I. V. Videnskii, N. A. Shirokov, On an extremal problem in the Wiener algebra,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 6, 122–138

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 6

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В АЛГЕБРЕ ВИНЕРА

© И. В. Виденский, Н. А. Широков

Для аналитических пространств Бесова $B_{p,q}^{1/p}$ и алгебры Винера l_a^1, абсолютно сходящихся в единичном круге рядов Тейлора, изучается асимптотика последовательностей

$$r_n(X) = \sup\{\inf\{\|f\|_X : f \in X, f = B_E G, G(0) = 1\} : \#E = n, E \subset \mathbb{D}\},$$
$$s_n(X) = \sup\{\|B_E\|_X : \#E = n\},$$
$$t_n(X) = \inf\{\|B_E\|_X : \#E = n\},$$

где $X = B_{p,q}^{1/p}$ или $X = l_a^1$, B_E — произведение Бляшке с нулями в конечном подмножестве E единичного круга $\mathbb{D}$. Интерес к асимптотике величин $r_n(l_a^1)$ возник в связи с задачей об оценках норм присоединенных матриц (см. [1–3]), где и было установлено, что $r_n(l_a^1) \asymp \sqrt{n}$. Результаты настоящей работы позволяют ответить на два оставшихся вопроса . Произведения Бляшке не дают правильной асимптотики величин $r_n(l_a^1)$, а именно существует последовательность произведений Бляшке с n нулями B_n, для которой $\|B_n\|_{l_a^1} \asymp n$. С другой стороны, для любого подмножества E единичного круга, состоящего из n точек, строится экстремальная функция g_E, для которой $g_E(0) = 1$, $\|B_E g_E\|_{l_a^1} \leq c\sqrt{n}$, что дает новое конструктивное доказательство оценки $r_n(l_a^1)$ сверху.

Введение

Пусть X — некоторое банахово пространство аналитических в открытом единичном круге $\mathbb{D}$ функций, E — конечное подмножество круга, B_E — произведение Бляшке с нулями в E. Проблема описания множеств нулей функций из X тесно связана с оценками величины

$$\varphi(E, X) = \inf\{\|f\|_X : f \in X, f = B_E G, G(0) = 1\}.$$

Для натурального числа n определим

$$r_n(X) = \sup\{\varphi(E, X) : \#E = n\},$$

$$s_n(X) = \sup\{\|B_E\|_X : \#E = n\},$$

Ключевые слова: аналитические функции, классы Гёльдера и Бесова, произведения Бляшке, асимптотика.

$$t_n(X) = \inf\{\|B_E\|_X : \#E = n\}.$$

Пусть l_a^1 — алгебра Винера абсолютно сходящихся в единичном круге рядов Тейлора, снабженная полунормой

$$\|f\|_{l_a^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Задача об асимптотическом поведении последовательности $r_n(l_a^1)$ возникла в связи с одним вопросом геометрии банаховых пространств, который мы сейчас кратко опишем. Пусть

$$k_n = \sup\{|\det T|\|T^{-1}\| : \|T\| \le 1\},$$

где верхняя грань берется по всем обратимым матрицам порядка n и всем возможным нормам. По предложению Ван дер Вардена, Шэффер [1] изучал асимптотику величин k_n, он доказал, что $k_n \le c\sqrt{n}$, и предположил, что k_n — ограниченная последовательность. В работе Глускина, Мейера, Пажора [2] получены аналитическая переформулировка задачи ($k_n = r_n(l_a^1)$) и оценка снизу $k_n \ge c\sqrt{n}(\log(\log n)\sqrt{\log n})^{-1}$, улучшенные затем Бургейном [2] : $k_n \ge c\sqrt{n}(\sqrt{\log n})^{-1}$ и Кеффелеком [3] : $k_n \ge c\sqrt{n}$. Хотя и была доказана эквивалентность $r_n(l_a^1) \asymp \sqrt{n}$ (для последовательностей α_n, β_n будем писать $\alpha_n \asymp \beta_n$, если $0 < \inf \alpha_n/\beta_n \le \sup \alpha_n/\beta_n < \infty$), два аналитических вопроса оставались открытыми. Дают ли нормы произведений Бляшке правильный порядок роста величин r_n, т.е. верно ли, что $r_n(l_a^1) \asymp s_n(l_a^1)$? (В пользу гипотезы $s_n(l_a^1) \asymp \sqrt{n}$ говорил и тот факт, что для степеней конечного произведения Бляшке B справедлива эквивалентность $\|B^n\|_{l_a^1} \asymp \sqrt{n}$, [4]). Если нет, то нормы каких функций дают правильный порядок роста величин r_n? Одна из целей настоящей работы — ответить на оба эти вопроса. Для аналитических пространств Бесова $B^s_{p,q}$ (определение см. ниже) мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Для* $1 \le p, q \le \infty$ *имеют место эквивалентности*

$$r_n(B^s_{p,q}) \asymp n^s \quad \textit{при } s > 0;$$
$$s_n(B^{1/p}_{p,q}) \asymp n^{1/\min(p,q)};$$
$$t_n(B^{1/p}_{p,q}) \asymp n^{1/\max(p,q)},$$

где константы в отношениях эквивалентности зависят лишь от p, q, s.

В случае $p = q$ эквивалентность $s_n(B^{1/p}_{p,p}) \asymp t_n(B^{1/p}_{p,p}) \asymp n^{1/p}$ доказана в [5]. Из теоремы 1 следует, что последовательности r_n и s_n имеют одинаковую асимптотику для пространств $B^{1/p}_{p,q}$ лишь в случае $p \le q$. Используя хорошо известные вложения

$$B^{1/2}_{2,1} \subset l_a^1 \subset B^0_{\infty,1}$$

и теорему 1, получаем для алгебры Винера соотношение $s_n(l_a^1) \asymp n$, т.е. существует последовательность произведений Бляшке B_n с n нулями, для которых

$\|B_n\|_{l^1_a} \asymp n$. В доказательстве теоремы 1 для любого множества E, $\#E = n$, строится функция g_E, для которой $g_E(0) = 1$, $\|B_E g_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le cn^{1/p}$, поэтому теорема 1 дает новое конструктивное доказательство неравенства $r_n(l^1_a) \le c\sqrt{n}$.

В §1 работы приводятся необходимые предварительные сведения. В §2 мы оцениваем нормы конечных произведений Бляшке. Самым существенным здесь является оценка $s_n(B^{1/p}_{p,q})$ снизу. Для этого используется идея из работы Ньюмена и Шапиро [6] — рассмотреть множество E, для которого последовательность $(1-|\lambda|)_{\lambda\in E}$ стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, и соображения двойственности, как и в [5]. §3 посвящен построению экстремальных функций g_E для пространств Гёльдера Λ^α, при этом существенно используются описание модулей внешних функций из Λ^α и условия, при которых возможны деление и умножение на произведения Бляшке в Λ^α, полученные в [7]. Из интерполяционных соображений получаются оценки величин $r_n(B^{1/p}_{p,q})$.

Мы благодарны Е. Глускину за то, что он привлек наше внимание к оставшимся открытыми двум аналитическим вопросам из статьи [2], а также Г. Шапиро за указание на статью [4]. Большую часть результатов, изложенных в §2, первый автор получил, находясь в институте им. Вейцмана в Израиле, и искренне благодарен за предоставленные ему прекрасные условия работы. Первый автор частично поддержан грантом РФФИ № 96-01-00693.

§1. Предварительные сведения и обозначения

В работе используются следующие обозначения:

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость;

$\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг;

$\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность;

$b_\lambda(z) = \frac{\bar\lambda}{|\lambda|}\frac{\lambda - z}{1-\bar\lambda z}$, $B_E(z) = \prod_{\lambda\in E} b_\lambda(z)$ — произведение Бляшке с нулями в множестве E ($E\subset\mathbb{D}$), удовлетворяющем условию Бляшке $\sum_{\lambda\in E}(1-|\lambda|) < \infty$;

H^p, $1\le p\le\infty$ — пространства Харди аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} \|f(r\zeta)\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty;$$

для функции $f(e^{i\theta})$, $\zeta = e^{i\theta}$, определенной на $\mathbb{T}$, положим

$$\frac{df(\zeta)}{d\zeta} = -ie^{-i\theta}\frac{df(e^{i\theta})}{d\theta};$$

для натурального ν, $\alpha = \nu+\sigma$, $0<\sigma<1$, определим

$\mathcal{H}^\nu$, $\mathcal{H}^\alpha$ — пространства Гёльдера комплекснозначных на $\mathbb{T}$ функций, для которых конечны полунормы

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\nu} = \left\|\frac{d^\nu f(\zeta)}{d\zeta^\nu}\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} < \infty;$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}^\alpha} = \sup_{\zeta_1,\zeta_2\in\mathbb{T},\zeta_1\ne\zeta_2} \frac{\left|\frac{d^\nu f(\zeta_1)}{d\zeta^\nu} - \frac{d^\nu f(\zeta_2)}{d\zeta^\nu}\right|}{|\zeta_1-\zeta_2|^\sigma} < \infty;$$

Λ^ν, Λ^α — пространства аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых конечны полунормы

$$\|f\|_{\Lambda^\nu} = \|f^{(\nu)}\|_{H^\infty};$$
$$\|f\|_{\Lambda^\alpha} = \sup_{z,\zeta\in\mathbb{D},z\neq\zeta} \frac{|f^{(\nu)}(z) - f^{(\nu)}(\zeta)|}{|z-\zeta|^\sigma} < \infty;$$

$B^s_{p,q}$, $-\infty < s < +\infty$, $1 \le p,q \le +\infty$, — пространства Бесова аналитических в $\mathbb{D}$ функций, для которых конечны полунормы

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left\|(1-r)^{n-s-1/q}\|f^{(n)}(r\zeta)\|_{L^p(\mathbb{T})}\right\|_{L^q(0,1)} < \infty,$$

где $n > s$, n — натуральное.

Отметим, что $\Lambda^\alpha = B^\alpha_{\infty,\infty}$. Необходимые сведения об интерполяции пространств Бесова содержатся в [8, 11].

Приведем результаты (теоремы A, B, C), касающиеся свойств факторизации Неванлинны в классах Λ^α. В случае, когда α — нецелое, теорема A содержится в [7, гл. 2, §1]; в теореме B для натурального $n = \alpha$ доказательство проводится аналогично доказательству теоремы A для нецелого α. Теорема C доказана в гл.1 из [7]. Далее, для комплекснозначной функции $g(\zeta)$, определенной на $\mathbb{D}$, для которой справедливо

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |\log|g(\zeta)||\,|d\zeta| < \infty, \tag{1.1}$$

определим внешнюю функцию

$$g_e(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \log|g(\zeta)|\frac{\zeta+z}{\zeta-z}|d\zeta|\right), \quad z\in\mathbb{D}.$$

Для функции $\varphi \in C(\mathbb{T})$ определим величину $M_\varphi(\zeta)$:

$$M_\varphi(0) = \max_{\zeta\in\mathbb{T}}|\varphi(\zeta)|, \quad M_\varphi(z) = \max_{|\zeta-\frac{z}{|z|}|\le 2(1-|z|)}|\varphi(\zeta)|, \ \ z\neq 0, \ \ z\in\mathbb{D}.$$

Теорема A. *Пусть комплекснозначная функция g принадлежит пространству $\mathcal{H}^\alpha$, $\alpha > 0$, α — нецелое, и пусть g удовлетворяет условию* (1.1). *Предположим, что существует постоянная $A > 0$, не зависящая от z, такая, что для всякого $z\in\mathbb{D}$, для которого выполняется условие $M_g(z) \ge (1-|z|)^\alpha$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\log\left|\frac{g(\zeta)}{M_g(z)}\right|\right| \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}|d\zeta| \le A. \tag{1.2}$$

Тогда $g\in\Lambda^\alpha$ и существует постоянная c_1, зависящая только от A и α, такая, что

$$\|g_e\|_{\Lambda^\alpha} \le c_1\|g\|_{\mathcal{H}^\alpha}. \tag{1.3}$$

Для натурального $\alpha = n$ модификация теоремы A выглядит так.

Теорема B. *Пусть комплекснозначная функция g принадлежит пространству $\mathcal{H}^n$, $n \geq 1$, и пусть g удовлетворяет условию (1.1). Предположим, что для любых $z \in \mathbb{D}$, для которых $M_g(z) \geq (1-|z|)^n$, с некоторой постоянной A, не зависящей от z, выполнено неравенство (1.2). Предположим также, что существует постоянная B, не зависящая от z, τ ,σ, такая, что для всякой точки $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, для которой $M_g(z) > (1-|z|)^n$, и любых τ и σ, удовлетворяющих условию*

$$M_g^{1/n}(z) \geq \tau > \sigma \geq 1 - |z|, \tag{1.4}$$

имеется следующая равномерная оценка:

$$\left| \int\limits_{\mathbb{T}\cap\{\zeta:\ \sigma\leq|\zeta-z_0|\leq\tau\}} \frac{g^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq B, \quad z_0 = \frac{z}{|z|}. \tag{1.5}$$

В таком случае $g_e \in \Lambda^n$ и существует постоянная c_2, зависящая только от n, A, B, такая, что

$$\|g_e\|_{\Lambda^n} \leq c_2 \|g\|_{\mathcal{H}^n}. \tag{1.6}$$

Теперь приведем достаточный признак возможности умножения на произведение Бляшке. Пусть B — произведение Бляшке с множеством нулей E, $\delta_B(\zeta) = \min(\operatorname{dist}(\zeta, E), 1/|B'(\zeta)|)$, если $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \overline{E}$, и $\delta_B(\zeta) = 0$, если $\zeta \in \mathbb{T} \cap \overline{E}$.

Теорема C. *Пусть $f \in \Lambda^\alpha$, $\alpha > 0$, α — любое, B — некоторое произведение Бляшке. Предположим, что с некоторой постоянной c_0 справедлива оценка*

$$|f(\zeta)| \leq c_0 \delta_B^\alpha(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{1.7}$$

Тогда $fB \in \Lambda^\alpha$ и существует постоянная c_3, зависящая только от c_0 и α, такая, что

$$\|fB\|_{\Lambda^\alpha} \leq c_3 \|f\|_{\Lambda^\alpha}. \tag{1.8}$$

§2. Оценки норм произведений Бляшке

В этом параграфе для произведений Бляшке с n нулями будут получены неулучшаемые по порядку n оценки сверху и снизу норм в аналитических пространствах Бесова. Будет предъявлена последовательность B_n произведений Бляшке с n нулями, для которой $\|B_n\|_{l^1_a} \asymp n$.

Теорема 2.1. *Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда*

$$s_n(B_{p,q}^{1/p}) \asymp n^{1/\min(p,q)}, \quad t_n(B_{p,q}^{1/p}) \asymp n^{1/\max(p,q)}$$

и константы в отношениях эквивалентности зависят только от p и q.

Доказательство начнем с оценки величин s_n сверху.

Лемма 2.1. *Пусть* $E \subset \mathbb{D}$, $\#E = n$, $1 \le p, q \le \infty$, *тогда* $\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le cn^{1/\min(p,q)}$.

Доказательство. Воспользуемся результатом статьи [5], где доказано, что

$$\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,p}} \asymp n^{1/p}. \tag{2.1}$$

Главным здесь является оценка сверху при $p = 1$, так как при $p = \infty$ неравенство очевидно, а результат для остальных p следует из интерполяционных соображений.

(a) Пусть $q < p$. Тогда $B^{1/q}_{q,q} \subset B^{1/q}_{p,q}$ [8] и, следовательно,

$$\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le c_1 \|B_E\|_{B^{1/q}_{q,q}} \le c_2 n^{1/q}.$$

(b) Пусть $p < q$. Тогда $B^{1/p}_{p,p} \subset B^{1/p}_{p,q}$ [8] и, следовательно,

$$\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le c_3 \|B_E\|_{B^{1/p}_{p,p}} \le c_4 n^{1/p},$$

и лемма доказана.

Для дальнейшего нам потребуется несколько определений.

Борлевскую меру μ в единичном круге $\mathbb{D}$ назовем мерой Ньюмена, если конечна величина

$$\|\mu\|_N = \sup_{0<r<1} \frac{\mu\{(1-r) \le |z| < 1\}}{r}.$$

Говорят, что последовательность точек единичного круга $E = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию Ньюмена, если

$$\sup_k \frac{1 - |z_{k+1}|}{1 - |z_k|} < 1. \tag{N}$$

С каждым дискретным подмножеством единичного круга E свяжем меру $\mu_E = \sum_{z\in E}(1 - |z|)\delta_z$, где δ_z — единичная нагрузка в точке z. Говорят, что множество E удовлетворяет слабому условию Ньюмена, если

$$\|\mu_E\|_N < \infty. \tag{wN}$$

Известно [9], что множество E удовлетворяет слабому условию Ньюмена (wN) тогда и только тогда, когда оно представляется как конечное объединение множеств, удовлетворяющих условию Ньюмена (N).

Следующая лемма является уточнением леммы Виноградова [9].

Лемма 2.2. *Пусть* μ *— мера Ньюмена,* $\alpha > 1$, $0 < r < 1$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu}{(1 - r|z|)^{\alpha}} \le c_\alpha \|\mu\|_N (1 - r)^{1-\alpha}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Так как $1 - r < 1 - r|z|$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{d\mu}{(1-r|z|)^{\alpha}} = \int\limits_0^{(1-r)^{-\alpha}} \mu\{(1-r|z|)^{-\alpha} > t\}dt$$
$$= \int\limits_0^{(1-r)^{-\alpha}} \mu\Big\{|z| > \frac{1}{r}(1-t^{-1/\alpha})\Big\}dt$$
$$\le \|\mu\|_N \int\limits_0^{(1-r)^{-\alpha}} \Big(1 - \frac{1}{r}(1-t^{-1/\alpha})\Big)dt = \|\mu\|_N \frac{(1-r)^{1-\alpha}}{(\alpha-1)r}$$
$$\le c_\alpha \|\mu\|_N (1-r)^{1-\alpha}$$

при $r > 1/2$; если же $r < 1/2$, то (2.2) выполнено тем более.

Следующая лемма является уточнением леммы Вербицкого [10], впрочем, доказательство мало отличается от рассуждений в [10].

Лемма 2.3. *Пусть E удовлетворяет условию* (wN), *тогда* $\|B_E\|_{B^1_{1,\infty}} \le c\|\mu_E\|^2_N$, *где c — абсолютная постоянная.*

Доказательство. Напомним, что

$$\|B_E\|_{B^1_{1,\infty}} = \sup_{0<r<1} (1-r) \int\limits_{\mathbb{T}} |B_E''(r\zeta)||d\zeta|.$$

Обозначим $B = B_E$ и оценим B'':

$$B'' = \sum_{\lambda\in E} b_\lambda'' B_{E\setminus\lambda} + 2\sum_{\lambda\ne\mu} b_\lambda' b_\mu' B_{E\setminus\{\lambda,\mu\}},$$

следовательно,

$$|B''(z)| \le 2\sum_{\lambda\in E} \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar\lambda z|^3} + \Big(\sum_{\lambda\in E} \frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar\lambda z|^2}\Big)^2$$
$$= 2\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{|1-\bar\lambda z|^3} + \Big(\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{|1-\bar\lambda z|}\Big)^2. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |B''(r\zeta)||d\zeta| = 2\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{|1-\bar\lambda r\zeta|^3}\Big)|d\zeta| + \int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\int\limits_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{|1-\bar\lambda r\zeta|^2}\Big)^2|d\zeta|. \tag{2.4}$$

Применим ко второму интегралу неравенство Минковского и воспользуемся тем, что при $\beta > 1$

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|d\zeta|}{|1-\bar\lambda r\zeta|^\beta} \le c_\beta \frac{1}{(1-|\lambda|r)^{\beta-1}}. \tag{2.5}$$

Продолжая (2.4), получим

$$\int_{\mathbb{T}} |B''(r\zeta)||d\zeta| \le c\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{(1-|\lambda|r)^2} + \left(\int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{|d\zeta|}{|1-\lambda r\zeta|^4}\right)^{1/2} d\mu_E\right)^2\right)$$
$$\le c\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{(1-|\lambda|r)^2} + \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{d\mu_E}{(1-|\lambda|r)^{3/2}}\right)^2\right). \tag{2.6}$$

Воспользуемся леммой 2.2 с $\alpha = 2$ и $\alpha = 3/2$, получим

$$\int_{\mathbb{T}} |B''(r\zeta)||d\zeta| \le c\left(\frac{\|\mu_E\|_N}{1-r} + \left(\frac{\|\mu_E\|_N}{\sqrt{1-r}}\right)^2\right) = c\frac{\|\mu_E\|_N^2}{1-r},$$

следовательно, $\|B\|_{B^1_{1,\infty}} \le c\|\mu_E\|_N^2$.

Теперь мы можем оценить сверху величины t_n.

Лемма 2.4. *Существуют множества E, F, $\#E = n$, $\#F = n$, такие, что $\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le cn^{1/p}$, $\|B_F\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le c_1 n^{1/q}$, где c и c_1 зависят лишь от p и q.*

Доказательство. (a) Возьмем какую-нибудь последовательность $G = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (wN), например, $z_k = 1 - 2^{-k}$. Пусть $E = \{z_k\}_{k=1}^{n}$, тогда $\|\mu_E\|_N < \|\mu_G\|_N < \infty$. Из леммы 2.3 следует, что $\|B_E\|_{B^1_{1,\infty}} \le c$, с другой стороны, из (2.1) получаем оценку $\|B_E\|_{B^1_{1,1}} \le cn$. Из результатов об интерполяции пространств Бесова [8] имеем

$$(B^1_{1,\infty}, B^1_{1,1})_{1/q,q} = B^1_{1,q}, \quad B^1_{1,q} \subset B^{1/p}_{p,q} \text{ при } 1 \le p,$$

поэтому

$$\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le c(p,q)\|B_E\|_{B^1_{1,q}} \le c_1(p,q)n^{1/q}c^{1-1/q} = c_2(p,q)n^{1/q}.$$

(b) Положим $F = \{\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0\}$. Тогда $B_F = z^n$,

$$\|z^n\|_{B^{1/p}_{p,q}} \le c\|z^n\|_{B^{1/p}_{p,1}} = c\int_0^1 n\frac{r^{n-1}}{(1-r)^{1/p}}dr$$
$$= cn\mathcal{B}(n, 1-1/p) \asymp cn \cdot n^{(1/p-1)} = cn^{1/p},$$

где $\mathcal{B}$ — бета-функция Эйлера.

Для завершения доказательства теоремы 2.1 осталось оценить последовательности r_n и s_n снизу. Воспользуемся для этого соображениями двойственности, как и в [5]. Известно [11], что $(B^s_{p,q})^* = B^{-s}_{p,q}$, где $1/p+1/p' = 1/q+1/q' = 1$, и двойственность задается формулой $(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}$, где f — многочлен, $g \in B^{-s}_{p',q'}$, а $\widehat{f}(k)$, $\widehat{g}(k)$ — коэффициенты Тейлора функций f и g. Нам будет удобнее задать двойственность формулой

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} k\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)},$$

тогда $(B^s_{p,q})^* = B^{1-s}_{p',q'}$, и для любой функции f, аналитической в $\overline{\mathbb{D}}$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_{B^0_{11}} \le c\|f\|_{B^s_{p,q}}\|f\|_{B^{1-s}_{p',q'}}. \tag{2.7}$$

Применим (2.7) к произведению Бляшке B_E, $\#E = n$, тогда $\|B_E\|_{B^0_{11}} = n$, поэтому при $s = 1/p$ имеем

$$n \le c\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}}\|B_E\|_{B^{1/p'}_{p',q'}}. \tag{2.8}$$

По лемме 2.1 $\|B_E\|_{B^{1/p'}_{p',q'}} \le cn^{1/\min(p',q')}$, тогда из (2.8)

$$\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \ge cn^{1-1/\min(p',q')} = cn^{1/\max(p,q)}, \tag{2.9}$$

и требуемая оценка снизу для $t_n(B^{1/p}_{p,q})$ получена.

По лемме 2.4 существует множество E, $\#E = n$, для которого $\|B_E\|_{B^{1/p'}_{p',q'}} \le cn^{1/\max(p',q')}$. Снова воспользуемся (2.8) и получим

$$\|B_E\|_{B^{1/p}_{p,q}} \ge cn^{1-1/\max(p',q')} = cn^{1/\min(p,q)}, \tag{2.10}$$

а это и есть требуемая оценка снизу для $s_n(B^{1/p}_{p,q})$. Константы в (2.8)–(2.10) зависят только от p и q, и доказательство теоремы 2.1 закончено.

Следствие 2.1. *Пусть последовательность* $E = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет слабому условию Ньюмена* (wN), $E_n = \{z_k\}_1^n$, $B_n = B_{E_n}$, *тогда*

$$\|B_n\|_{B^{1/p}_{p,1}} \asymp n, \quad 1 \le p \le \infty; \quad \|B_n\|_{l^1_a} \asymp n.$$

Доказательство. Из вложения $B^1_{1,1} \subset B^{1/p}_{p,1}$ и оценки (2.1) $\|B_n\|_{B^1_{1,1}} \le cn$ следует неравенство $\|B_n\|_{B^{1/p}_{1,1}} \le cn$. Оценка сверху для $\|B_n\|_{l^1_a}$ следует из вложения $B^{1/2}_{2,1} \subset l^1_a$ или из классического неравенства Харди $\|B_n\|_{l^1_a} \le c\|B'_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = cn$.

В лемме 2.4 доказано, что $\|B_n\|_{B^1_{1,\infty}} \le c$, где c не зависит от n. Тогда из (2.8) следует оценка $\|B_n\|_{B^0_{\infty,1}} \ge cn$. Так как $B^{1/p}_{p,1} \subset B^0_{\infty,1}$, $l^1_a \subset B^0_{\infty,1}$, то $\|B_n\|_{B^{1/p}_{p,1}} \ge cn$, $\|B_n\|_{l^1_a} \ge cn$.

Замечание 2.1. Результат Вербицкого [10] о том, что слабое условие Ньюмена для E эквивалентно тому, что $B_E \in B^1_{1,\infty}$, делает правдоподобной гипотезу об обратимости следствия 2.1, т.е. если для некоторого p выполнено $\|B_n\|_{B^{1/p}_{p,1}} \ge cn$ или $\|B_n\|_{l^1_a} \ge cn$ с независящей от n константой, то E удовлетворяет условию (wN).

Замечание 2.2. Авторам неизвестна асимптотика величин $s_n(B^s_{p,q})$ и $t_n(B^s_{p,q})$ для произвольного s.

§3. Построение экстремальной функции и асимптотика последовательности r_n

В этом параграфе для пространств Λ^α мы оценим асимптотику последовательности $r_n(\Lambda^\alpha)$ и затем, используя интерполяционные соображения, распространим наш результат на пространства $B^s_{p,q}$. Основным будет оценка величин $r_n(\Lambda^\alpha)$ сверху. В качестве следствия для любого множества E, $\#E = n$, мы построим экстремальную функцию $F(z)$ такую, что $\|FB_E\|_{l^1_a} \le c\sqrt{n}$, $F(0) = 1$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha > 0$. *Тогда* $r_n(\Lambda^\alpha) \asymp n^\alpha$, *где константы в отношении эквивалентности зависят только от* α.

Доказательство. Сначала оценим величины $r_n(\Lambda^\alpha)$ сверху. Для этого для произвольного E, $\#E = n$, построим внешнюю функцию $F(z)$ такую, что

$$|F(0)| \ge 1, \quad f(z) = B_E(z)F(z), \quad f(z) \in \Lambda^\alpha, \quad \|f\|_{\Lambda^\alpha} \le cn^\alpha, \quad \|f\|_{H^\infty} \le c,$$

где c зависит лишь от α. Будет удобнее строить $F(z)$ для множества E, обладающего некоторыми дополнительными свойствами, поэтому начнем с редукции. Пусть

$$E \subset \mathbb{D}, \quad \#E = n, \quad E_0 = \{e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}(1-1/n)\}_{\nu=0}^{n-1}, \quad E_1 = E \cup E_0.$$

Предположим, что найдена внешняя в $\mathbb{D}$ функция F такая, что $|F(0)| \ge c_0 n^{-\alpha}$, и для функции $f_1 = B_1 F$, где $B_1 = B_{E_1}$, выполнена оценка $\|f_1\|_{\Lambda^\alpha} \le 1$. Определим функции $B = B_E$, $B_0 = B_{E_0}$, $f = BF$. Тогда $f = f_1/B_0$, и из результатов, изложенных в [12] или в [7, гл.1], следует, что $\|f\|_{\Lambda^\alpha} \le c_\alpha \|f_1\|_{\Lambda^\alpha} \le c_\alpha$, и тем самым внешняя функция $F_0 = (1/c_\alpha)F$ удовлетворяет соотношениям $|F_0(0)| \ge (c_0/c_\alpha)n^{-\alpha}$, $\|F_0 B\|_{\Lambda^\alpha} \le 1$, что и требуется в теореме. Далее, пусть $R = 1 + 1/n, B_{R,1}(z) = \prod_{\alpha\in E_1} R(z-\alpha)/(R^2 - z\bar\alpha)$. Предположим, что найдена внешняя в круге $\{|z| < R\} = R\mathbb{D}$ функция F_1 со свойствами

$$|F_1(0)| \ge c_1 n^{-\alpha}, \quad \|f_{R,1}\|_{\Lambda^\alpha(R\mathbb{D})} \le 1, \tag{3.1}$$

где $f_{R,1} = B_{R,1}F_1$. В круге $\mathbb{D}$ имеем соотношение $\|f_{R,1}\|_{\Lambda^\alpha} \le 1$, $f_{R,1} = B_1(B_{R,1}/B_1)F_1 = B_1 F$. При этом функция $F = (B_{R,1}/B_1)F_1$ — внешняя в $\mathbb{D}$. Заметим, что $|F(0)| = (1/R^n)|F_1(0)| \ge (c_1/e)n^{-\alpha}$. Итак, для построения требуемой в теореме внешней в $\mathbb{D}$ функции достаточно рассмотреть функции, внешние в большем круге $R\mathbb{D}$, удовлетворяющие свойствам (3.1). Теперь, продолжая редукцию, положим $E_2 = (1/R)E_1$, $f_0(z) = f_{R,1}(Rz)$, $F_0 = f_0/B_{E_2}$. Множество E_2 удовлетворяет условиям

$$E_2 \subset \frac{1}{R}\mathbb{D}, \quad \#E_2 = 2n, \quad \frac{1}{R}(1-1/n)e^{\frac{2\pi i\nu}{n}} \in E_2, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \tag{3.2}$$

Для внешней в $\mathbb{D}$ функции F_0 выполнено

$$|F_0(0)| = \frac{|f_0(0)|}{|B_{E_2}(0)|} = \frac{|f_{R,1}(0)|}{|B_{R,1}(0)|} = |F_1(0)| \ge c_1 n^{-\alpha} \tag{3.3}$$

и

$$\|f_0\|_{\Lambda^\alpha} = R^\alpha \|f_{R,1}\|_{\Lambda^\alpha(R\mathbb{D})} \le R^\alpha. \tag{3.4}$$

Поскольку $f_{R,1}(z) = f_0(z/R)$, для построения внешней в $R\mathbb{D}$ функции со свойствами (3.1) достаточно построить внешнюю в $\mathbb{D}$ функцию со свойствами (3.3) и (3.4), причем в оценке (3.4) допустимо присутствие какой-то постоянной, не зависящей от n, это, как понятно, не умаляет общности.

Построим для множества E экстремальную функцию. После редукции мы можем предполагать, что E (а не E_2) удовлетворяет условиям (3.2). Положим

$$B = B_E, \quad \alpha > 0, \quad g(\zeta) = \frac{1}{|B'(\zeta)|^\alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad F(z) = g_e(z), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.5}$$

Дальнейшее доказательство теоремы состоит из серии лемм, в которых для функции $F(z)$ будут проверены условия (3.3), (3.4).

Лемма 3.1. *Для внешней функции $F(z)$ справедливо неравенство $F(0) \geq cn^\alpha$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{|F(0)|} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log(|B'(\zeta)|^\alpha)|d\zeta| = \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log |B'(\zeta)||d\zeta| \\ &\leq \alpha \log\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |B'(\zeta)||d\zeta|\right) = \alpha \log\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)}\right| |d\zeta|\right) \\ &= \alpha \log\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{\beta \in E} \frac{1 - |\beta|^2}{|\zeta - \beta|^2} |d\zeta|\right) = \alpha \log(2n),\end{aligned}$$

т.е.

$$|F(0)| \geq \frac{1}{2^\alpha n^\alpha}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.2. *Функцию $g(\zeta)$ можно аналитически продолжить в кольцо $0 < ||\zeta| - 1| \leq 1/8n$, и существуют постоянные c_1, c_2, зависящие только от α, такие, что если $\zeta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\zeta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $|r_j - 1| \leq 1/8n$, $j = 1, 2$, $|\theta_1 - \theta_2| \leq 2\pi/n$, то*

$$c_1 |g(\zeta_1)| \leq |g(\zeta_2)| \leq c_2 |g(\zeta_1)|. \tag{3.7}$$

Доказательство. Прежде всего, если $\zeta \in \mathbb{T}$, то $g(\zeta)$ можно переписать в виде

$$g(\zeta) = \left(\sum_{\beta \in E} \frac{1 - |\beta|^2}{|1 - \zeta\bar{\beta}|^2}\right)^{-\alpha} = \left(\sum_{\beta \in E} \frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)}\right)^{-\alpha}. \tag{3.8}$$

Формула (3.8) позволяет распространить функцию $g(\zeta)$ как аналитическую функцию от ζ на некоторую окрестность окружности $\mathbb{T}$. Именно если $0 < ||\zeta| - 1| \leq 1/8n$, $\beta \in E$, $\zeta_0 = \zeta/|\zeta|$, то можно написать

$$\begin{aligned}\arg \frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)} &= \arg \left[\frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)} \Big/ \frac{\zeta_0(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta_0\bar{\beta})(\zeta_0 - \beta)}\right] \\ &= \arg \frac{1 - \zeta_0\bar{\beta}}{1 - \zeta\bar{\beta}} + \arg \frac{\zeta_0 - \beta}{\zeta - \beta} \\ &= -\arg\left(1 + \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0 - 1/\bar{\beta}}\right) - \arg\left(1 + \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0 - \beta}\right),\end{aligned}$$

$$\left|\arg \frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)}\right| \leq 2 \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \frac{1}{8}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{8}} \leq 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < \frac{\pi}{4}. \tag{3.9}$$

Учтем теперь, что если для комплексных чисел $z_k = x_k + y_k$, $k = 1, \dots, m$, $z_k \neq 0$, справедливо условие $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $|\varphi_k| < \pi/4$, $k = 1, \dots, m$, то для $Z = \sum_{k=1}^m z_k = X + iY = Re^{i\varphi}$ тоже выполняется

$$|\varphi| = \operatorname{arctg} \frac{|Y|}{X} \leq \operatorname{arctg} \frac{\sum |y_k|}{\sum x_k} < \operatorname{arctg} \frac{\sum r_k \sin \frac{\pi}{4}}{\sum r_k \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

(что, впрочем, следует и из выпуклости угла $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/4\}$), и поэтому (3.9) дает, что функция $\psi(\zeta) = \sum_{\beta \in E} \frac{\zeta(1-|\beta|^2)}{(1-\zeta\bar{\beta})(\zeta-\beta)}$ определена в кольце $\{\zeta : ||\zeta| - 1| \leq 1/8n\}$ и для нее выполнено условие $|\arg \psi(\zeta)| < \pi/4$ в этом кольце, поэтому функция $g(\zeta) = (\psi(\zeta))^{-\alpha}$ аналитична в том же кольце. Заметим, что с некоторыми абсолютными постоянными c_3, c_4 при $\zeta \in \{\zeta : ||\zeta| - 1| \leq 1/8n\}, \zeta_0 = \zeta/|\zeta|$ в силу включения $E \subset (1/R)\mathbb{D}$ имеем

$$c_3 \sum_{\beta \in E} \frac{1 - |\beta|^2}{|1 - \zeta_0 \bar{\beta}|^2} \leq \sum_{\beta \in E} \left| \frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)} \right| \leq c_4 \sum_{\beta \in E} \frac{1 - |\beta|^2}{|1 - \zeta_0 \bar{\beta}|^2},$$

поэтому при тех же ζ и ζ_0 можно написать

$$|\psi(\zeta)| = \left| \sum_{\beta \in E} \frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)} \right| \leq c_4 \sum_{\beta \in E} \frac{1 - |\beta|^2}{|1 - \zeta_0 \bar{\beta}|^2} = c_4 \psi(\zeta_0), \tag{3.10}$$

$$|\psi(\zeta)| \geq \operatorname{Re} \psi(\zeta) = \sum_{\beta \in E} \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)} \right) > \sum_{\beta \in E} \left| \frac{\zeta(1 - |\beta|^2)}{(1 - \zeta\bar{\beta})(\zeta - \beta)} \right| \cos \frac{\pi}{4}$$
$$\geq \frac{c_3}{\sqrt{2}} \sum_{\beta \in E} \frac{1 - |\beta|^2}{|1 - \zeta_0 \bar{\beta}|^2} = \frac{c_3}{\sqrt{2}} \psi(\zeta_0). \tag{3.11}$$

Поскольку $g = \psi^{-\alpha}$, (3.10) и (3.11) с некоторыми постоянными c_5 и c_6, зависящими от α, влекут оценку

$$c_5 g(\zeta_0) \leq |g(\zeta)| \leq c_6 g(\zeta_0). \tag{3.12}$$

Далее, если $\eta_1 = e^{i\theta_1}$, $\eta_2 = e^{i\theta_2}$, $\beta \in (1/R)\mathbb{D}$, $|\theta_1 - \theta_2| \leq 2\pi/n$, то с некоторыми абсолютными постоянными c_1', c_2' имеем

$$c_1' \frac{1}{|1 - \eta_1 \bar{\beta}|^2} \leq \frac{1}{|1 - \eta_2 \bar{\beta}|^2} \leq c_2' \frac{1}{|1 - \eta_1 \bar{\beta}|^2},$$

поэтому при тех же η_1, η_2

$$c_1' \psi(\eta_1) \leq \psi(\eta_2) \leq c_2' \psi(\eta_2). \tag{3.13}$$

Положим $\zeta_1 = r_1 \eta_1$, $\zeta_2 = r_2 \eta_2$, тогда (3.12) и (3.13) дают утверждение леммы.

Следствие 3.1. *Для $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, $\mu \in \mathbb{N}$ имеются постоянные d_μ, зависящие только от μ и α, такие, что*

$$|g^{(\mu)}(\zeta_0)| \le d_\mu n^\mu g(\zeta_0). \tag{3.14}$$

Для доказательства напишем формулу Коши и применим лемму 3.2:

$$\left|\frac{d^\mu g(\zeta_0)}{d\zeta^\mu}\right| = \left|\frac{\mu!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\zeta_0|=\frac{1}{8n}} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)^{\mu+1}} d\zeta\right| \le c_2 g(\zeta_0)\mu!(8n)^\mu = d_\mu g(\zeta_0) n^\mu.$$

Лемма 3.3. *Функция $g(\zeta)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}^\alpha$.*

Доказательство. Отметим, что если $\zeta_0 = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ и точка $e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \le k \le n-1$, — ближайшая из n таких точек к ζ_0, то по свойствам (3.2) множества E имеем $\beta_k = \frac{1}{R}(1-1/n)e^{\frac{2k\pi i}{n}} \in E$, поэтому с некоторой абсолютной постоянной c' имеем

$$\psi(\zeta_0) \ge \frac{1-|\beta_k|^2}{|1-\zeta_0\bar{\beta}_k|^2} \ge c'n, \tag{3.15}$$

следовательно, всегда справедливо неравенство

$$0 < g(\zeta_0) = (\psi(\zeta_0))^{-\alpha} \le (c')^{-\alpha} n^{-\alpha} = c_7 n^{-\alpha}, \tag{3.16}$$

и, соединяя (3.16) с (3.14), пишем

$$|g^{(\mu)}(\zeta_0)| \le c_7 d_\mu n^{\mu-\alpha}, \quad \mu = 1, 2, \dots \tag{3.17}$$

Если число $\alpha = \nu \ge 1$ целое, то (3.17) при $\mu = \nu$ дает $g \in \mathcal{H}^\nu$, $\|g\|_{\mathcal{H}^\nu} \le c_7 d_\nu$. Если же $0 \le \nu < \alpha < \nu+1$, $\alpha = \nu + \sigma$, то (3.16) при $\mu = \nu$ дает

$$|g^{(\nu)}(\zeta_0)| \le c_7 d_\nu n^{(\nu-\alpha)} = c_7 d_\nu n^{-\sigma},$$

поэтому если $\zeta_1 = e^{i\theta_1}, \zeta_2 = e^{i\theta_2}$ и $|\theta_2 - \theta_1| \ge 2\pi/n$, то

$$|g^{(\nu)}(\zeta_1) - g^{(\nu)}(\zeta_2)| \le |g^{(\nu)}(\zeta_1)| + |g^{(\nu)}(\zeta_2)| \le 2c_7 d_\nu n^{-\sigma} \le d_\alpha |\zeta_2 - \zeta_1|^\sigma. \tag{3.18}$$

Если же $|\theta_2 - \theta_1| \le 2\pi/n$, рассмотрим $m = (\psi(\zeta_1))^{-1}$, $g(\zeta_1) = m^\alpha$. В силу (3.15) $m \le (1/c')(1/n)$. Возможны два случая: (a) $|\theta_2 - \theta_1| > m$, (b) $|\theta_2 - \theta_1| \le \min(m, 2\pi/n)$. В случае (a) соотношения (3.7) и (3.14) дают

$$\begin{aligned} |g^{(\nu)}(\zeta_2) - g^{(\nu)}(\zeta_1)| &\le |g^{(\nu)}(\zeta_1)| + |g^{(\nu)}(\zeta_2)| \le d_\nu n^\nu (g(\zeta_1) + g(\zeta_2)) \\ &\le d_\nu (1+c_2) n^\nu g(\zeta_1) = c_\nu^* n^\nu m^\alpha = c_\nu^* (nm)^\nu m^\sigma \le c_\nu^* (1/c')^\nu m^\sigma \\ &\le c_\alpha^* |\zeta_2 - \zeta_1|^\sigma. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Пусть γ — дуга окружности, соединяющая точки ζ_1, ζ_2. В случае (b), когда $|\theta_2 - \theta_1| \le \min(m, 2\pi/n)$, применяя (3.14) с $\mu = \nu + 1$ и (3.7), имеем

$$\begin{aligned} |g^{(\nu)}(\zeta_2) - g^{(\nu)}(\zeta_1)| &= \left|\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} g^{(\nu+1)}(\zeta) d\zeta\right| \le \max_{\zeta \in \gamma} |g^{(\nu+1)}(\zeta)||\theta_2 - \theta_1| \\ &\le c_2 d_{\nu+1} n^{\nu+1} g(\zeta_1)|\theta_2 - \theta_1| = c_2 d_{\nu+1} n^{\nu+1} m^\alpha |\theta_2 - \theta_1| \\ &= c_2 d_{\nu+1} (nm)^{\nu+1} (|\theta_2 - \theta_1|/m)^{1-\sigma} |\theta_2 - \theta_1|^\sigma \\ &\le c_{\alpha,1} |\zeta_2 - \zeta_1|^\sigma. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Соотношения (3.18)—(3.20) показывают, что $g \in \mathcal{H}^\alpha$ и $\|g\|_{\mathcal{H}^\alpha} \le c(\alpha)$.

Лемма 3.4. *Функция $F(z)$ принадлежит пространству Λ^α.*

Доказательство. (a) Сначала рассмотрим случай $\alpha = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Проверим условие (1.5). Учитывая оценку (3.16), получим, что для любого $z \in \mathbb{D}$ справедлива оценка $M_g^{1/\nu}(z) \le c_7^{1/\nu}(1/n) = c_8(1/n)$; так как

$$\int\limits_{\frac{1}{8n}<|\zeta-\zeta(0)|<\frac{c_8}{n}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-\zeta_0|} \le c_9,$$

то (1.5) при условии (1.4) будет проверено, если для любых λ, τ, $0<\lambda<\tau\le(1/8n)$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{\{\zeta:\lambda<|\zeta-\zeta_0|<\tau\}\cap\mathbb{T}} \frac{g^{(\nu)}(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right| \le c_{10} \tag{3.21}$$

с постоянной c_{10}, зависящей от ν, но не от n. Пусть γ и Γ — дуги окружностей $\{\zeta : |\zeta-\zeta_0| = \lambda\}$ и $\{\zeta : |\zeta-\zeta_0| = \tau\}$, ограничивающие вместе с дугами $\mathbb{T}\cap\{\zeta : \lambda < |\zeta-\zeta_0| < \tau\}$ какую-то область. Из (3.7) и (3.17) получим, что $|g^{(\nu)}(\zeta)| \le c_2c_7d_\nu$ при $\zeta \in \gamma\cup\Gamma$

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\{\zeta:\lambda<|\zeta-\zeta_0|<\tau\}\cap\mathbb{T}} \frac{g^{(\nu)}(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right| &= \left|\int\limits_{\Gamma}\frac{g^{(\nu)}(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta + \int\limits_{\gamma}\frac{g^{(\nu)}(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta\right| \\ &\le 2\pi c_2c_7d_\nu + 2\pi c_2c_7d_\nu = c_{10},\end{aligned}$$

что и есть требуемая оценка (3.21).

(b) Пусть теперь α — произвольное число. Для завершения проверки того, что $F \in \Lambda^\alpha$ с оценками полунорм (1.3) или (1.6), остается проверить справедливость соотношения (1.2) с постоянной A, не зависящей от n. Для этого заметим, что при $\beta \in (1/R)\mathbb{D}$, $\zeta_1,\zeta_2 \in \mathbb{T}$ с абсолютной постоянной c_0 справедливо неравенство

$$\frac{1}{|1-\bar\beta\zeta_1|^2} \le c_0(1+n|\zeta_1-\zeta_2|)^2\frac{1}{|1-\bar\beta\zeta_2|^2};$$

поэтому с постоянной c_{11}, зависящей лишь от α, выполняется

$$\begin{aligned}&c_{11}^{-1}(1+n|\zeta_1-\zeta_2|)^{-2\alpha}g(\zeta_2)\\ &\qquad\le g(\zeta_1) \le c_{11}(1+n|\zeta_1-\zeta_2|)^{2\alpha}g(\zeta_1), \quad \zeta_1,\zeta_2\in\mathbb{T}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Выберем теперь любую точку $z \in \mathbb{D}$, для которой $M_g(z) \ge (1-|z|)^\alpha$. Так как (3.16) влечет $M_g(z) \le c_7n^{-\alpha}$, то для рассматриваемого z справедливо неравенство $1-|z| \le c_7^{1/\alpha}(1/n)$, и тогда из (3.7) получим существование постоянной c_{12}, зависящей лишь от α, для которой выполнено

$$g(z_0) \le M_g(z) \le c_{12}g(z_0), \quad z_0 = \frac{z}{|z|}. \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) следует, что

$$\left|\log\frac{g(\zeta)}{M_g(z)}\right| = \left|\log\frac{g(\zeta)}{g(z_0)} + \log\frac{g(z_0)}{M_g(z)}\right| \le \left|\log\frac{g(\zeta)}{g(z_0)}\right| + \left|\log\frac{g(z_0)}{M_g(z)}\right|$$
$$\le \log[c_{11}(1+n|\zeta - z_0|)^{2\alpha}] + \log c_{12},$$

поэтому, применяя элементарные оценки с учетом $1-|z| \le c_7^{1/\alpha}(1/n)$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \left|\log\frac{g(\zeta)}{M_g(z)}\right| \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}|d\zeta|$$
$$\le 2\pi\log(c_{11}c_{12}) + 2\alpha\int\limits_{\mathbb{T}}\log(1+n|\zeta - z_0|)\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}|d\zeta| \le A,$$

где A зависит от α, но не зависит от n, что доказывает (1.2).

Лемма 3.5. *Функция $F(z)B(z)$ принадлежит пространству Λ^α и справедлива оценка $\|FB\|_{\Lambda^\alpha} \le c_{13}$, где c_{13} зависит лишь от α.*

Доказательство. Для проверки того, что $\|FB\|_{\Lambda^\alpha} \le c_{13}$, $B = B_E$, с учетом уже установленных оценок (1.3) или (1.6) достаточно проверить условие (1.7). При $\zeta \in \mathbb{T}$ из (3.15) имеем $|B'(\zeta)| = \psi(\zeta) \ge c'n$, $1/|B'(\zeta)| \le 1/(c'n)$. Так как $E \subset (1/R)\mathbb{D}$, то $\operatorname{dist}(\zeta, E) \ge 1/(2n)$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Поэтому для величины $\delta(\zeta) = \delta_B(\zeta)$, введенной перед теоремой C, выполнено неравенство

$$c_*\frac{1}{|B'(\zeta)|} \le \delta(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

где c_* зависит лишь от α. Следовательно,

$$0 \le g(\zeta) = \psi^{-\alpha}(\zeta) = \left(\frac{1}{|B'(\zeta)|}\right)^\alpha \le \frac{1}{c_*^\alpha}\delta^\alpha(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{T},$$

что и есть требуемая оценка (1.7).

Для завершения доказательства теоремы 3.1 оценим величины $r_n(\Lambda^\alpha)$ снизу. Пусть $E = \{\beta_1 = \dots = \beta_n = 0\}$, тогда $B_E = z^n$. Пусть $g(z) = 1 + a_1 z + \dots$ — внешняя в $\mathbb{D}$ функция, $f = z^n g = z^n + \dots$ Предположим вначале, что $0 \le \nu < \alpha < \nu + 1$. Тогда, как известно,

$$\|f\|_{\Lambda^\alpha} \asymp \sup_{|z|<1}\left((1-|z|)^{\nu+1-\alpha}|f^{(\nu+1)}(z)|\right)$$
$$\ge \sup_{0<\rho<1}\left[(1-\rho)^{\nu+1-\alpha}\left(\frac{1}{2\rho\pi}\int\limits_{|\zeta|=\rho}|f^{(\nu+1)}(\zeta)|^2|d\zeta|\right)^{1/2}\right]. \tag{3.24}$$

Если $n > \nu + 1$, что не ограничивает общности, то $f^{(\nu+1)}(z) = n(n-1)\dots(n-\nu)z^{n-\nu-1} + \dots$, поэтому

$$\left(\frac{1}{2\rho\pi}\int\limits_{|\zeta|=\rho}|f^{(\nu+1)}(\zeta)|^2|d\zeta|\right)^{1/2} \ge n(n-1)\dots(n-\nu)\rho^{n-\nu-1}. \tag{3.25}$$

Поскольку для $n > \nu + 1$ мы можем написать

$$\sup_{0<\rho<1} (1-\rho)^{\nu+1-\alpha}\rho^{n-\nu-1} = \left(\frac{\nu+1-\alpha}{n-\alpha}\right)^{\nu+1-\alpha}\left(1-\frac{\nu+1-\alpha}{n-\alpha}\right)^{n-\nu-1} \sim n^{\alpha-\nu-1}$$

при $n \to \infty$, формулы (3.24) и (3.25) дают, что с некоторой постоянной c_{14}, зависящей лишь от α , справедливо неравенство

$$\|f\|_{\Lambda^\alpha} \geq c_{14}n^{\nu+1}n^{\alpha-\nu-1} = c_{14}n^\alpha.$$

Если же $\alpha = \nu \geq 1$ — целое, то опять для $n > \nu + 1$ находим, что

$$\|f\|_{\Lambda^\nu} = \sup_{\zeta\in\mathbb{T}}|f^{(\nu)}(\zeta)| \geq \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f^{(\nu)}(\zeta)|^2|d\zeta|\right)^{1/2} \geq n(n-1)....(n-\nu+1) \sim n^\nu$$

при $n \to \infty$, что и требуется. •

Теорема 3.2. *Пусть $s > 0$, $1 \leq p,q \leq \infty$. Тогда $r_n(B^s_{p,q}) \asymp n^s$, где константы в отношении эквивалентности зависят только от s, p, q.*

Доказательство. Для $s > 0$ выберем целое число ν, $\nu > s$. Пусть $E \subset \mathbb{D}$, $\#E = n$. Воспользуемся функцией $f(z)$, построенной в теореме 3.1, т.е.

$$f(z) = B_E(z)F(z), \quad |F(0)| \geq 1, \quad \|f\|_{H^\infty} < c, \quad \|f\|_{\Lambda^\nu} \leq cn^\nu.$$

При интерполяции вещественным методом пары пространств H^∞, Λ^ν получаются пространства Бесова [8]:

$$(H^\infty, \Lambda^\nu)_{s/\nu,q} = B^s_{\infty,q}.$$

Следовательно, для функции $f(z)$ имеем

$$\|f\|_{B^s_{\infty,q}} \leq c\|f\|^{(1-s/\nu)}_{H^\infty}\|f\|^{s/\nu}_{\Lambda^\nu} = c_1n^s. \tag{3.26}$$

Так как при $p < \infty$, очевидно, $B^s_{\infty,q} \subset B^s_{p,q}$, то $\|f\|_{B^s_{p,q}} \leq c(s,p,q)n^s$, и оценка сверху для $r_n(B^s_{p,q})$ получена.

Оценим теперь величину $r_n(B^s_{p,q})$ снизу. Пусть $E = \{\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0\}$, тогда $B_E = z^n$. Пусть $g(0) = 1$, $g(z)$ — внешняя в $\mathbb{D}$ функция, $f(z) = z^n g(z)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > s$. Можно считать, что $n > \nu$. Тогда $f^{(\nu)}(z) = n(n-1)\dots(n-\nu+1)z^{n-\nu}g_1(z)$, где $g_1(0) = 1$, следовательно, $\|g_1(re^{i\theta})\|_{L^1(\mathbb{T})} \geq 1$, $n(n-1)...(n-\nu+1) \sim n^\nu$ при $n \to \infty$, поэтому

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \geq \|f\|_{B^s_{1,1}} = \|(1-r)^{\nu-s-1}\|f_r\|_{L^1(\mathbb{T})}\|_{L^1(0,1)}$$
$$\geq cn^\nu\int\limits_0^1(1-r)^{\nu-s-1}r^{n-\nu}dr = cn^\nu\mathcal{B}(\nu-s, n-\nu-1),$$

где $\mathcal{B}$ — бета-функция Эйлера. Используя асимптотику функции $\mathcal{B}$, получим

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \geq c_1n^\nu n^{s-\nu} = c_1n^s.$$

Следствие 3.2. *Для алгебры Винера l_a^1 справедливо неравенство*

$$r_n(l_a^1) \le c\sqrt{n}.$$

Доказательство. Для множества E, $\#E = n$, воспользуемся экстремальной функцией $f(z)$, построенной в теореме 3.1 для Λ^1, т.е. $f = B_E F$, $F(0) = 1$, $\|f\|_{\Lambda^1} \le cn$, $\|f\|_{H^\infty} \le c$. Тогда из (3.26) имеем $\|f\|_{B^{1/2}_{2,1}} \le c\sqrt{n}$ и, так как $B^{1/2}_{2,1} \subset l_a^1$, окончательно получаем $r_n(l_a^1) \le c\sqrt{n}$, что дает новое конструктивное доказательство оценки Шеффера [1].

Замечание 3.1. Было бы интересно распространить теорему 3.2 на случай пространств с „нулевой" гладкостью ($s = 0$). При $p \ge 2$ из включения $H^p \subset B^0_{p,p}$ следует $r_n(B^0_{p,p}) \le s_n(B^0_{p,p}) \le c$. В случае же $p < 2$ неравенство $r_n(B^0_{p,p}) \le c$ означало бы, что условие Бляшке характеризует множества нулей пространства $B^0_{p,p}$, а это — открытый вопрос.

Список литературы

[1] Schäffer J. J., *Norms and determinants of linear mappings*, Math. Z. **118** (1970), 331–339.

[2] Gluskin E., Meyer M., Pajor A., *Zeros of analytic functions and norms of inverse matrices*, Israel J. Math. **87** (1994), 225–242.

[3] Queffélec H., *Sur un théorème de Gluskin–Meyer–Pajor*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. **317** (1993), 155–158.

[4] Hedstrom G. W., *Norms of powers of absolutely convergent Fourier series*, Michigan Math. J. **13** (1966), 393–416.

[5] Arazy J., Fisher S. D., Peetre J., *Besov norms of rational functions*, Function Spaces and Applications (Lund, 1986), Lecture Notes in Math., vol. 1302, Springer, Berlin–New York, 1988, pp. 125–129.

[6] Newman D. J., Shapiro H. S., *The Taylor coefficients of inner functions*, Michigan Math. J. **9** (1962), 249–255.

[7] Shirokov N. A., *Analytic functions smooth up to the boundary*, Lecture Notes in Math., vol. 1312, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1988.

[8] Берг Й., Лёфстрём Й., *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

[9] Виноградов С. А., Хавин В. П., *Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций.* I, Зап. науч. семин. ЛОМИ **47** (1974), 15–54.

[10] Вербицкий И. Э., *О коэффициентах Тейлора и L^p-модулях непрерывности произведений Бляшке*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **107** (1982), 27–35.

[11] Трибель Х., *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.

[12] Шамоян Ф. А., *Деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах функций, аналитических в круге*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **22** (1971), 206–208.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет
197376, Санкт-Петербург
ул. проф. Попова, 5
E-mail: ilya@viden.pdmi.ras.ru

Поступило 16 ноября 1998 г.