пусть G – минимальный k -связный граф, $E \subset E_{k+1}$, а множество

$$\mathfrak{S} = \{S_e\}_{e \in E} \subset \mathfrak{R}, \quad \text{где } e \in S_e,$$

состоит из попарно независимых разрезов. Пусть R – граница разреза $S_e \in \mathfrak{S}$. Тогда любой простой путь с концами из R содержит ребро не из множества E .

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим кратчайший путь $a_1 a_2 \dots a_n$ по рёбрам из E , концы которого a_1, a_n лежат в R . Если путь P содержит всего одно ребро $a_1 a_2$, то $a_1 a_2 \neq e$, так как граница R разреза $S_e \ni e$ содержит ровно одну вершину ребра e .

Если же $n \geq 3$ и $e = a_1 a_2$, то перенумеруем вершины пути P в обратном порядке. Таким образом, в любом случае мы добьемся того, что $e \neq a_1 a_2$. Пусть

$$S_i = S_{a_i a_{i+1}}, \text{ Part}(S_i) = \{A_i, B_{i+1}\}, \text{ где } a_i \in \text{Int}(A_i) \text{ и } a_{i+1} \in \text{Int}(B_{i+1}).$$

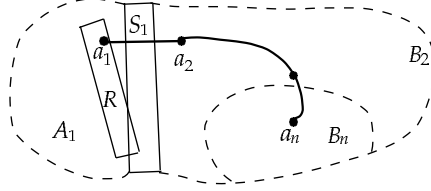


Рис. 8. Путь по ребрам из E и разрезы.

Так как разрезы S_e и S_1 независимы и не имеют общего ребра, по лемме 2 одна из частей $U \in \text{Part}(S_1)$ содержит $W(S_e)$. Значит, $U \supset R \ni a_1$, откуда следует, что $U = A_1$. По лемме 9 мы имеем $N_G(a_n) \subset B_2$ (см. рисунок 8).

По замечанию 2 мы знаем, что R является k -вершинным разделяющим множеством графа G . Из $R \subset A_1$ следует, что R не разделяет $B_2 \cup W(S_1)$. Значит, одна из компонент связности M графа $G - R$ лежит в $\text{Int}(A_1)$. Из k -связности графа G следует, что вершина $a_n \in R$ должна иметь смежную вершину в $M \subset \text{Int}(A_1)$, что противоречит доказанному выше. \square

3.5. Кривые разрезы.

Лемма 11. Пусть G – минимальный k -связный граф, причем в множестве \mathfrak{R} есть кривые разрезы. Тогда $e_k + c \geq k + 1$.

Доказательство. Везде в доказательстве через S_e мы обозначаем разрез из \mathfrak{R} , содержащий ребро $e \in E_{k+1}$.

1. Пусть $e = a_1 a_2 \in E_{k+1}$, а разрез S_e – кривой, причем

$$a_1 \in A_1 \in \text{Part}(S_e) \quad \text{и} \quad |\text{Int}(A_1)| < \frac{k}{2}.$$

Пусть $U \ni a_1, a_2$ – компонента связности графа G_{k+1} , а $T = G_{k+1}(U)$. Тогда T – дерево по следствию 2. Предположим, что $d_T(a_1) > 1$. Тогда в дереве T существует путь от a_1 до висячей вершины a , не проходящий по $a_1 a_2$. Пусть $a' a$ – последнее ребро этого пути, $S_{a a'} \in \mathfrak{R}$, причем

$a \in A \in \text{Part}(S_{aa'})$. Тогда по лемме 4 мы имеем $\text{Int}(A) < \text{Int}(A_1) < \frac{k}{2}$. В частности, разрез $S_{aa'}$ — также кривой.

2. Пусть a_1 — висячая вершина дерева T ,

$$|\text{Int}(A_1)| = p < \frac{k}{2}, \quad S = V(S_{a_1 a_2}).$$

Отметим, что $|S| = k - 1$. Пусть

$$M = \text{Int}(A_1) \cap V_k, \quad m = |M|$$

(см. рисунок 9а). Очевидно, вершина a_1 не может быть смежна с вершинами из $V_{k+1} \cap A_1$, следовательно, вершина a_1 смежна не более чем с m вершинами из $\text{Int}(A_1)$. Из $d_G(a_1) = k + 1$ следует, что тогда a_1 несмежна не более чем с $m - 1$ вершинами из S . Все смежные с a_1 вершины из S имеют степень k . Таким образом,

$$|\text{Int}(A_1) \cap V_{k+1}| = p - m, \quad |S \cap V_{k+1}| \leq m - 1 \quad \text{и} \quad |A_1 \cap V_{k+1}| \leq p - 1.$$

Разберем два случая.

2.1. $m \geq 2$.

Каждая вершина множества M может быть смежна только с вершинами из A_1 . Поэтому вершина множества M смежна не более чем с $p - 1$ вершинами из V_{k+1} , а значит, хотя бы с $k - p + 1$ вершинами из V_k . Просуммировав рёбра, исходящие из всех вершин M к вершинам из V_k , мы получим хотя бы $m(k - p + 1)$. Однако, рёбра между вершинами множества M (которых не более чем $\frac{m(m-1)}{2}$) в этой сумме посчитаны дважды, поэтому можно написать, что

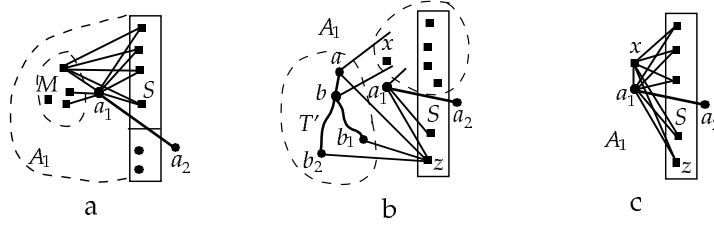
$$e_k \geq m(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \geq k+3+(m-2)(k-p+1) - \frac{m(m-1)}{2} \geq k+2, \quad (6)$$

что и требовалось доказать. (При $m = 2$ неравенство (6) очевидно, а при $m \geq 3$ мы воспользовались тем, что $k - p + 1 \geq p \geq m$ и $m - 2 \geq \frac{m-1}{2}$, а следовательно, правая часть неравенства (6) не менее чем $k + 3$.)

2.2. $m = 1$.

Пусть $M = \{x\}$. Понятно, что в этом случае a_1 смежна ровно с одной вершиной из $\text{Int}(A_1)$ (с вершиной x), а значит, a_1 смежна со всеми вершинами из S . Следовательно, $S \subset V_k$.

Предположим, что $Y = (\text{Int}(A_1) \setminus \{a_1\}) \cap V_{k+1} \neq \emptyset$. По доказанному выше, тогда Y — одна или несколько компонент связности графа G_{k+1} . Пусть $T' = G_{k+1}(Y)$. По следствию 4 граф T' — лес.

Рис. 9. Кривой разрез $S_{a_1 a_2}$ и часть A_1 .

Пусть $a \in Y$, $d_{T'}(a) \leq 1$. Тогда $d_{T'}(a) = 1$, причем a должна быть смежна с x и со всеми $k - 1$ вершинами из S . Таким образом, лес T' не содержит изолированных вершин.

Пусть a — висячая вершина T' , смежная в T' с вершиной b степени $d_{T'}(b) = \ell$ (см. рисунок 9b). Тогда в T' существуют $\ell - 1$ непересекающихся по внутренним вершинам пути $P_1, \dots, P_{\ell-1}$ от b до отличных от a висячих вершин $b_1, \dots, b_{\ell-1}$ леса T' .

Рассмотрим разрез $S_{ab} \in \mathfrak{R}$. Отметим, что вершина b смежна хотя бы с $k - \ell + 1$ вершинами множества $S \cup \{x\}$, и все эти вершины должны быть в S_{ab} . Разрез S_{ab} содержит $k - 1$ вершину, а значит, не содержит некоторую вершину $z \in S \cup \{x\}$.

Как доказано выше, вершина a и каждая из висячих вершин $b_1, \dots, b_{\ell-1}$ смежна с z , а значит, разделяющий a и b разрез S_{ab} должен содержать по вершине каждого из путей $P_1, \dots, P_{\ell-1}$. Но тогда S_{ab} содержит хотя бы k вершин, что не так. Противоречие.

Значит, $\text{Int}(A_1) = \{a_1, x\}$ (см. рисунок 9c). В этом случае мы имеем $e_k \geq k - 1$ (столько рёбер ведет от x до вершин из S). Если утверждение леммы не выполнено, то других рёбер в E_k нет, а граф G_{k+1} имеет одну компоненту связности, то есть, G_{k+1} — дерево.

Остается проанализировать последний случай. В этом случае все рёбра из E_k соединяют вершину $x \in \text{Int}(A_1)$ с вершинами множества S . Отметим, что в $N_G(x)$ нет отличных от a_1 вершин из V_{k+1} .

3. Докажем, что все рёбра графа G_{k+1} , входящие в кривые разрезы — это рёбра некоторого простого пути $Q = a_1 a_2 \dots a_n$, причем $n \leq \frac{k-1}{2}$, а все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1} .

Пусть $c_1c_2 \in E(G_{k+1})$, $S_{c_1c_2} \in \mathfrak{R}$ – кривой разрез,

$$c_1 \in C_1 \in \text{Part}(S_{c_1c_2}) \quad \text{и} \quad |\text{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}.$$

Рассмотрим любой путь в графе G_{k+1} от c_1 до некоторой висячей вершины a'_1 , не проходящий через c_2 (см. рисунок 10а). Пусть $a'_2a'_1$ – последнее ребро этого пути,

$$S_{a'_1a'_2} \in \mathfrak{R}, \quad a'_1 \in \text{Int}(A'_1) \in \text{Part}(S_{a'_1a'_2}).$$

Тогда по лемме 4 мы имеем $|\text{Int}(A'_1)| < |\text{Int}(C_1)| < \frac{k}{2}$.

Пусть $a'_1 \neq a_1$. Проведем рассуждения, аналогичные сказанному в пунктах 1 и 2, для части A'_1 . Мы найдем не менее чем $k - 1$ ребер из E_k в части A'_1 . Мы рассматриваем случай, когда $e_k = k - 1$. Поэтому в части A'_1 ровно $k - 1$ ребро из E_{k-1} , но тогда все эти рёбра инцидентны смежной с a'_1 вершине x' . Очевидно, $x' \neq x$. Тогда E_k содержит хотя бы k рёбер: это $k - 1$ ребер, инцидентных вершине x и хотя бы одно отличное от них ребро, инцидентное x' . В этом случае утверждение леммы доказано.

Сказанное выше означает, что все рёбра графа G_{k+1} , входящие в кривые разрезы – это рёбра некоторого простого пути

$$Q = a_1a_2 \dots a_n,$$

причем все внутренние вершины этого пути имеют степень 2 в графе G_{k+1} . Пусть

$$a_i a_{i+1} \in S_i \in \mathfrak{R}, \quad a_i \in A_i \in \text{Part}(S_i).$$

По лемме 4 тогда

$$2 = \text{Int}(A_1) < \text{Int}(A_2) < \dots < \text{Int}(A_{n-1}) \leq \frac{k-1}{2}.$$

Следовательно, $n \leq \frac{k-1}{2}$.

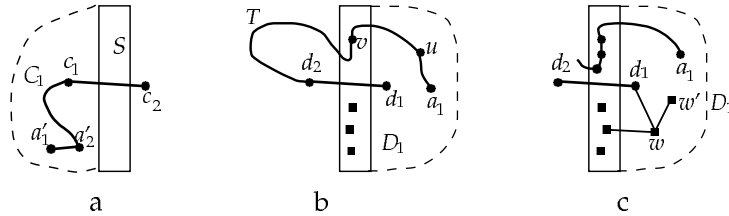


Рис. 10. Путь $a_1 \dots a_n$ и кривые разрезы.

4. Пусть E – множество всех рёбер графа G_{k+1} , кроме рёбер пути Q .

Рассмотрим два случая.

4.1 $E \neq \emptyset$.

По лемме 8 можно выбрать попарно независимые разрезы $S_e \in \mathfrak{R}$ для всех рёбер $e \in E$. Пусть $d_1 d_2 \in E(G_{k+1})$, причем d_1 – отличная от a_1 висячая вершина дерева G_{k+1} , а $d_1 \in D_1 \in \text{Part}(S_{d_1 d_2})$.

Предположим, что $v \in S_{d_1 d_2} \cap V_{k+1}$ (см. рисунок 10b). По лемме 10, путь от v до d_2 по дереву G_{k+1} должен содержать хотя бы одно ребро пути Q . Это означает, что $v \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин a_1, \dots, a_n лежит в $\text{Int}(D_2)$.

Пусть $u \in \text{Int}(D_1) \cap V_{k+1}$. Тогда путь от u до d_2 по дереву G_{k+1} должен проходить через вершину разреза $S_{d_1 d_2}$, а тогда, как показано выше, этот путь содержит рёбро пути Q . Следовательно, $u \in \{a_1, \dots, a_n\}$ и хотя бы одна из вершин a_1, \dots, a_n лежит в $\text{Int}(D_2)$.

Таким образом, все вершины из $D_1 \cap V_{k+1}$, кроме d_1 , принадлежат множеству $\{a_1, \dots, a_n\}$, но хотя бы одна из вершин пути Q не лежит в D_1 . Следовательно,

$$|V_{k+1} \cap D_1| \leq n \leq \frac{k-1}{2}. \quad (7)$$

4.2. $E = \emptyset$.

В этом случае $G_{k+1} = Q$, а a_n – висячая вершина графа G_{k+1} . Пусть $d_1 = a_n$, а $D_1 \in \text{Part}(S_{n-1})$ – часть, содержащая a_n . Так как $a_{n-1} \notin D_1$, и в этом случае выполняется неравенство (7).

Продолжим рассуждения для обоих случаев. Вершина $d_1 \in \text{Int}(D_1)$ – висячая в дереве G_{k+1} , и потому смежна с k вершинами из $V_k \cap D_1$, среди которых есть вершина $w \in \text{Int}(D_1)$ (см. рисунок 10с). Поскольку $d_1 \neq a_1$, то $x \neq w$. Вершина w смежна с k вершинами из D_1 . Из неравенства (7) следует, что в $N_G(w)$ есть хотя бы

$$k - |V_{k+1} \cap D_1| \geq k - n \geq \frac{k+1}{2} > 1$$

вершин степени k , среди которых можно найти вершину $w' \neq x$ (см. рисунок 10с). Тогда ребро ww' дает нам $e_k \geq k$ и завершает доказательство леммы. \square

3.6. Доказательство теоремы 1. Мы считаем, что $k > 1$, иначе доказательство теоремы очевидно. Рассмотрим несколько случаев.

1. $E_{k+1} = \emptyset$.

Тогда $v_{k+1} = c \leq k$. Если $v_{k+1} = k$, то $e_k = 0$ и наш граф представляет собой k попарно несмежных вершин степени $k+1$, с каждой из которых смежны $k+1$ попарно несмежных вершин степени k . Это граф $K_{k,k+1}$, который равен $G_{k,T}$ для одновершинного дерева T .

Пусть $v_{k+1} < k$. Тогда любая вершина $x \in V_k$ смежна хотя бы с $k - v_{k+1}$ вершинами степени k , откуда легко понять, что

$$e_k \geq \frac{v_k(k - v_{k+1})}{2} > k - v_{k+1},$$

а это противоречит следствию 3. (Мы воспользовались тем, что $v_k \geq k + 1 > 2$.)

2. Далее мы считаем, что $E_{k+1} \neq \emptyset$. Из леммы 11 и следствия 3 понятно, что достаточно рассмотреть случай, когда рёбра из E_{k+1} не входят в кривые разрезы. Тогда по лемме 8 для каждого ребра $e \in E_{k+1}$ мы построим разрез $S_e \ni e$ так, чтобы эти разрезы были попарно независимы. Пусть \mathfrak{S} – множество построенных разрезов.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\mathcal{A} = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} \text{Part}(S),$$

а A_1, \dots, A_n – все минимальные по включению части из \mathcal{A} . Очевидно, $n \geq 2$. Пусть $S_i \in \mathfrak{S}$ – отделяющий часть A_i разрез из \mathfrak{S} ,

$$R_i = A_i \cap W(S_i), \quad p_i = |R_i \cap V_k|, \quad B_i = A_i \setminus R_i.$$

Пусть $a_i \in \text{Int}(A_i)$ – конец ребра из E_{k+1} , входящего в разрез S_i (см. рисунок 11а). Тогда $\{a_i\} = \text{Int}(A_i) \cap R_i$.

Изучим свойства частей A_i .

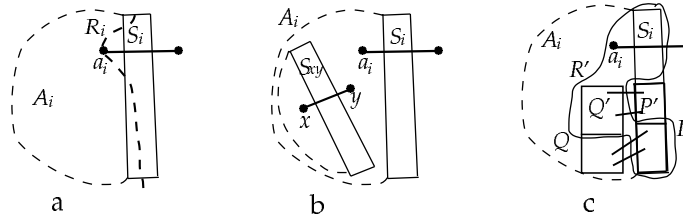


Рис. 11. Часть A_i .

Лемма 12. *Выполняются следующие утверждения.*

- 1) $B_i \neq \emptyset$, множество R_i отделяет B_i от остальных вершин графа. Каждая вершина из R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i .
- 2) Если $x \in B_i \cap V_{k+1}$, то $\{x\}$ – компонента связности графа G_{k+1} .
- 3) Пусть c_i – это количество лежащих в B_i одновершинных компонент связности графа G_{k+1} , а $e_{k,i}$ – это количество инцидентных вершинам из B_i рёбер из E_k . Тогда $c_i + e_{k,i} \geq p_i$.

Доказательство. 1) Так как разрез S_i нормален, $|\text{Int}(A_i)| > 1$, а значит, $B_i = \text{Int}(A_i) \setminus \{a_i\} \neq \emptyset$. Тогда R_i отделяет B_i от остальных вершин графа G . Из $|R_i| = k$ и k -связности графа G следует, что каждая вершина множества R_i смежна хотя бы с одной вершиной из B_i .

2) Предположим, что $y \in V_{k+1}$ и $xy \in E(G)$. Тогда $y \in A_i$, $xy \in E_{k+1}$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ (см. рисунок 11b). Из независимости разрезов S_i и S_{xy} и минимальности части A_i следует, что одна из частей $\text{Part}(S_{xy})$ должна содержать A_i , что, очевидно, невозможно: вершины $x, y \in A_i$ лежат в разных частях $\text{Part}(S_{xy})$. Противоречие завершает доказательство.

3) Пусть P – множество всех входящих в R_i вершин степени k , а Q – множество всех смежных с P вершин из B_i . Пусть $V_{k+1} \cap Q = Q'$, а P' – множество всех вершин из P , смежных в $\text{Int}(A_i)$ только с вершинами из Q' . Напомним, что $|P| = p_i$.

Тогда $c_i \geq |Q'|$ по пункту 2. Каждая вершина из $P \setminus P'$ смежна с вершиной степени k из множества Q , откуда $e_{k,i} \geq |P| - |P'|$. Если $|P'| \leq |Q'|$, то мы получаем, что $e_{k,i} + c_i \geq p_i$, что нам и нужно.

Остается случай, когда $|P'| > |Q'|$. Предположим, что $B_i \neq Q'$. Тогда множество $R' = (R \setminus P') \cup Q'$ состоит менее чем из k вершин и отделяет непустое множество $B_i \setminus Q'$ от остальных вершин графа G (см. рисунок 11c). В k -связном графе такое невозможно. Следовательно, $Q' = B_i \neq \emptyset$. Как мы знаем из пункта 2, каждая вершина из Q' может быть смежна только с вершинами из $A_i \cap V_k$, а это в нашем случае только вершины множества P . Но $|P| < k$, противоречие. \square

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $p_1 = \min(p_1, \dots, p_n)$. Тогда по лемме 10 вершины из $V_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^n R_i)$ входят хотя бы в $k - p_1$ различных компонент связности графа G_{k+1} . Если $p_1 > 0$, то в силу леммы 12 мы имеем

$$c + e_k \geq (k - p_1) + \sum_{j=1}^n p_j \geq k - p_1 + 2p_1 \geq k + 1,$$

что противоречит следствию 3.

Остается последний, самый интересный случай $r_1 = 0$. В этом случае по лемме 10 все k вершин из R_1 принадлежат разным компонентам связности графа G_{k+1} , откуда следует, что $c = k$. Пусть U_1, \dots, U_k – компоненты связности графа G_{k+1} , тогда $T_i = G(U_i)$ – деревья. По следствию 3 мы имеем $e_k = 0$, то есть, никакие две вершины степени k в графе G не смежны.

Мы будем предполагать, что для любого меньшего чем G экстремального минимального k -связного графа утверждение теоремы доказано.

По лемме 10 каждое из деревьев T_1, \dots, T_k содержит ровно по одной вершине множества R_1 . Пусть $R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}$, причем $b_i \in V(T_i)$. Одна из этих вершин совпадает с a_1 – концом входящего в разрез S_1 ребра. Будем считать, что $b_1 = a_1$. Предположим, что b_i смежна с вершиной $x \in B_1 \cap V_{k+1}$. Тогда рассмотрим разрез $S_{xb_i} \in \mathfrak{S}$. Этот разрез по построению независим с S_1 . Пусть $A \in \text{Part}(S_{xb_i})$ – часть, содержащая x , но не содержащая b_i (см. рисунок 12а). Тогда $A \subsetneq A_1$ – противоречие с выбором части A_1 .

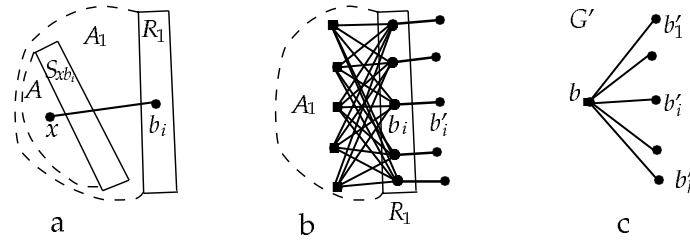


Рис. 12. Часть A_1 и граф G' .

Пусть $b_1 b'_1 \in S_1$ и $N_1 = N_G(b_1) \setminus \{b'_1\}$. Так как $b_1 \in \text{Int}(A_1)$, мы имеем $N_1 \subset A_1$. Из доказанного выше ясно, что $N_1 \subset V_k$. Вместе с $R_1 \subset V_{k+1}$ это означает, что $N_1 \subset B_1$.

Так как $e_k = 0$, каждая вершина $x \in N_1$ должна быть смежна с k вершинами из V_{k+1} , и все эти вершины лежат в части A_1 . Из $c = k$ и доказанного выше следует, что $V_{k+1} \cap A_1 = R_1$, а значит,

$$N_G(x) = R_1 = \{b_1, \dots, b_k\}.$$

Теперь понятно, что $B_1 = N_1$ и это множество состоит из k вершин степени k , каждая из которых смежна с вершинами b_1, \dots, b_k (см. рисунок 12b).

По замечанию 4 все вершины b_1, \dots, b_k имеют в графе G степень $k+1$, а значит, для всех $i \in \{1, \dots, k\}$ вершина b_i – висячая в дереве T_i . Пусть $b_i b'_i \in E(T_i)$ – единственное инцидентное b_i ребро дерева T_i . Тогда все вершины b'_1, \dots, b'_k различны.

Построим новый граф G' , добавив к графу $G - R_1 - B_1$ новую вершину b степени k с $N_{G'}(b) = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ (см. рисунок 12c). Пусть $T'_i = T_i - b_i$. Отметим, что

$$v_k(G') = v_k(G) - k + 1, \quad v(G') = v(G) - 2k + 1. \quad (8)$$

Лемма 13. Пусть $x \in V_k(G)$. Тогда $N_G(x)$ содержит по одной вершине каждого из деревьев T_1, \dots, T_k .

Доказательство. Пусть x смежна с вершинами y_1 и y_m одного дерева T_ℓ , а $y_1 y_2 \dots y_m$ – путь в T_ℓ между ними. Пусть

$$S_{y_1 y_2} \in \mathfrak{S}, \quad \text{Part}(S_{y_1 y_2}) = \{Y_1, Y_2\}, \quad Y_1 \ni y_1 \quad \text{и} \quad Y_2 \ni y_2.$$

По лемме 9 мы знаем, что $N_G(y_m) \subset Y_2$. Поскольку $y_1 \in \text{Int}(Y_1)$, мы имеем $x \in S_{y_1 y_2}$ (см. рисунок 13).

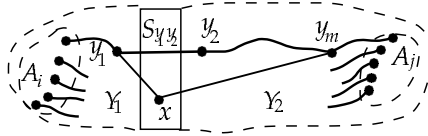


Рис. 13. Вершина x смежна с двумя вершинами одного дерева.

Разрез $S_{y_1 y_2}$ разделяет какие-то две минимальные части A_i и A_j , а их границы, как доказано выше, содержат по вершине каждого из деревьев T_1, \dots, T_k . Значит, и $S_{y_1 y_2}$ должен содержать по вершине каждого из этих деревьев, кроме T_ℓ , то есть, не может содержать вершину x , противоречие. \square

Лемма 14. G' – минимальный k связный граф.

Доказательство. 1. Докажем, что граф G' – k -связный.

Предположим, что G' имеет разделяющее множество Q из менее чем k вершин. Тогда Q не содержит ни одной вершины какого-то из деревьев

T'_1, \dots, T'_k . Пусть $Q \cap V(T'_1) = \emptyset$, а U – компонента связности графа $G' - Q$, содержащая все вершины дерева T'_1 .

Пусть $x \in V_k(G') \setminus Q$, $x \neq b$. Тогда по лемме 13 вершина x соединена ребром с деревом T'_1 , следовательно, $x \in U$. Если $b \notin Q$, то вершина b также принадлежит U (так как смежна с T_1).

Пусть $x \in V_{k+1}(G') \setminus Q$, $x \notin U$. Можно считать, что $x \in V(T'_2)$. Пусть $d_{T_2}(x) = m$. Тогда в дереве T'_2 существуют m непересекающихся путей от x до различных висячих вершин y_1, \dots, y_m . Каждая вершина y_i смежна в графе G' с вершиной $z_i \in V_k(G')$. Кроме того, вершина x смежна в G' с вершинами $z_{m+1}, \dots, z_{k+1} \in V_k(G')$ (см. рисунок 14а). По лемме 13 все вершины z_1, \dots, z_{k+1} различны, выше доказано, что эти вершины принадлежат компоненте U . Значит, для каждого $i \in \{1, \dots, k+1\}$ множество Q должно содержать вершину z_i или вершину, лежащую на пути от x до z_i . Но тогда $|Q| \geq k + 1$, противоречие.

Таким образом, $U \supset V(G' - Q)$, то есть, граф $G' - Q$ связан. Полученное противоречие завершает доказательство.

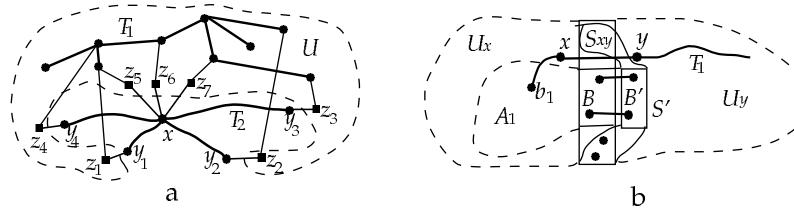


Рис. 14. Разрезы S_x и S' .

2. Докажем, что граф G' – минимальный.

Пусть $xy \in E(G')$. Если хотя бы один из концов этого ребра имеет в G' степень k , то граф $G' - xy$ не является k -связным. Остается рассмотреть случай, когда $xy \in E_{k+1}(G')$.

Не умаляя общности положим, что $xy \in E(T'_1)$. Рассмотрим разрез $S_{xy} \in \mathfrak{S}$ графа G , он делит G на две части $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ (см. рисунок 14b). Так как разрезы в \mathfrak{S} независимы, можно считать, что $A_1 \subset U_x$. Если $S_{xy} \cap R_1 = \emptyset$, то S_{xy} – разрез графа G' , отделяющий U_y от $(U_x \setminus A_1) \cup \{b\}$.

Пусть

$$B = R_1 \cap S_{xy}, \quad \text{и} \quad B' = \{b'_i : b_i \in B\}.$$

Отметим, что $b_1 \notin B$ по лемме 10. Для каждой вершины $b_i \in B$ в части U_y должна быть вершина, смежная с b_i , но такая вершина может быть только одна – это b'_i . Следовательно, $S' = (S_{xy} \setminus B) \cup B'$ – разрез графа G с

$$\text{Part}(G; S') = \{U_x \cup B', U_y \setminus B\}.$$

Тогда S' – разрез графа G' с

$$\text{Part}(G'; S') = \{(U_x \cup B' \cup \{b\}) \setminus A_1, U_y \setminus B\}.$$

Таким образом, граф G' – минимальный. □

Итак, рассмотрим минимальный k -связный граф G' . Из $v_k(G) = \frac{(k-1)v(G)+2k}{2k-1}$ и равенств (8) следует, что $v_k(G') = \frac{(k-1)v(G')+2k}{2k-1}$. По индукционному предположению $G' = G_{k,T'}$ для некоторого дерева T' с $\Delta(T') \leq k+1$. Тогда T'_1, \dots, T'_k – это копии дерева T' . Так как $N_{G'}(b) = \{b'_1, \dots, b'_k\}$, по построению графа $G_{k,T'}$ в дереве T' есть такая вершина b' , которая при изоморфизме копий соответствует вершинам b'_1, \dots, b'_k и $d_{T'}(b') \leq k$. Пусть дерево T получено из T' присоединением висячей вершины к b' . Теперь нетрудно понять, что $\Delta(T) \leq k+1$ и $G = G_{k,T}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. A. Dirac, *Minimally 2-connected graphs*. — J. Reine and Angew. Math. **268** (1967), 204–216.
2. M. D. Plummer, *On minimal blocks*. — Trans. Amer. Math. Soc. **134** (1968), 85–94.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*. — Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
4. W. Mader, *Ecken Vom Grad n in minimalen n -fach zusammenhängenden Graphen*. — Arch. Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
5. W. Mader, *On vertices of degree n in minimally n -connected graphs and digraphs*. — Combinatorics, Paul Erdős is Eighty, Budapest **2** (1996), 423–449.
6. W. Mader, *Zur Struktur minimal n -fach zusammenhängender Graphen*. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **49** (1979), 49–69.
7. J. G. Oxley, *On some extremal connectivity results for graphs and matroids*. — Discrete Math. **41** (1982), 181–198.
8. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
9. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k -связном графе*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
10. Д. В. Карпов, *Минимальные двусвязные графы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 106–127.

Карпов Д. В. Minimal k -connected graphs with minimal number of vertices of degree k .

A graph is k -connected if it has at least $k + 1$ vertices and remains connected after deleting any its $k - 1$ vertices. A k -connected graph is called minimal, if it becomes not k -connected after deleting any edge. W. Mader has proved that any minimal k -connected graph on n vertices has at least $\frac{(k-1)n+2k}{2k-1}$ vertices of degree k . We prove that any minimal k -connected graph with minimal number of vertices of degree k is a graph $G_{k,T}$ for some tree T with vertex degrees at most $k + 1$. The graph $G_{k,T}$ is constructed from k disjoint copies of the tree T . For any vertex a of the tree T we denote by a_1, \dots, a_k the correspondent vertices of copies of T . If the vertex a has degree j in the tree T then we add $k + 1 - j$ new vertices of degree k which are adjacent to $\{a_1, \dots, a_k\}$.

С.-Петербургское
отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург;
Математико-механический
факультет СПбГУ, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 19 ноября 2014 г.