М. Исмати (М. Исматов), О некоторых несамосопряженных смешанных задачах теории теплопроводности,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 382–395

https://www.mathnet.ru/de11246

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 382–395

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.4

О НЕКОТОРЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2005 г. **М. Исмати (М. Исматов)**

1. Постановка задачи и метод ее решения. Рассмотрим вначале вопрос о разрешимости следующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности (см. [1, 2]):

$$u_t - u_{xx} = f(x, y), \quad (x, t) \in \theta_T = (0, 1) \times (0, T), \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

$$\int\limits_0^1 u(x, t)\, dx = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Краевое условие (4) является нелокальным. Оно означает равенство нулю средней температуры.

Отметим, что соответствующую смешанную задачу с неоднородными краевыми условиями

$$\int\limits_0^1 u(x, t)\, dx = \mu(t), \quad t \in [0, T], \tag{4_1}$$

введением новой неизвестной функции можно свести к задаче вида (1)–(4) (см. ниже замечание 4). Задача (1)–(3), (4_1) рассмотрена в работах [1, 2], где доказаны существование и единственность классического решения этой задачи, а также получены двусторонние априорные оценки для решения задачи по начальным данным и правой части уравнения в нормах $L_2(0, 1)$, $C(0, 1)$ и $C(\bar{\theta}_T)$.

Если однородное уравнение теплопроводности интегрировать по x в пределах от 0 до 1, то легко видеть, что нелокальное условие (4) эквивалентно следующему условию, выражающему равенство потоков через концы $x = 0$ и $x = l$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5}$$

Поэтому мы всюду в дальнейшем вместо задачи (1)–(4) будем рассматривать смешанную задачу (1)–(3), (5).

Разыскивая решение задачи (1)–(3), (5) методом разделения переменных в виде $u(x, t) = R(t)v(x)$, относительно $v(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in (0, 1) = G, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = v'(1). \tag{6}$$

Краевая задача (6) с параметром λ является несамосопряженной краевой задачей (в силу краевых условий). По аналогии с [1, 2], следуя В.А. Ильину [3, 4], собственную функцию v_k задачи (6), отвечающую собственному значению λ_k, определим как нетривиальное решение задачи (6), а присоединенную функцию $\tilde{v}_k$ определим как нетривиальное решение задачи

$$\tilde{v}_k'' + \lambda_k \tilde{v}_k = P_k v_k, \quad x \in G, \quad P_k = -4k\pi, \quad \tilde{v}_k(0) = 0, \quad \tilde{v}_k'(0) = \tilde{v}_k'(1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Ясно, что сопряженной задачей к (6) является

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad Y(0) = Y(1), \quad Y'(1) = 0, \tag{8}$$

где $\lambda = \bar{\lambda}$, $Y(x) = \bar{v}(x)$.

Наряду со смешанной задачей (1)–(3), (5) мы также будем рассматривать следующую смешанную задачу с сопряженными краевыми условиями:

$$\begin{gathered} U_t - U_{xx} = f(x,y), \quad (x,t) \in \Theta_T, \quad U(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \\ U(0,t) = U(1,t), \quad U_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{9}$$

По аналогии с работами [1, 2] метод решения задач (1)–(3), (5) и (9) основывается на возможности разложения функций, задающих начальное условие задачи и правую часть уравнения $f(x,t)$, в биортогональный ряд по системе собственных и присоединенных (которых бесконечно много) функций несамосопряженных задач. Обоснование такой возможности следует из результата работы [3]. Кроме того, такая возможность следует также из того, что системы $\{v_k\}_0^\infty$ и $\{y_k\}_0^\infty$ образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$, а следовательно, согласно работе [5], являются базисами в $L_2(0,1)$.

В работе доказывается абсолютная и равномерная сходимость биортогональных разложений по собственным и присоединенным функциям задачи (6) и (8). Эти результаты затем применяются для доказательства существования и единственности классического решения смешанных задач (1)–(3), (5) и (9). Кроме того, будут получены априорные оценки для решения задачи по начальным данным и правой части в нормах $L_2(0,1)$, $C(0,1)$ и $C(\bar{\Theta}_T)$. Попутно будут указаны ошибки, допущенные в работах [1, 2] при нахождении решения неоднородного уравнения и константы в априорных оценках.

Как показано в [1], задачи (6) и (8) имеют следующие системы собственных чисел и собственных и присоединенных функций:

$$\begin{gathered} \lambda_k = \bar{\lambda}_k = \mu_k^2, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_{2k-1} = \mu_{2k} = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \ldots); \\ v_0 = x, \quad v_{2k-1} = x\cos(2\pi kx), \quad v_{2k} = \sin(2\pi kx) \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{10}$$

и

$$Y_0 = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi kx) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Там же показано, что системы $\{v_k\}_0^\infty$ и $\{Y_k\}_0^\infty$ образуют биортогональную систему функций (лемма 1) и образуют базисы Рисса в $L_2(0,1)$ (теорема 1), т.е. имеют место следующие двусторонние оценки:

$$\tau\|\varphi\|_{L_2}^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^2 \le R\|\varphi\|_{L_2}^2, \quad R = 16, \quad \tau = \frac{3}{4}, \quad R^{-1}\|\varphi\|_{L_2}^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\varphi}_k^2 \le \tau^{-1}\|\varphi\|_{L_2}^2, \tag{12}$$

где $\varphi_k = (\varphi, Y_k)$ и $\bar{\varphi}_k = (\varphi, v_k)$ – коэффициенты биортогонального разложения функции φ, а $(,)$ и $\|\cdot\|$ – скалярное произведение и норма в $L_2(0,1)$. Если функция $\varphi(x)$ не удовлетворяет условию $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$, то $R = 20$.

Следуя работе [5], дадим

Определение 1. Будем говорить, что система $\{V_k\}$ обладает свойством базисности, если для любой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ существует один и только один ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k V_k(x)$, сходящийся к $f(x)$ в смысле метрики L_2 на любом компакте K интервала $G = (0,1)$.

Легко проверить, что для системы собственных и присоединенных функций задач (10) и (11) необходимое и достаточное условие базисности работы [5]

$$\|V_k\|_{L_2(K)}\|Y_k\|_{L_2(G)} \le C(K) \quad \forall k \in N_0$$

(где K – любой компакт интервала $G = (0,1)$, а $C(K)$ постоянная) выполнены.

Как отмечено в работе [4] (см. также и работу [1]), в случае, когда общее число присоединенных функций является бесконечным (например, такое же, как для задачи (6) и (8)), эти системы $\{v_k\}$ и $\{Y_k\}$ могут обладать свойством базисности при одном выборе присоединенных функций и терять его при другом выборе присоединенных функций. В связи с этим в работе [4] при весьма широких предположениях на спектр оператора

$$LV = V^{(n)} + P_1(x)V^{(n-1)} + \ldots + P_n V$$

(при этом вид краевых условий не играет никакой роли, в частности, эти условия могут быть нелокальными) дано исчерпывающее решение задачи о существовании приведенной системы функций оператора L, т.е. дан ответ на вопрос о существовании такой специальной полной и минимальной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности тогда и только тогда, когда рассматриваемая задача обладает свойством базисности хотя бы при каком-то одном выборе собственных и присоединенных функций.

Наконец, рассмотрим следующую редукцию смешанной задачи (9):

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \tag{13}$$

где V и W соответственно является решениями следующих смешанных задач:

$$V_t = V_{xx}, \quad (x,t) \in \Theta_T = G \times (0,T), \quad G = (0,1), \tag{14}$$

$$V(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{G} = [0,1], \tag{15}$$

$$V(0,t) = V(1,t), \quad V_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad T < \infty, \tag{16}$$

и

$$W_t = W_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Theta_T, \tag{17}$$

$$W(x,0) = 0, \quad x \in \bar{G}, \tag{18}$$

$$W(0,t) = W(1,t), \quad W_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{19}$$

2. Об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных рядов. Вначале рассмотрим вопрос об абсолютной и равномерной сходимости биортогональных рядов по системе собственных и присоединенных функций v_k задачи (6), (7). Имеет место

Теорема 1. *Пусть непрерывная и кусочно-гладкая на сегменте $\bar{G} = [0;1]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(0) = 0$. Тогда биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям задачи (6)*

$$f(x) = f_0 v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k-1} v_{2k-1}(x) + f_{2k} v_{2k}(x)), \tag{20}$$

где $f_k = (f, Y_k)$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{Y_k\}$, сходится абсолютно и равномерно на замкнутом отрезке $\bar{G}$ к функции $f(x)$.

Заметим, что условия на f в теореме 1 могут быть переформулированы следующим образом. Функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,1]$, а ее производная $f'(x)$ принадлежит пространству $L_2[0,1]$ и удовлетворяет условию $f(0) = 0$.

Однако в случае тригонометрического ряда, кроме условий 2π-периодичности, еще требуется выполнимость условия $f(1) = f(0)$. В теореме 1 требуется лишь выполнимость условия $f(0) = 0$.

Доказательство теоремы 1. По признаку Вейерштрасса для доказательства абсолютной и равномерной сходимости ряда (20) на отрезке $[0,1]$ достаточно показать сходимость мажорантного числового ряда

$$|f_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|f_{2k-1}| + |f_{2k}|), \tag{21}$$

так как для любых $k = 0, 1, \ldots$ и $x \in [0,1]$ имеем $|v_k(x)| \leq 1$.

Интегрированием по частям получаем

$$f_{2k-1} = \int_0^1 f(x)Y_{2k-1}(x)\,dx = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{f_{2k-1}^{(1)}}{k}, \tag{22}$$

где $f_{2k-1}^{(1)} = \int_0^1 \sqrt{2}f'(x)\sin(2k\pi x)\,dx$. Точно так же получим

$$f_{2k} = \int_0^1 f(x)Y_{2k}(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(-\frac{\tilde{f}_{2k}}{k} + \frac{\tilde{f}_{2k}^{(1)}}{k}\right), \tag{23}$$

где $\tilde{f}_{2k} = \int_0^1 \sqrt{2}f(x)\cos(2k\pi x)\,dx$, $\tilde{f}_{2k}^{(1)} = \int_0^1 \sqrt{2}(1-x)f'(x)\cos(2k\pi x)\,dx$

$$f_{2k}^{(1)} = \int_0^1 \sqrt{2}f'(x)\cos(2k\pi x)\,dx. \tag{24}$$

Применяя очевидное неравенство

$$2|ab| \leq a^2 + b^2 \tag{25}$$

и неравенства типа Бесселя

$$|f_0| \leq \frac{1}{2}\int_2^1 (1 + f^2(x))\,dx = \frac{1}{2}(1 + \|f\|^2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{2k-1}^{(1)})^2 \leq \|f'(x)\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{f}_{2k})^2 \leq \|f(x)\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(f_{2k}^{(1)})^2 \leq \|f'(x)\|^2,$$

из (21) с учетом (22)–(24) и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ получаем

$$|f_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|f_{2k-1}| + |f_{2k}|) \leq \frac{1}{2}(1 + |f|^2) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(|f_{2k-1}^{(1)}|^2 + |\tilde{f}_{2k}|^2 + |f_{2k}^{(1)}|^2 + \frac{3}{k^2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(1 + \|f\|^2) + \frac{\sqrt{2}}{2\pi}(\|f(x)\|^2) + 2\|f'(x)\|^2 + \frac{\pi^2}{2} = M < \infty.$$

Таким образом, мы доказали, что числовой ряд (21) сходится.

Осталось показать, что сумма этого ряда есть функция $f(x)$. Пусть сумма биортогонального ряда (20) равна $\varphi(x)$. Тогда функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ будут иметь одинаковые коэффициенты Фурье, т.е. $(\varphi, Y_k) = (f, Y_k)$ $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда получим $(\varphi - f, Y_k) = 0$ $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$ В силу непрерывности φ и f и полноты системы $\{Y_k\}$ получаем, что $f(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in \bar{G}$. Теорема доказана.

Имеет место

Теорема 2. *Биортогональный ряд непрерывной и кусочно-гладкой на сегменте $\bar{G}$ функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей граничному условию $\varphi(0) = \varphi(1)$ задачи (8),*

$$\varphi(x) = \varphi_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{2k-1}, Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k}Y_{2k}(x)), \tag{26}$$

где $\varphi_0 = (\varphi, v_0)$, $\varphi_{2k-1} = (\varphi, v_{2k-1})$, $\varphi_{2k} = (\varphi, v_{2k})$ *– коэффициенты Фурье функции* $\varphi(x)$ *по биортогональной системе* $\{v_k\}$, *сходится к этой функции абсолютно и равномерно на всем замкнутом сегменте* $[0,1]$.

Доказательство теоремы 2 см. в [7, с. 49–50].

3. О скорости сходимости биортогонального ряда. Имеет место следующая теорема о связи между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее биортогонального ряда.

Теорема 3. *Пусть функции* $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(m)}(x)$ $(m \geq 0)$ *непрерывны на отрезке* $\bar{G}$, *а производная* $\varphi^{(m+1)}(x)$ *кусочно непрерывна на этом отрезке. Кроме того, пусть выполнены следующие условия:*

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \varphi'''(1) = 0; \ \ldots; \quad \varphi^{(m-2)}(0) = \varphi^{(m-2)}(1),$$
$$\varphi^{(m-2)}(1) = 0; \quad \varphi^{(m)}(0) = \varphi^{(m)}(1)$$

для четного)* m *и* $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$; $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi'''(1) = 0$; $\ldots$; $\varphi^{(m-1)}(0) = \varphi^{(m-1)}(1)$, $\varphi^{(m)}(1) = 0$ *для не четного* m. *Тогда для коэффициентов биортогонального разложения этой функции*

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) v_k(x)\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

выполняются соотношения

$$\varphi_{2k-1} = o(k^{-(m+1)}), \quad \varphi_{2k} = o(k^{-(m+1)})^{**)} \tag{27}$$

и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n (|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) \quad (n = \overline{0,m}) \tag{28}$$

сходятся.

Доказательство. Возможны следующие четыре случая: $m = 4p$, $m = 4p+1$, $m = 4p+2$, $m = 4p+3$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$.

При $m = 4p$ интегрированием по частям получаем

$$\varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi(x) v_{2k}(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi k)^{4p+1}} \int_0^1 \varphi^{(4p+1)} \cos(2k\pi x)\, dx.$$

При этом мы воспользовались условиями

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \ \ldots, \quad \varphi^{(4p)}(0) = \varphi^{(4p)}(1). \tag{29}$$

Аналогично при $m = 4p+1$ и выполнении условий (29), при $m = 4p+2$ и выполнении условий

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \ \ldots, \quad \varphi^{(4p+2)}(0) = \varphi^{(4p+2)}(1) \tag{30}$$

и при $m = 4p+3$ и выполнении условий (30) соответственно получим

$$\varphi_{2k} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+2}} \int_0^1 \varphi^{(4p+2)} \sin(2k\pi x)\, dx, \quad \varphi_{2k} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+3}} \int_0^1 \varphi^{(4p+3)} \cos(2k\pi x)\, dx,$$

---

*) Для $m = 0$ условия $\varphi(1) = 0$ не требуется (см. теорему 2). Для $m = 1$ и $m = 2$ эти условия соответственно имеют вид $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$ и $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$.

**) Т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} (\varphi_{2k-1} : k^{-(m+1)}) = \lim\limits_{k\to\infty} (\varphi_{2k} : k^{-(m+1)}) = 0$.

$$\varphi_{2k} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+4}} \int_0^1 \varphi^{(4p+4)} \sin(2k\pi x)\, dx.$$

Совершенно аналогично для φ_{2k-1} при $m = 4p$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ и выполнении условий*) $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$, $\ldots$, $\varphi^{(4p-2)}(0) = \varphi^{(4p-2)}(1)$, $\varphi^{(4p-1)}(1) = 0$, при $m = 4p+1$ и выполнении условий

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0, \ \ldots, \quad \varphi^{(4p)}(0) = \varphi^{(4p)}(1), \quad \varphi^{(4p+1)}(1) = 0, \tag{31}$$

при $m = 4p+2$ и выполнении условий

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0, \ \ldots, \quad \varphi^{(4p+2)}(0) = \varphi^{(4p+2)}(1), \quad \varphi^{(4p+3)}(1) = 0$$

соответственно получим

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+1}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+1)} \sin(2k\pi x)\, dx, \quad \varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+2}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+2)} \cos(2k\pi x)\, dx,$$

$$\varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+3}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+3)} \sin(2k\pi x)\, dx, \quad \varphi_{2k-1} = -\frac{1}{(2\pi k)^{4p+4}} \int_0^1 (x\varphi)^{(4p+4)} \cos(2k\pi x)\, dx.$$

Докажем теорему для четного $m = 4p+2$, где $p = 0, 1, 2, \ldots$ Имеем

$$|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}| = \left| \frac{1}{(2k\pi)^{m+1}} \int_0^1 (x\varphi)^{(m+1)} \sin(2k\pi x)\, dx \right| + \left| \frac{1}{(2k\pi)^{m+1}} \int_0^1 \varphi(x)^{(m+1)} \cos(2k\pi x)\, dx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{m+1}} \left(\frac{|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|}{k^{m+1}} + \frac{|\varphi_{2k}^{(m+1)}|}{k^{m+1}} \right), \tag{32}$$

где

$$\varphi_{2k-1}^{(m+1)} = \int_0^1 \sqrt{2}\varphi^{(4p+1)}(x) \sin(2k\pi x)\, dx, \quad \varphi_{2k}^{(m+1)} = \int_0^1 \sqrt{2}\varphi^{(4p+1)}(x) \cos(2k\pi x)\, dx.$$

Так как коэффициенты Фурье $\varphi_{2k-1}^{(m+1)}$ и $\varphi_{2k}^{(m+1)}$ функции $\varphi^{(m+1)}(x) \in L_2[0,1] \subset L_1[0,1]$ стремятся к нулю при $k \to \infty$, то из (32) следуют соотношения (27). С другой стороны, из (32) получаем

$$k^m(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|) \le 2^{-1/2}(2\pi)^{-(m+1)}(|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|/k) + (|\varphi_{2k}^{(m+1)}|/k). \tag{33}$$

В силу очевидного неравенства (25), неравенства типа Бесселя

$$\varphi_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|^2 + |\varphi_{2k}^{(m+1)}|^2) \le \int_0^1 |\varphi^{(m+1)}(x)|^2\, dx \tag{34}$$

и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ из (33) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|), \tag{35}$$

а следовательно, сходимость всех рядов (28).

*) При $m = 0$ выполнения каких-либо граничных условий не требуется. При $m = 1$ и $m = 2$ эти условия имеют вид $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(1) = 0$.

Утверждение теоремы 3 для случаев $m = 4p$, $m = 4p+1$ и $m = 4p+3$ доказывается аналогично.

Имеет место

Теорема 4. *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, причем $m \geq 1$. Тогда биортогональный ряд (26) функции $\varphi(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на сегменте $\bar{G}$.*

Доказательство. Отметим, что ряды (28) являются мажорантными рядами для рядов, полученных из (26) m-кратным почленным дифференцированием. По теореме 3 ряды (28) сходятся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса как исходный ряд (26), так и каждый из рядов

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} Y_{2k}(x))^{(n)}$$

(при $n = \overline{0,m}$) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $\bar{G}$, а это обеспечивает возможность m-кратного почленного дифференцирования исходного ряда (26). Теорема 4 доказана.

Теорема 3 позволяет оценить скорость сходимости биортогонального ряда (26), т.е. дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда (26) $\varphi(x)$ его частичной суммой

$$S_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1} + \varphi_{2k} Y_{2k}) + \varphi_0 Y_0,$$

или же получить оценку для n-го ее остатка

$$r_n(x) = \varphi(x) - S_n(x, \varphi) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} Y_{2k}(x)).$$

Действительно, пусть выполнены все условия теоремы 3. Используя неравенство Коши–Буняковского для сумм, получаем

$$|r_n(x)| \leq A \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \right)^{1/2}, \tag{36}$$

где $A = (2\pi)^{-(m+1)}$, $\varepsilon_k = (|\varphi_{2k-1}^{(m+1)}|^2 + |\varphi_{2k}^{(m+1)}|^2)^{1/2}$. Из неравенства (34) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 < \infty. \tag{37}$$

Пусть $\sigma_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k^2$. Тогда в силу (37) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Воспользовавшись неравенством

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \leq \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}} = \frac{1}{(2m+1)n^{2m+1}} \tag{38}$$

и обозначив

$$\delta_n = \frac{A}{\sqrt{2m+1}} \sqrt{\sigma_n}, \tag{39}$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \tag{40}$$

Но тогда из (36) с учетом (37)–(40) получаем

$$|r_n(x)| \leq \delta_n / n^{(m+1/2)} = o(n^{-(m+1/2)}) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{41}$$

В силу теоремы 4 бесконечно малая величина δ_n не зависит от точки x.

Из теоремы 3 и оценки (41) при $m = 0$ непосредственно следует

Теорема 5. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $\bar{G} = [0,1]$, имеет в нем кусочно-непрерывную производную первого порядка и удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi(1)$. Тогда биортогональный ряд (26) на отрезке $\bar{G}$ сходится абсолютно и равномерно к этой функции. Более того, можно утверждать равномерную сходимость не только ряда (26), но и ряда более общего вида $\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_{2k-1}Y_{2k-1}(x) + \varphi_{2k}Y_{2k}(x))\lambda_k^a$, где a – произвольное число, удовлетворяющее требованию $a \leq 1/4$.*

Отметим, что аналогичный результат был получен в работе [6] для рядов по собственным функциям первых трех однородных самосопряженных краевых условий для оператора Лапласа в произвольной N-мерной области G.

Имеет место аналогичная теореме 3 и относящаяся к биортогональному разложению (20)

Теорема 6. *Пусть функции $f(x), f'(x), \ldots, f^{(m)}(x)$ $(m \geq 0)$ непрерывны на сегменте $\bar{G}$, а производная $f^{(m+1)}(x)$ кусочно непрерывна на этом же сегменте. Кроме того, пусть выполнены следующие условия*) : $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(1)$; $f''(0) = 0$, $f'''(0) = f'''(1)$; $\ldots$; $f^{(m-1)}(0) = 0$, $f^{(m-1)}(0) = f^{(m-1)}(1)$, $f^{(m)}(0) = 0$ для четного m и $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(1)$; $f''(0) = 0$, $f'''(0) = f'''(1)$; $\ldots$; $f^{(m-1)}(0) = 0$, $f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1)$ для нечетного m. Тогда для коэффициентов биортогонального разложения этой функции*

$$f_k = \int_0^1 f(x)Y_k(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

выполняются соотношения $f_{2k-1} = o(k^{-(m+1)})$, $f_{2k} = o(k^{-(m+1)})$ и ряды вида (28) сходятся.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 6 для биортогонального ряда (20) будут иметь место также и теоремы вида 4 и 5.

Замечание 2. Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 3 при $m = 0$. Действительно, при $n = m = 0$ из (28) получаем сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_{2k-1}| + |\varphi_{2k}|)$, который является мажорантным для ряда (26). Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (26) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $\bar{G}$. Это утверждение сохраняет свою силу и в отношении теорем 1 и 6.

4. О корректной разрешимости смешанных задач.

Существование классического решения. Рассмотрим несамосопряженную смешанную задачу (9). Найдем выражения для формального решения этой задачи. Сначала найдем формальное решение задачи (14)–(16). Разыскивая решение задачи (14)–(16) в виде разложения по базису

$$V(x,t) = R_0(t)Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(R_{2k-1}(t)Y_{2k-1}(x) + R_{2k}(t)Y_{2k}(x)) \tag{42}$$

с неопределенными коэффициентами $R_{2k-1}(t)$, $R_{2k}(t)$, подставляя это выражение в уравнение (14) (допустимость почленного дифференцирования этого ряда один раз по t и дважды по x доказывается ниже (см. теорему 7)) и приравнивая коэффициенты при Y_{2k-1} и Y_{2k} в обеих частях полученного равенства, для нахождения коэффициентов $R_{2k-1}(t)$ и $R_{2k}(t)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$R_0'(t) = 0, \quad R_{2k}'(t) + \lambda_k R_{2k}(t) = 0, \quad R_{2k-1}' + \lambda_k R_{2k-1}(t) = P_k R_{2k}(t).$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$R_0(t) = A_0, \quad R_{2k}(t) = A_{2k}e^{-\lambda_k t}, \quad R_{2k-1}(t) = e^{-\lambda_k t}(A_{2k-1} + P_k t A_{2k}), \tag{43}$$

где A_0, A_{2k}, A_{2k-1} – произвольные постоянные.

*) При $m = 0$ требуется лишь выполнимость условия $\varphi(0) = 0$ (см. теорему 1). При $m = 1$ и $m = 2$ соответственно требуется выполнимость условий $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(1)$ и $f(0) = 0$, $f'(0) = f'(1)$, $f''(0) = 0$.

Следовательно, выражение (42) примет вид

$$V(x,t) = A_0Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}[A_{2k}Y_{2k} + (A_{2k-1} + P_k t A_{2k})Y_{2k-1}].$$

Отсюда в силу начального условия (15) имеем

$$\varphi(x) = A_0Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_{2k}Y_{2k} + A_{2k-1}Y_{2k-1}] \equiv A_0\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_{2k}Y_{2k} + \varphi_{2k-1}Y_{2k-1}] \Rightarrow A_0 = \varphi_0,$$

$$A_{2k} = \varphi_{2k}, \quad A_{2k-1} = \varphi_{2k-1}. \tag{44}$$

Из (42) в силу (43) и (44) для формального решения задачи (14)–(16) получаем выражение

$$V(x,t) = \varphi_0 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}[\varphi_{2k}Y_{2k} + (\varphi_{2k-1} + P_k t \varphi_{2k})Y_{2k-1}], \tag{45}$$

где $\varphi_0 = (\varphi, v_0)$, $\varphi_{2k} = (\varphi, v_{2k})$, $\varphi_{2k-1} = (\varphi, v_{2k-1})$ – коэффициенты Фурье начальной функции $\varphi(x)$ по системе $\{v_k\}$, а $P_k = -4k\pi$.

Совершенно аналогично, разложив в биортогональные ряды решения задачи (17)–(19) и правую часть уравнения $f(x,t)$, получим

$$W(x,t) = W_0(t)Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(W_{2k-1}(t)Y_{2k-1} + W_{2k}(t)Y_{2k}), \tag{46}$$

$$f(x,t) = f_0(t)Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{2k-1}(t)Y_{2k-1} + f_{2k}(t)Y_{2k}), \tag{47}$$

где $f_0(t) = (f, v_0)$, $f_{2k-1}(t) = (f, v_{2k-1})$, $f_{2k}(t) = (f, v_{2k})$ – коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$ по системе $\{v_k\}$, а $W_0(t)$, $W_{2k-1}(t)$, $W_{2k}(t)$ – пока неопределенные функции. Для нахождения коэффициентов $W_0(t)$, $W_{2k-1}(t)$, $W_{2k}(t)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$W_0'(t) = f_0(t), \quad W_{2k}'(t)+\lambda_k W_{2k}(t) = f_{2k}(t), \quad W_{2k-1}'(t)+\lambda_k W_{2k-1}(t) = P_k W_{2k}(t)+f_{2k-1}(t). \tag{48}$$

Очевидно, что общее решение задачи Коши

$$y'(t) + P(t)y(t) = \Theta(t), \quad y(0) = y_0 \tag{49}$$

имеет вид

$$y(t) = \exp\left\{-\int_0^t P(r)\,dr\right\}\left(C + \int_0^t \Theta(r)\exp\left\{\int_0^r P(\eta)d\eta\right\}dr\right). \tag{50}$$

Применяя формулу (50), из уравнения (48) находим

$$W_0(t) = C_0 + \int_0^t f_0(r)\,dr, \quad W_{2k}(t) = e^{-\lambda_k t}\left(C_{2k} + \int_0^t f_{2k}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\right),$$

$$W_{2k-1}(t) = e^{-\lambda_k t}\left(C_{2k-1} + \int_0^t \left[P_k\left(C_{2k} + \int_0^r f_{2k}(\eta)e^{\lambda_k \eta}\,d\eta\right) + f_{2k-1}(r)e^{\lambda_k r}\right]dr\right).$$

Подставляя значения $W_0(t)$, $W_{2k-1}(t)$, $W_{2k}(t)$ в ряд (46), получаем

$$W(x,t) = \left(C_0 + \int_0^t f_0(r)\,dr\right)Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\left\{\left(C_{2k} + \int_0^t f_{2k}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\right)Y_{2k} + \right.$$

$$\left. + \left[C_{2k-1} + P_k C_{2k} t + P_k \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k}(\eta)e^{\lambda_k \eta}\,d\eta\right)dr + \int_0^t f_{2k-1}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\right]Y_{2k-1}\right\}, \tag{51}$$

где C_0, C_{2k}, C_{2k-1} – произвольные постоянные. Отсюда в силу начальных условий задачи (17)–(19) находим, что $C_0 = C_{2k-1} = C_{2k} = 0$. Тогда выражение (51) для формального решения смешанной задачи (17)–(19) примет вид

$$W(x,t) = Y_0 \int_0^t f_0(r)\,dr + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\left\{\left(\int_0^t f_{2k}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\right)Y_{2k}(x) + \right.$$

$$\left. + \left[P_k \int_0^t \left(\int_0^r f_{2k}(\eta)e^{\lambda_k \eta}\,d\eta\right)dr + \int_0^t f_{2k-1}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\right]Y_{2k-1}(x)\right\}. \tag{52}$$

Наконец, из (13) с учетом формул (45) и (52) для формального решения задачи (9) получим следующее выражение:

$$U(x,t) = \left(\varphi_0 + \int_0^t f_0(r)\,dr\right)Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\left\{\left(\varphi_{2k} + \int_0^t f_{2k}(r)e^{\lambda_k r}dr\right)Y_{2k}(x) + \varphi_{2k-1}Y_{2k-1}(x) + \right.$$

$$\left. + P_k\varphi_{2k} t Y_{2k-1}(x) + P_k Y_{2k-1}(x)\int_0^t \left(\int_0^r f_{2k}(\eta)e^{\lambda_k \eta}\,d\eta\right)dr + \left[\int_0^t f_{2k-1}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\right]Y_{2k-1}(x)\right\}. \tag{53}$$

Определение 2. Функция $u(x,t)$ из класса $C^1(\bar\Theta_T)\cap C^{2,1}_{x,t}(\Theta_T)$ называется классическим решением задачи (9), если она удовлетворяет уравнению, начальному и граничным условиям этой задачи в обычном классическом смысле.

Имеет место следующая теорема существования классического решения смешанной задачи (9).

Теорема 7. *Пусть начальная функция $\varphi(x)$ и правая часть $f(x,t)$ задачи (9) удовлетворяют следующим требованиям: 1) функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $\bar G = [0,1]$, имеет в нем кусочно-непрерывную производную $\varphi'(x)$ и удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi(1)$; 2) функция $f(x,t) \in C(\bar\Theta_T)$ и $\forall t \in [0,T]$ относительно x удовлетворяет тем же условиям, что и функция $\varphi(x)$ в п. 1).*

Тогда сумма ряда (53) $U(x,t)$ определяет классическое решение смешанной задачи (9). Кроме того, возможно почленное дифференцирование ряда (53) по x и t сколько угодно раз в прямоугольнике $[0,1]\times[\varepsilon,T]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что доказательство теоремы 7 сводится к проверке выполнимости следующих утверждений:

а) ряд (53) равномерно сходится в прямоугольнике $\bar\Theta_T = [0,1]\times[0,T]$, $T < \infty$;

б) ряд (53) при любом $t \ge r \ge \varepsilon > 0$ можно сколько угодно раз почленно дифференцировать по x и t в прямоугольнике $[0,1]\times[\varepsilon,T]$;

в) сумма ряда (53) $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению, начальному и граничным условиям задачи (9) в обычном классическом смысле.

Докажем справедливость утверждения а). Для этого ряд (53) перепишем в виде (13), где V и W определены соответственно формулами (45) и (52). Из (53) при $t = 0$ получим ряд (26).

Следовательно, равномерная сходимость ряда (53) при $t = 0$ следует из теоремы 2. Пусть $t \geq \varepsilon$, где ε – любое действительное положительное число. Тогда равномерная сходимость ряда (53) в прямоугольнике $[0,1] \times [\varepsilon, T]$, $T < \infty$, является следствием утверждения б).

Доказательство утверждения б) для задачи (9) при $f(x,t) = 0$ (т.е. для ряда (45)) можно проводить по аналогии с работой [8]. Следовательно, остается убедиться в справедливости этого утверждения для ряда (52). Действительно, из (52) получим

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (-\lambda_k) \Bigg[f_{2k} e^{-\lambda_k (t-r)} Y_{2k}(x) +$$

$$+ \left(P_k \int_0^r f_{2k}(\eta) e^{-\lambda_k (t-\eta)}\, d\eta + \frac{1}{k\pi} f_{2k}(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} + f_{2k-1}(r) e^{-\lambda_k (t-r)} \right) Y_{2k-1}(x) \Bigg] dr, \tag{54}$$

$$f(x,t) = f_0(t) Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{2k}(t) Y_{2k}(x) + f_{2k-1}(t) Y_{2k-1}(x)]. \tag{55}$$

Для любого фиксированного $t \in [0, \infty)$, согласно теореме 2, ряд (55) сходится равномерно на сегменте $\bar{G}$. Для любого $x \in \bar{G}$ и t, удовлетворяющего неравенствам $t \geq r \geq \varepsilon > 0$, с учетом оценок $|Y_{2k}(x)| \leq 4$, $|Y_{2k-1}(x)| \leq 4$ из (54) имеем

$$|W_{xx}(x,t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \lambda_k \Bigg[|f_{2k}(r)| e^{-\lambda_k (t-r)} + |P_k| \int_0^r |f_{2k}(\eta)| e^{-\lambda_k (r-\eta)}\, d\eta + |f_{2k-1}(r)| e^{-\lambda_k (t-r)} +$$

$$+ \frac{1}{k\pi} |f_{2k}(r)| e^{-\lambda_k (t-r)} \Bigg] dr \leq (2\pi)^2 \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-\lambda_k \varepsilon} \left(\frac{|f_{2k}(r)| + |f_{2k-1}(r)|}{k} \right) dr +$$

$$+ 2(2\pi)^3 \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-\lambda_k \varepsilon} \left(\frac{|f_{2k}(r)| T}{k} \right) dr + 4\pi \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda_k \varepsilon} \left(\frac{|f_{2k}(r)|}{k} \right) dr.$$

Используя оценку

$$k^n e^{-(2k\pi)^2 \varepsilon} < 1 \tag{56}$$

для любого достаточно большого натурального n, неравенства (25) и Коши–Буняковского, получаем

$$|W_{xx}(x,t)| \leq \frac{2\pi^2}{2} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_{2k}(r)|^2 + |f_{2k-1}(r)|^2 + \frac{2}{k^2} \right) dr +$$

$$+ (2\pi)^3 T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_{2k}(r)|^2 + \frac{1}{k^2} \right) dr + 2\pi \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \left(|f_{2k}(r)|^2 + \frac{1}{k^2} \right) dr =$$

$$= (2\pi^2 + T(2\pi)^3 + 2\pi) \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2k}(r)|^2\, dr + 2\pi^2 \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2k-1}(r)|^2\, dr + \frac{\pi^2 T}{6} [(2\pi)^2 + T(2\pi)^3 + 2\pi].$$

Наконец, применяя неравенство Бесселя, приходим к оценке

$$|W_{xx}(x,t)| \leq 2\pi(\pi+T(2\pi)^2+1)\int\limits_0^T \|f(x,r)\|^2\,dr+2\pi^2\int\limits_0^T \|f(x,r)\|^2\,dr+\frac{\pi^2 T\cdot 2\pi}{6}[2\pi+T(2\pi)^2+1]=$$

$$= M_1\int\limits_0^T \|f(x,r)\|^2\,dr + M_2,$$

где $M_1 = 2\pi[2\pi + T(2\pi)^2 + 1]$, $M_2 = (T\pi^3/3)[2\pi + T(2\pi)^2 + 1]$.

Следовательно, ряд (54) равномерно сходится в прямоугольнике $\Theta_T = [0,1] \times [\varepsilon, T]$, где ε – любое положительное число.

Воспользовавшись оценкой (56), можно убедиться в справедливости других утверждений б).

Утверждение в) непосредственно следует из (53) и утверждения б). Теорема 7 доказана.

Для смешанной задачи (1)–(3), (5) также имеет место аналогичная теореме 7

Теорема 8. *Пусть начальная функция $\varphi(x)$ и правая часть уравнения (1) $f(x,t)$ удовлетворяют следующим требованиям: 1) функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $\bar{G}$, имеет в нем кусочно-непрерывную производную $\varphi'(x)$ и удовлетворяет условию $\varphi(0) = 0$; 2) функция $f(x,t)$ непрерывна в прямоугольнике $\bar{\Theta}_T = [0,1] \times [0,T]$ и для всех $t \in [0,T]$ относительно переменной x удовлетворяет таким же условиям, как и функция $\varphi(x)$ в п. 1).*

Тогда сумма ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}[(\varphi_{2k} + P_k t\varphi_{2k-1})v_{2k}(x) + \varphi_{2k-1}v_{2k-1}(x)]e^{-\lambda_k t} + v_0\int\limits_0^t f_0(r)\,d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\Bigg\{\Bigg(\int\limits_0^t f_{2k-1}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\Bigg)v_{2k-1} +$$

$$+\Bigg[\int\limits_0^t f_{2k}(r)e^{\lambda_k r}\,dr + P_k\int\limits_0^t\Bigg(\int\limits_0^r f_{2k-1}(\eta)e^{\lambda_k\eta}\,d\eta\Bigg)dr\Bigg]v_{2k}(x)\Bigg\}, \tag{57}$$

где $\varphi_k = (\varphi, Y_k)$ и $f_k(t) = (f, Y_k)$ – коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ по системе $\{Y_k\}$ соответственно, определяет классическое решение смешанной задачи (1)–(3), (5). Кроме того, возможно почленное дифференцирование ряда (57) по x и t сколько угодно раз в прямоугольнике $[0,1] \times [\varepsilon, T]$, где ε – произвольное положительное число.

Доказательство теоремы 8 аналогично доказательству теоремы 7, поэтому его не приводим.

Замечание 3. Н.И. Ионкиным при нахождении решения задачи (1)–(3), (5) при $\varphi(x) = 0$ допущена ошибка в правой части выражения

$$W_t - (W_{xx} + f) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k t f_{2k-1}(t)v_{2k}(x), \tag{58}$$

т.е. решение Н.И. Ионкина (41) из [1] не удовлетворяет задаче (1)–(3), (5) при $\varphi(x) = 0$. Легко проверить, что решение этой задачи имеет вид

$$W(x,t) = v_0\int\limits_0^t f_0(r)\,dr + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\Bigg\{\Bigg(\int\limits_0^t f_{2k-1}(r)e^{\lambda_k r}\,dr\Bigg)v_{2k-1}(x) +$$

$$+\left[\int\limits_0^t f_{2k}(r)e^{\lambda_k r}\,dr + P_k\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^r f_{2k-1}(\eta)e^{\lambda_k\eta}\,d\eta\right)dr\right]v_{2k}(x)\Bigg\}$$

и отличается от формулы (41) из [1]. В связи с этим и константы в априорных оценках теоремы 4 из [1] и теорем 2–4 из [2] будут другими. Например, теорема 4 из [1] принимает такой вид.

Теорема 9. *Если функция $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(3), (5) при $\varphi(x)=0$, то для нее справедлива оценка*

$$\left[M^{-1}\int\limits_0^t \|f(x,r)\|^2_{L_2(G)}\,dr\right]^{1/2} \le \|u(x,t)\|_{L_2(G)} \le \left[M\int\limits_0^t \|f(x,r)\|^2_{L_2(G)}\,dr\right]^{1/2},$$

где $M=RC/\tau$, $R=16$, $\tau=3/4$, $C=\max\{t,(2\pi)^{-2}\}$.

Замечание 4. Если граничные условия (3), (4_1) заданы в виде

$$u(0,t)=\nu(t),\qquad \int\limits_0^1 u(x,t)\,dx=\mu(t),\qquad t\in[0,t], \tag{4_2}$$

то введением новой неизвестной функции $Z(x,t)$ формулой

$$Z(x,t)+(1-2x)\nu(t)+2x\mu(t)=u(x,t) \tag{59}$$

задачу (1)–(2), (4_2) можно свести к следующей задаче вида (1)–(3), (5):

$$\begin{gathered}Z_t=Z_{xx}+F(x,y),\quad (x,t)\in\Theta_T=(0,1)\times(0,T),\quad Z(x,0)=\Phi(x),\quad 0\le x\le 1,\\ Z(0,t)=0,\quad \int\limits_0^1 Z(x,t)\,dx=0,\quad t\in[0,T],\end{gathered} \tag{60}$$

где $F(x,t)=f(x,t)-(1-2x)\nu'(t)-2x\mu'(t)$, $\Phi(x)=\varphi(x)-(1-2x)\nu(0)-2x\mu(0)$, $\Phi(0)=0$, $\int_0^1\Phi(x)\,dx=0$.

Следовательно, решение общей задачи (1)–(2), (4_2) запишется в виде равенства (59), в котором $Z(x,t)$ является решением задачи (60) и определяется рядом вида (57), т.е. теорема 8 имеет место и для задачи (1)–(2), (4_2) при дополнительном предположении о дифференцируемости функций $v(t)$ и $\mu(t)$.

О единственности классического решения. Имеет место

Теорема 10. *Пусть дополнительно к условиям 1), 2) теоремы 5 функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi'(1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,t)=0\quad \forall t\in[0,T]. \tag{61}$$

Тогда классическое решение задачи (9) существует и единственно.

Единственность классического решения задачи (1)–(3), (5) доказана Н.И. Ионкиным в [2].

Замечание 5. Дополнительные требования (61), наложенные на разлагаемые функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ в теореме 10 (в отличие от теоремы 7), связаны с методом ее доказательства.

Отметим также, что часть приведенных выше результатов в краткой форме опубликована в [9].

Автор выражает благодарность В.А. Ильину и Е.И. Моисееву за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ионкин Н.И.* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
2. *Ионкин Н.И.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
3. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 4. С. 796–798.
4. *Ильин В.А.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
5. *Бари Н.К.* // Уч. зап. МГУ. 1951. Т. 4. Вып. 148. С. 69–107.
6. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 2. С. 61–119.
7. *Исмати М., Исматов Н.М.* // Проблемы математики и информатики. Душанбе, 2001. С. 48–50.
8. *Исмати М.* // Паём ИПС. Душанбе, 2000. № 5. С. 117–130.
9. *Исмати М.* // Паём ИПС. Душанбе, 2001. № 6. С. 158–167.

Таджикский институт предпринимательства и сервиса,
г. Душанбе

Поступила в редакцию
17.03.2003 г.