У. А. Акрамов, Теорема изоляции для арифметического минимума произведения линейных форм с комплексными коэффициентами, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 151, 5–6

У.А.Акрамов

ТЕОРЕМА ИЗОЛЯЦИИ ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКОГО МИНИМУМА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Эта заметка продолжает исследования [3, 2] по теоремам изоляции. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $n=2m\geqslant 6$ и пусть $F(x)=F(x_1,\dots,x_n)$ - форма степени n, не разложимая в $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$, причем

$$F(x)=\prod_{i=1}^{m}\left\{L_i(x)\overline{L}_i(x)\right\}=\prod_{i=1}^{m}\left|L_i(x)\right|^2, \qquad (1)$$

где $L_i(x)=L_i(x_1,\dots,x_n)$ - линейная однородная форма с комплексными коэффициентами, $\overline{L}_i(x)$ - ей комплексно сопряженная форма, причем

$$\left\{L_i(x)\,\middle|\,x\in\mathbb{Q}^n\right\}=\left\{\overline{L}_i(x)\,\middle|\,x\in\mathbb{Q}^n\right\} \quad (i=1,\dots,m) \qquad (2)$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta=\eta(\varepsilon)>0$, что если формы $L'_1(x)-L_1(x),\dots,L'_m(x)-L_m(x)$ являются линейными комбинациями форм $L_1(x),\overline{L}_1(x),\dots,L_m(x),\overline{L}_m(x)$ с коэффициентами, не превышающими по абсолютной величине η, то или найдется целый вектор $x\in\mathbb{Z}^n$, $x\neq 0$, с условием

$$F'(x)<\varepsilon, \qquad (3)$$

или $L'_i(x)$ - линейная комбинация форм $L_i(x),\overline{L}_i(x)$ для всех $i=1,\dots,m$.

Заметим, что условия $m\geqslant 3$ и (2), как показывают примеры, вообще говоря, необходимы. Наша теорема является аналогом теоремы Б.Ф.Скубенко [2] о "сильной изоляции", где рассмотрен случай вещественных форм $L_1(x),\dots,L_n(x)$, $n\geqslant 3$ (случай $n=3$ ранее рассмотрели Касселс и Суиннертон-Дайер [3]).

Для доказательства теоремы рассматривается чисто комплексное поле K степени $n=2m\geqslant 6$ с сопряженными $K_1=K,\overline{K}_1,K_2,\overline{K}_2,\dots,K_m,\overline{K}_m$, причем $\overline{K}_i=K_i (i=1,\dots,m)$, и полный модуль $M\subset K$, отвечающий (см. [1], гл.II) форме F. Доказательство теоремы опирается на следующее вспомогательное предложение.

ЛЕММА. Для любого малого числа $\varepsilon>0$ и любого числа α найдется единица ω модуля M, $N(\omega)=1$, и постоянная $C=C(\varepsilon)>0$, не зависящая от α, для которых

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leqslant \alpha \frac{|\omega_1|^2}{|\omega_2|^2} < 1+\varepsilon ,$$

$$c^{-1} \leqslant |\omega_1|^2 |\omega_2|^2 < c ,$$

$$c^{-1} \leqslant |\omega_i|^2 < c \qquad (i=3,\ldots,n) ,$$

здесь $\omega_1=\omega, \omega_2, \ldots, \omega_m$ - сопряженные числа, отвечающие полям $K_1, K_2, \ldots, K_m$.

Для доказательства леммы рассматривается группа G единиц без кручения модуля M . Группа G содержит $(m-1)$ независимых элементов $\omega_1, \ldots, \omega_{m-1}$. Лемма выводится из следующего утверждения: при любом вещественном числе $h>0$ и подходяще выбранном числе r цилиндр

$$T : \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} \,\middle|\, (x,x) - h^{-2}(x,H)^2 \leqslant r^2, \ (x,H)^2 \leqslant h^4 \right\},$$

где $H=(h,0,\ldots,0)$, содержит фундаментульную область $(m-1)$ - мерной решетки

$$\left\{ \log \frac{|\omega_1|^2}{|\omega_2|^2}, \log\left(|\omega_1|^2 |\omega_2|^2\right), \log|\omega_3|^2, \ldots, \log|\omega_{m-1}|^2 \,\middle|\, \omega \in G \right\}.$$

Подробное доказательство теоремы будет опубликовано.

Литература

1. Б о р е в и ч З.И., Ш а ф а р е в и ч И.Р. Теория чисел, М., 1985. 503 с.
2. С к у б е н к о Б.Ф. О произведении n линейных форм от n переменных. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1981, т.158, с.175-179.
3. C a s s e l s J.W.S., S w i n n e r t o n - D y e r H.P.F. On the product of three homogeneous linear form and indefinite ternary quadratic forms. - Phil.Trans.Roy.Soc.London (A), 1955, v.248, p.73-96.