O. D. Pryakhina, A. V. Smirnova, D. A. Hripkov, Резонансные явления в однородных средах с совокупностью жестких включений, *Matem. Mod. Kraev. Zadachi*, 2006, Part 3, 184–187 откуда получаем, что если уравнение (1) имеет асимптотическое равновесие, то любой постоянный вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является его решением, что означает $f(t, x) \equiv 0$.

Предположим теперь, что все решения уравнения (1) являются ω-периодическими. Рассмотрим возмущённое уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + h(t, y), \tag{4}$$

$h \in C\big((-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\big)$, $h(t+\omega, y) \equiv h(t, y)$. Тогда при любом h, не равном тождественно 0, уравнения (1) и (4) не могут быть асимптотически эквивалентными. То есть в этом случае любое периодическое возмущение приводит к изменению асимптотического поведения решений уравнения (1).

1. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. — Саранск: Изд-во Сарат. ун-та, Сар. фил., 1990. — 224 с.

АТОЛ Технологии, г. Москва
pashutkindv@yandex.ru

УДК 539.3

О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова, Д. А. Хрипков

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С СОВОКУПНОСТЬЮ ЖЁСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ*

В таких отраслях как строительство, машиностроение, сейсмология особое значение имеют задачи механики контактного взаимодействия. Условия передачи давления в зоне контакта являются определяющим фактором в расчетах на прочность, при оценке рисков разрушения конструкций и их элементов, фундаментных и коммуникационных сооружений, литосферных плит и т. д. Контактные задачи в общем случае приводят к необходимости решения систем интегральных уравнений (СИУ), ядра которых определяются краевыми задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных со смешанными граничными условиями:

$$\int_{\delta_1}\int_{\delta_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)\mathbf{Q}(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha d\beta = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \tag{1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04–01–96822, 05–01–00811), ФЦНТП (РИ–112/001/301).

Если абсолютно жесткий массивный объект (штамп), подверженный действию заданной системы сил, контактирует с упругой полуограниченной средой без дефектов (трещин или включений), то необходимо совместное решение уравнений движения абсолютно твердого тела и СИУ (6). В этом случае $\mathbf{Q}(\alpha,\beta)$ — трансформанта Фурье вектора искомых напряжений в области контакта Ω штампа со средой, $\mathbf{f}(x,y)$ — вектор перемещений точек среды в этой области, $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ — матрица-символ Грина размерности 3×3, соответствующая конкретной модели среды. Общее представление решения СИУ динамических смешанных задач состоит из энергетической составляющей, обладающей конечной энергией, и неэнергетической — с бесконечной энергией, обеспечивающей излучение энергии. В случае существования лишь энергетической составляющей решения полуограниченное тело при определенной массе штампа приобретает точки изолированного спектра и возможен резонанс. Резонансы такого рода (низкочастотные или В-резонансы) возникают в диапазоне $0<\omega<\omega_{\text{кр}}$ докритических частот запирания волноводных свойств полуограниченного тела. Точек дискретного спектра всегда конечное число, и они лежат в указанном диапазоне частот [1]. Если $\omega_{\text{кр}}=0$, то рассматриваемая система не имеет низкочастотных резонансов. В диапазоне частот $\omega>\omega_{\text{кр}}$ в средах с неоднородностями также существуют резонансные режимы (высокочастотные резонансы), реализуемые при выполнении условий локализации вибрационного процесса — специальным образом ориентированных включений или трещин, параметры которых удовлетворяют некоторым соотношениям, связывающим их с характеристиками полуограниченного тела [2].

В настоящей работе рассматривается совокупность плоских жестких включений, расположенных в N параллельных плоскостях в упругом слое со свободной верхней гранью и жёстко защемленной нижней. В этом случае в (6) $f(x,y)=$ $=\{\mathbf{w}_1^0,\mathbf{w}_2^0,\ldots,\mathbf{w}_N^0\}$ — многомерный вектор, компонентами которого являются векторы перемещений, заданные на границах включений, $\mathbf{Q}=\{\boldsymbol{\eta}_1,\ldots,\boldsymbol{\eta}_N\}$ — многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье скачков векторов напряжений на границах включений $\Delta\mathbf{t}_k(x,y)$. Носителем каждой из вектор-функций $\Delta\mathbf{t}_k(x,y)$ является соответствующая область из Ω, $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N\}$. Так как Ω_k расположены в разных плоскостях, то матрица-символ ядра $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega)$ СИУ (6) для сред, содержащих совокупность разноуровневых включений, в отличие от СИУ традиционных контактных задач, является блочной. Ее элементы — эрмитовы матрицы, которые имеют структуру, присущую матрицам-символам Грина упругих полуограниченных сред без дефектов. Определитель матрицы-символа СИУ равен

$$\det \mathbf{K} = \frac{\Delta(h_1)}{\Delta(H)} \prod_{m=2}^{N+1} D(h_m). \qquad (2)$$

Здесь $H = -2\sum\limits_{k=1}^{N+1} h_k$ — толщина слоя; $z_k = -2\sum\limits_{m=1}^{k} h_m$ — плоскости, содержащие включения; $D(h_k)$, $\Delta(h_k)$ — соответственно числитель и знаменатель матрицы-символа Грина слоя на жестком основании, толщина которого приведена в качестве аргумента. Указанные функции зависят также от параметров преобразования Фурье α, β, частоты колебаний ω и механических параметров среды. Существует диапазон частот запирания волноводных свойств слоя с включениями, в котором при определенной их массе возможен низкочастотный резонанс, поскольку $\det \mathbf{K}$ не имеет там вещественных нулей и полюсов.

Используя (4) можно путем подбора глубины погружения включений управлять динамическими свойствами механической системы. Например, для включения, расположенного в однородном слое толщины H на глубине $2h_1 = \frac{1}{3}H$, часть полюсов оказывается заблокированной. При этом количество волн перемещения, распространяющихся от включения при фиксированном значении частоты $\omega > \omega_{\text{кр}}$ и уносящих энергию на бесконечность, уменьшается, что приводит к частичной локализации вибрационного процесса.

Если включение расположено на глубине $z = -2h_1$ в однородном полупространстве, то определитель СИУ имеет точки ветвления. Единственным вещественным полюсом этой функции является рэлеевский полюс матрицы Грина однородного полупространства, расположенный в области $|\mathrm{Re}\,\lambda| \geqslant \kappa_2$, $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Вещественные нули $\det \mathbf{K}$ совпадают с полюсами определителя матрицы Грина слоя на жестком основании толщины $2h_1$, которые, как известно, расположены в области

$|\mathrm{Re}\,\lambda| < \kappa_2$. В этом случае локализация вибрационного процесса только путем подбора глубины залегания включения невозможна. Невозможен также и низкочастотный резонанс, так как для полупространства $\omega_{\text{кр}} = 0$.

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. — М.: Научн. мир, 1999. — 246 с.
2. *Бабешко В.А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ, 2000. — № 3. С. 5–9.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
donna@kubsu.ru

УДК 517.95

А. В. Псху

УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ВРЕМЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ*

1. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial y^{\alpha_k}} u(x, y) - \Delta_x u(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ — оператор Лапласа, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$; $\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k}$ — дробная производная порядка α_k по переменной y_k, либо производная в смысле Римана-Лиувилля ([1, с. 9]), $\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = D_{0y_k}^{\alpha_k}$, $D_{0t}^{\alpha} g(t) = [\Gamma(m-\alpha)]^{-1} (\partial/\partial t)^m \int\limits_0^t g(s)(t-s)^{m-\alpha-1} ds$, $\alpha \leqslant m$; либо производная Капуто ([1, с. 11]), $\partial^{\alpha_k}/\partial y_k^{\alpha_k} = \partial_{0y_k}^{\alpha_k}$, $\partial_{0t}^{\alpha} g(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m D_{0t}^{\alpha-m} g(t)$; $y = (y_k) \in \mathbb{R}^m$; $\alpha_k \in (0;\, 1)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

При $m = 1$ уравнение (1) совпадает с уравнением диффузии дробного порядка. Уравнения с дробными производными могут выступать в качестве математических моделей, описывающих различные процессы в средах с фрактальной геометрией ([1, гл. 5]). Отметим работы [2–8], в которых рассматривались диффузионные и диффузионно-волновые уравнения

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 06–01–96625, № 06–01–96627) и Фонда содействия отечественной науке