A. B. Pushnitskii, A representation for the spectral shift function in the case of perturbations of fixed sign, *Algebra i Analiz*, 1997, Volume 9, Issue 6, 197–213

https://www.mathnet.ru/eng/aa901

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

Посвящается 90-летию со дня рождения
Марка Григорьевича Крейна

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА В СЛУЧАЕ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

© А. Б. Пушницкий

Пусть H и H_0 — пара самосопряженных операторов такая, что их разность $V = H - H_0$ ядерна и знакоопределена. При этих условиях получено новое (интегральное) представление для функции спектрального сдвига пары H, H_0 через спектральные характеристики граничных значений оператора $|V|^{1/2}(H_0 - zI)^{-1}|V|^{1/2}$. Полученное представление распространяется на случай знакоопределенных V, удовлетворяющих некоторым достаточно широким условиям типа относительной ядерности. В качестве следствий получены поточечные оценки для функции спектрального сдвига, а также достаточное условие ее непрерывности.

§0. Введение

Пусть H_0 и H — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и их разность V ядерна:

$$V := H - H_0 \in S_1. \tag{0.1}$$

Тогда для пары H_0, H существует *функция спектрального сдвига* (ф.с.с.) $\xi(\lambda; H, H_0)$, играющая важную роль в спектральной теории. Ф.с.с. была впервые введена в работах И. М. Лифшица [1] (на формальном уровне) и М. Г. Крейна [2]. Современное состояние теории ф.с.с. описано в обзорной статье [7] и книге [9]; там же приведена подробная библиография. *Теорема Крейна* (см. [2, 3]) позволяет выразить ф.с.с. через граничные значения определителя возмущения для пары H_0, H:

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \arg\det(I + V(H_0 - (\lambda + i\varepsilon)I)^{-1}), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{0.2}$$

Ключевые слова: спектральная теория возмущений, функция спектрального сдвига, ядерные операторы.

где ветвь аргумента определителя фиксируется условием

$$\arg\det(I + V(H_0 - zI)^{-1}) \to 0, \quad \operatorname{Im} z \to +\infty.$$

Ф.с.с. связана с матрицей рассеяния $S(\lambda; H, H_0)$ *формулой Бирмана-Крейна* (см. [4], а также [7, 9]):

$$\det S(\lambda; H, H_0) = e^{-2\pi i \xi(\lambda; H, H_0)}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \sigma_{\mathrm{ac}}(H_0). \tag{0.3}$$

Эта связь позволяет интерпретировать ф.с.с. как фазу рассеяния и стимулирует интерес к ней в квантовомеханических задачах.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1.1, дающая новое представление (см. ниже (1.7)) для ф.с.с. через спектральные характеристики граничных значений окаймленной резольвенты H_0 в случае знакоопределенных возмущений V. В определенной мере это представление можно рассматривать как *перенесение принципа Бирмана-Швингера на непрерывный спектр.* В теореме 1.2 представление (1.7) распространяется на случай относительно ядерных возмущений (см. условия (1.8)-(1.11)). В качестве следствий получаем удобные для приложений поточечные оценки для ф.с.с. (следствия 2.3 и 2.4), а также достаточное условие непрерывности ф.с.с. по спектральному параметру (следствие 2.6). Отметим, что поточечные оценки для ф.с.с., близкие к следствиям 2.3 и 2.4, были получены ранее в работе [14] (для случая незнакоопределенных возмущений) на основе представления (0.2) с использованием принципа инвариантности.

Представление (1.7) хорошо приспособлено для вычисления асимптотики ф.с.с. по большой константе связи в конкретных задачах. Этим применениям будет посвящена другая статья.

Доказательство представления (1.7) основано на общих операторных соотношениях, близких к (0.3) (см. леммы 3.1, 3.2). Подобные соотношения для других целей использовались в [15, 16] (см. также [8, 9]).

В §1, 2 мы формулируем основные результаты настоящей работы и следствия из них, а в §3-5 приводим доказательства.

Автор глубоко благодарен профессору М. Ш. Бирману за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

§1. Основные результаты

1. Обозначения. Ниже $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Через $\rho(A)$, $\sigma(A)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{ac}}(A)$ мы обозначаем соответственно резольвентное множество, спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и абсолютно непрерывный спектр линейного оператора A. Для самосопряженного оператора A символ $E_A(\delta)$ обозначает спектральную меру борелевского множества $\delta \subset \mathbb{R}$

и $2A_\pm = |A| \pm A$. Через $\boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначается пространство компактных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$; $\boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H}) := \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Для $T = T^* \in \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H})$ и $s > 0$ мы обозначаем $n_\pm(s, T) = \dim \operatorname{Ran} E_{T\pm}(s, +\infty)$, а для $T \in \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ и $s > 0$ полагаем $n(s, T) = n_+(s^2; T^*T)$. Отметим (см., например, [17]) соотношения, эквивалентные неравенствам Вейля для самосопряженных операторов T_1, T_2:

$$n_\pm(s_1 + s_2, T_1 + T_2) \le n_\pm(s_1, T_1) + n_\pm(s_2, T_2), \quad s_1, s_2 > 0, \tag{1.1$\pm$}$$

и вытекающие из них оценки

$$n_\pm(s, T_1 + T_2) \ge n_\pm(s + s_2, T_1) - n_\mp(s_2, T_2), \quad s, s_2 > 0. \tag{1.2$\pm$}$$

Для $0 < p < \infty$ класс $\boldsymbol{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ определяется как множество всех компактных операторов T, для которых конечен функционал

$$\|T\|^p_{\boldsymbol{S}_p} := p \int_0^\infty s^{p-1} n(s, T) ds.$$

Функционал $\|\cdot\|_{\boldsymbol{S}_p}$ является нормой при $p \ge 1$ и квазинормой при $p < 1$. Для $0 < p < \infty$ класс $\boldsymbol{\Sigma}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ определяется (см. [17]) как множество всех компактных операторов T, для которых конечен следующий функционал (являющийся квазинормой):

$$\|T\|^p_{\boldsymbol{\Sigma}_p} := \sup_{s>0} s^p n(s, T).$$

Для измеримого множества $\delta \subset \mathbb{R}$ его мера Лебега обозначается через $\operatorname{mes} \delta$.

Формулы и утверждения с двойными индексами ($\pm$ и $\mp$) следует понимать независимо, как пару формул или утверждений, в одном из которых все индексы принимают верхние значения, а в другом — нижние.

2. Случай ядерных возмущений. Пусть $\mathcal{H}$ — основное, а $\mathcal{K}$ — вспомогательное гильбертово пространство и H_0 — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Пусть

$$G \in \boldsymbol{S}_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \tag{1.3}$$

и

$$V := G^*G \ (\in \boldsymbol{S}_1(\mathcal{H})). \tag{1.4}$$

Определим операторы

$$H_\pm = H_0 \pm V. \tag{1.5}$$

Для $\operatorname{Im} z > 0$ обозначим

$$T(z) = G(H_0 - zI)^{-1}G^*, \quad A(z) = \operatorname{Re} T(z), \quad K(z) = \operatorname{Im} T(z). \tag{1.6}$$

Хорошо известно, что при условии (1.3) операторнозначная функция $T(z)$ имеет предельные значения при $z \to \lambda + i0$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ в классе $S_2(\mathcal{K})$ (и даже в классе $S_p(\mathcal{K})$ при любом $p > 1$); при этом $K(\lambda + i0) \in S_1(\mathcal{K})$, $K(\lambda + i0) \geq 0$. См. [11, 9], а также [12] по поводу случая $p > 1$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие* (1.3). *Тогда при п.в.* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ф.с.с.* $\xi(\lambda; H_\pm, H_0)$ *допускает представление в виде сходящегося интеграла*

$$\xi(\lambda; H_\pm, H_0) = \pm\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, A(\lambda + i0) + tK(\lambda + i0)). \tag{1.7$\pm$}$$

Обсудим формулу (1.7). Пусть вначале $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(H_0)$. Тогда (1.7) переходит в соотношение из работы [14]:

$$\xi(\lambda; H_\pm, H_0) = \pm n_\mp(1, G(H_0 - \lambda I)^{-1} G^*),$$

которое можно рассматривать как вариант известного принципа Бирмана–Швингера. Наиболее интересен случай, когда λ лежит на непрерывном спектре $\sigma_c(H_0)$. Тогда интеграл в (1.7) осуществляет своеобразное „сглаживание“ целочисленной функции $n_\mp(1, A(\lambda + i0))$. Отметим, что интеграл сходится благодаря включению $K(\lambda + i0) \in S_1(\mathcal{K})$.

3. Случай относительно-ядерных возмущений. Ниже мы распространяем формулу (1.7) на более широкий класс возмущений V. При этом мы будем предполагать оператор H_0 полуограниченным снизу.

Пусть H_0 — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Зафиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ так, чтобы было выполнено:

$$H_0 + \gamma I \geq I. \tag{1.8}$$

Пусть G — оператор, действующий из $\mathcal{H}$ во вспомогательное гильбертово пространство $\mathcal{K}$, допускающий замыкание и такой, что $\operatorname{Dom} G \supset \operatorname{Dom}(H_0 + \gamma I)^{1/2}$. Тогда оператор $G(H_0 + \gamma I)^{-1/2}$ ограничен. Мы будем считать, что выполнено более сильное условие

$$G(H_0 + \gamma I)^{-1/2} \in S_\infty(\mathcal{H}, \mathcal{K}). \tag{1.9}$$

Пусть, кроме того, для некоторого $m > 0$

$$G(H_0 + \gamma I)^{-m} \in S_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}). \tag{1.10}$$

Включение (1.9) означает, что оператор $V = G^*G$ компактен относительно H_0 в смысле форм. Это дает возможность определить операторы (1.5) через соответствующие полуторалинейные формы. Мы будем считать, что для некоторых $l > 0$, $\lambda_0 < \inf \sigma(H_0) \cup \sigma(H_\pm)$ выполнено условие:

$$(H_\pm - \lambda_0 I)^{-l} - (H_0 - \lambda_0 I)^{-l} \in S_1(\mathcal{H}). \tag{1.11}$$

Это позволяет определить ф.с.с. $\xi(\lambda; H_\pm, H_0)$ на основе принципа инвариантности (см., например, [7]). Как и выше, введем операторы (1.6), компактные в $\mathcal{K}$ в силу включения (1.9). Благодаря условиям (1.9), (1.10) оператор $T(z)$ имеет предельные значения при $z \to \lambda + i0$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ в классе $\boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{K})$, причем $K(\lambda + i0) \in \boldsymbol{S}_1(\mathcal{K})$; см. ниже лемму 4.1. Таким образом, при сделанных предположениях левая и правая части в (1.7) корректно определены.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия* (1.8)-(1.11). *Тогда при п.в.* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ф.с.с.* $\xi(\lambda; H_\pm, H_0)$ *допускает представление* (1.7).

§2. Следствия из основных результатов

В этом параграфе с помощью элементарного анализа правой части представления (1.7) мы получаем оценки для ф.с.с., а также достаточные условия непрерывности ф.с.с.

1. Оценки для ф.с.с. Для операторов

$$A = A^* \in \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{K}), \qquad K = K^* \in \boldsymbol{S}_1(\mathcal{K}) \tag{2.1}$$

положим

$$\xi_\pm = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, A + tK). \tag{2.2}$$

Легко видеть, что условия (2.1) достаточны для сходимости интеграла (2.2).

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* $K \in \boldsymbol{S}_p(\mathcal{K})$ *при каком-либо* $p \le 1$. *Тогда для величин* $\xi_\pm$, *определенных в* (2.2), *справедливы следующие оценки*:

$$\xi_\pm \le \inf_{0<\varepsilon<1} (n_\mp(1-\varepsilon, A) + \varepsilon^{-p} \mu_p(\varepsilon, K) \|K\|^p_{\boldsymbol{S}_p}), \tag{2.3$\pm$}$$

$$\xi_\pm \ge \sup_{\varepsilon>0} (n_\mp(1+\varepsilon, A) - \varepsilon^{-p} \mu_p(\varepsilon, K) \|K\|^p_{\boldsymbol{S}_p}), \tag{2.4$\pm$}$$

где для величины $\mu_p(\varepsilon; K)$ *выполнено*

$$0 \le 2\pi p \mu_p(\varepsilon, K) \le (1-p)^{\frac{1-p}{2}} (1+p)^{\frac{1+p}{2}}, \quad \mu_p(\varepsilon, K) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to +0. \tag{2.5}$$

Аналогичные оценки имеют место при замене класса $\boldsymbol{S}_p$ на $\boldsymbol{\Sigma}_p$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* $K \in \boldsymbol{\Sigma}_p(\mathcal{K})$ *при каком-либо* $p < 1$. *Тогда для величин* $\xi_\pm$, *определенных в* (2.2), *справедливы следующие оценки*:

$$\xi_\pm \le \inf_{0<\varepsilon<1} (n_\mp(1-\varepsilon, A) + \varepsilon^{-p} (2\cos(\pi p/2))^{-1} \|K\|^p_{\boldsymbol{\Sigma}_p}), \tag{2.6$\pm$}$$

$$\xi_\pm \ge \sup_{\varepsilon>0} (n_\mp(1+\varepsilon, A) - \varepsilon^{-p} (2\cos(\pi p/2))^{-1} \|K\|^p_{\boldsymbol{\Sigma}_p}). \tag{2.7$\pm$}$$

Из лемм 2.1, 2.2 непосредственно вытекают следствия, относящиеся к ф.с.с.

Следствие 2.3. *Пусть в условиях теоремы* 1.1 *или* 1.2 *в какой-либо точке* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедливо представление* (1.7) *и* $K(\lambda + i0) \in \boldsymbol{S}_p(\mathcal{K})$ *при каком-либо* $p \le 1$. *Тогда справедливы оценки* (2.3)–(2.5), *где* $\pm\xi_\pm = \xi(\lambda; H_\pm, H_0)$, $A = A(\lambda + i0)$, $K = K(\lambda + i0)$.

Следствие 2.4. *Пусть в условиях теоремы* 1.1 *или* 1.2 *в какой-либо точке* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедливо представление* (1.7) *и* $K(\lambda + i0) \in \boldsymbol{\Sigma}_p(\mathcal{K})$ *при каком-либо* $p < 1$. *Тогда справедливы оценки* (2.6), (2.7), *где* $\pm\xi_\pm = \xi(\lambda; H_\pm, H_0)$, $A = A(\lambda + i0)$, $K = K(\lambda + i0)$.

Замечание. Пользуясь соображениями монотонности, т.е. неравенствами

$$\xi(\lambda; H_0 - V_-, H_0) \le \xi(\lambda; H_0 + V, H_0) \le \xi(\lambda; H_0 + V_+, H_0),$$

легко получить для ф.с.с. аналоги оценок (2.3)–(2.7) в случае незнакоопределенного возмущения V.

Для сравнения приведем оценки из работы [14]. Для простоты рассмотрим случай ядерного возмущения (1.4). В [14] при условии существования граничных значений операторов (1.6) в классе $\boldsymbol{S}_p(\mathcal{K})$, $0 < p < \infty$, получены оценки

$$\begin{aligned} |\xi(\lambda; H_\pm, H_0)| &\le C_p(\|K(\lambda + i0)\|_{\boldsymbol{S}_1} + \|T(\lambda + i0)\|^p_{\boldsymbol{S}_p}), & p \ge 1, \\ |\xi(\lambda; H_\pm, H_0)| &\le C_p\|T(\lambda + i0)\|^p_{\boldsymbol{S}_p}, & p < 1. \end{aligned}$$

Аналогично, при условии существования граничных значений операторов (1.6) в классе $\boldsymbol{\Sigma}_p(\mathcal{K})$, $0 < p < \infty$, получены оценки

$$\begin{aligned} |\xi(\lambda; H_\pm, H_0)| &\le C_p(\|K(\lambda + i0)\|_{\boldsymbol{S}_1} + \|T(\lambda + i0)\|^p_{\boldsymbol{\Sigma}_p}), & p \ge 1, \\ |\xi(\lambda; H_\pm, H_0)| &\le C_p\|T(\lambda + i0)\|^p_{\boldsymbol{\Sigma}_p}, & p < 1. \end{aligned}$$

Заметим, что область применимости оценок (2.3)–(2.7) шире, так как они не требуют принадлежности операторов $A(\lambda + i0)$ классам $\boldsymbol{S}_p$, $\boldsymbol{\Sigma}_p$.

2. Непрерывность ф.с.с.

Лемма 2.5. *Пусть операторы* $A = A^* \in \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{K})$, $A_j = A_j^* \in \boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{K})$, $j \in \mathbb{N}$, $K = K^* \in \boldsymbol{S}_1(\mathcal{K})$, $K_j = K_j^* \in \boldsymbol{S}_1(\mathcal{K})$, $j \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $\|A_j - A\| \to 0$, $\|K_j - K\|_{\boldsymbol{S}_1} \to 0$ *при* $j \to \infty$. *Предположим, что для некоторого* $z_0 \in \mathbb{C}$: $\mp 1 \notin \sigma(A + z_0 K)$. *Тогда при* $j \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, A_j + tK_j) \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, A + tK). \qquad (2.8\pm)$$

Как следствие получаем достаточное условие непрерывности ф.с.с.

Следствие 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *или* 1.2, *и пусть для некоторого интервала* $\delta \subset \mathbb{R}$ *оператор-функция* $A(\lambda + i0)$ *непрерывна по* $\lambda \in \delta$ *в* $\boldsymbol{S}_\infty(\mathcal{K})$, *а* $K(\lambda + i0)$ *непрерывна по* $\lambda \in \delta$ *в* $\boldsymbol{S}_1(\mathcal{K})$. *Пусть, кроме того,* $\mp 1 \notin \sigma(A(\lambda + i0) + iK(\lambda + i0))$ *при всех* $\lambda \in \delta$. *Тогда при п.в.* $\lambda \in \delta$ *ф.с.с.* $\xi(\lambda; H_\pm, H_0)$ *совпадает с непрерывной по* $\lambda \in \delta$ *функцией.*

Доказательства лемм 2.1, 2.2, 2.5 даны в §5.

§3. Доказательство теоремы 1.1

1. Нам удобно провести предварительные рассмотрения (см. ниже леммы 3.1 и 3.2), наложив на оператор G более слабое требование, чем условие (1.3) в теореме 1.1:

$$G(|H_0|+I)^{-1/2} \in \mathcal{S}_2(\mathcal{H},\mathcal{K}). \tag{3.1}$$

Доказательство теоремы 1.1 использует некоторые соотношения, близкие к формуле (0.3). Роль матрицы рассеяния в наших построениях играет следующий оператор, действующий в $\mathcal{K}$:

$$S_\pm(z) = I \mp 2iK^{1/2}(z)(I \pm T(z))^{-1}K^{1/2}(z), \tag{3.2}$$

где $\operatorname{Im} z > 0$.

Замечание. В силу тождества

$$(I \pm G(H_0 - zI)^{-1}G^*)(I \mp G(H_\pm - zI)^{-1}G^*) = I, \tag{3.3}$$

справедливого при условии $G(|H_0|+I)^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{H},\mathcal{K})$, обратный оператор в (3.2) существует при всех $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (см. [9, §1.9, 1.10]).

Операторы вида (3.2) были введены и изучены в [15, 16] (см. также [8, 9]). Ниже в обозначениях мы для краткости опускаем зависимость операторов A, K, $S_\pm$ от z, если это не приводит к недоразумению. В следующей лемме собраны необходимые нам свойства операторов $S_\pm$.

Лемма 3.1. *Пусть G удовлетворяет условию* (3.1). *Тогда для операторов $S_\pm$ справедливы следующие свойства*:

(i) *для любого z, $\operatorname{Im} z > 0$, операторы $S_\pm(z)$ унитарны в $\mathcal{K}$ и $S_\pm(z) - I \in \mathcal{S}_1(\mathcal{K})$*;

(ii) $\|S_\pm(z) - I\|_{\mathcal{S}_1} \to 0$ *при* $\operatorname{Im} z \to +\infty$;

(iii) *для любого z, $\operatorname{Im} z > 0$ и любого $\varphi \in (0, 2\pi)$ верно соотношение*:

$$e^{i\varphi} \in \sigma_{\mathrm p}(S_\pm(z)) \iff \mp 1 \in \sigma_{\mathrm p}(A(z) + \operatorname{ctg}(\varphi/2)K(z)), \tag{3.4$_\pm$}$$

причем размерности собственных подпространств совпадают;

(iv) *для любого компактного множества $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ существуют такие числа $\varphi_0^{(\pm)} \in (0, 2\pi)$, что*:

$$\forall z \in \Omega: \quad \sigma(S_+(z)) \subset \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [\varphi_0^{(+)}, 2\pi]\}; \tag{3.5$_+$}$$

$$\forall z \in \Omega: \quad \sigma(S_-(z)) \subset \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, \varphi_0^{(-)}]\}. \tag{3.5$_-$}$$

Доказательство. (i) Доказано в [16] (см. также [9]).

(ii) Запишем оператор $T(z)$ в виде

$$T(z) = G(|H_0|+I)^{-1/2}\frac{|H_0|+I}{H_0 - zI}(G(|H_0|+I)^{-1/2})^*.$$

Поскольку $(|H_0|+I)(H_0-zI)^{-1} \xrightarrow{s} 0$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$, то, в силу (3.1), получаем, что $\|T(z)\|_{S_1} \to 0$, при $\operatorname{Im} z \to \infty$. Отсюда немедленно следует соотношение (ii).

(iii) Для определенности проверим (3.4_+):

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \in \sigma_{\mathrm{p}}(S_+) &\iff e^{i\varphi} \in \sigma_{\mathrm{p}}(I - 2iK(I+A+iK)^{-1}) \\ &\iff e^{i\varphi} \in \sigma_{\mathrm{p}}((I+A-iK)(I+A+iK)^{-1}) \\ &\iff 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}((I+A-iK - e^{i\varphi}(I+A+iK)) \\ &\iff 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}((I+A+\operatorname{ctg}(\varphi/2)K) \\ &\iff (-1) \in \sigma_{\mathrm{p}}(A+\operatorname{ctg}(\varphi/2)K), \end{aligned}$$

причем размерности собственных подпространств совпадают.

(iv) Для определенности докажем (3.5_-). В силу (3.4_-) достаточно доказать, что существует такое $t_0 > 0$, что

$$\forall z \in \Omega, \quad \forall t \geq t_0: \quad \sigma(A(z) - tK(z)) \subset (-\infty, 1). \tag{3.6}$$

Тогда при $t_0 = -\operatorname{ctg}(\varphi_0^{(-)}/2)$ мы получим (3.5_-). Для доказательства (3.6) возьмем произвольное $z = \lambda + i\varepsilon \in \Omega$ и отметим, что

$$\begin{aligned} A(z) - tK(z) &= G\frac{H_0 - (\lambda + t\varepsilon)I}{(H_0-\lambda I)^2 + \varepsilon^2 I}G^* \\ &\leq G(|H_0|+I)^{-1/2} \\ &\quad\times \frac{(|H_0|+I)}{(H_0-\lambda I)^2+\varepsilon^2 I}(H_0 - (\lambda+t\varepsilon)I)_+ (G(|H_0|+I)^{-1/2})^*. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим оператор в правой части (3.7). Поскольку Ω — компакт в $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, то существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2$, что $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > \varepsilon_0, \lambda_1 < \operatorname{Re} z < \lambda_2\}$. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \frac{|H_0|+I}{(H_0-\lambda I)^2+\varepsilon^2 I}(H_0-(\lambda+t\varepsilon)I)_+ &\leq \frac{|H_0|+I}{(H_0-\lambda I)^2+\varepsilon_0^2 I}(H_0-(\lambda_1+t\varepsilon_0)I)_+ \\ &\leq \frac{(|H_0|+I)(H_0-\lambda_1 I)}{(H_0-\lambda I)^2+\varepsilon_0^2 I}\theta(H_0-(\lambda_1+t\varepsilon_0)I) \leq C(\Omega)\theta(H_0-(\lambda_1+t\varepsilon_0)I), \end{aligned}$$

где θ — характеристическая функция интервала $(0,\infty)$, а $C(\Omega)$ — положительная константа. Подставляя полученную оценку в (3.7), получаем:

$$A(z) - tK(z) \leq C(\Omega)G(|H_0|+I)^{-1/2}\theta(H_0-(\lambda_1+t\varepsilon_0)I)(G(|H_0|+I)^{-1/2})^*.$$

Поскольку $\theta(H_0-(\lambda_1+t\varepsilon_0)I) \xrightarrow{s} 0$ при $t \to \infty$, то в силу включения (3.1) норма (и даже ядерная норма) оператора в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $t \to \infty$. Отсюда следует (3.6). •

2. Далее мы доказываем лемму, которая содержит основную идею доказательства теоремы 1.1.

Лемма 3.2. *Пусть* G *удовлетворяет условию* (3.1), *и пусть при* $\operatorname{Im} z > 0$ *функция* $D_{H_\pm/H_0}(z)$ *определена формулой*

$$D_{H_\pm/H_0}(z) = \det(I \pm T(z)). \tag{3.8$\pm$}$$

Тогда справедливо представление

$$\arg D_{H_\pm/H_0}(z) = \pm \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, A(z) + tK(z)), \tag{3.9$\pm$}$$

где ветвь аргумента фиксируется условием:

$$\arg D_{H_\pm/H_0}(z) \to 0, \quad \operatorname{Im} z \to +\infty. \tag{3.10$\pm$}$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай верхних знаков. Вначале преобразуем левую часть (3.9_+) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\arg D_{H_+/H_0} &= \arg\det(I + A + iK) \\
&= -\frac{1}{2}(\arg\det(I + A - iK) - \arg\det(I + A + iK)) \\
&= -\frac{1}{2}\arg\det(I - 2iK(I + A + iK)^{-1}) \\
&= -\frac{1}{2}\arg\det S_+.
\end{aligned}$$

Вопрос свелся к вычислению $\arg\det S_+(z)$, где ветвь аргумента фиксируется условием:

$$\arg\det S_+(z) \to 0, \quad \operatorname{Im} z \to \infty. \tag{3.11}$$

Лемма 3.1 (iv) в сочетании с условием (3.11) позволяет написать следующую формулу для $\arg\det S_+$:

$$\arg\det S_+ = - \sum_{\substack{e^{i\varphi_n} \in \sigma_p(S_+) \\ \varphi_n \in (0, 2\pi)}} (2\pi - \varphi_n).$$

В силу соотношения (3.4_+) имеем (с учетом кратностей):

$$\sum_{\substack{e^{i\varphi_n}\in\sigma_p(S_+)\\ \varphi_n\in(0,2\pi)}} (2\pi-\varphi_n) = \int_0^{2\pi} \operatorname{card}\{n \mid e^{i\varphi_n} \in \sigma_p(S_+), \varphi_n < \varphi\} d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{card}\{n \mid (-1) \in \sigma_p(A + \operatorname{ctg}(\varphi_n/2)K), \varphi_n < \varphi\} d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} n_-(1, A + \operatorname{ctg}(\varphi/2)K) d\varphi$$
$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_-(1, A + tK),$$

что и приводит к представлению (3.9_+). •

3. Доказательство теоремы 1.1. Перепишем представление (0.2) в виде

$$\xi(\lambda; H_\pm, H_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \arg D_{H_\pm/H_0}(\lambda + i\varepsilon),$$

где допредельное выражение в правой части определено формулами (3.8), (3.10). Тогда в силу леммы 3.2 при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\xi(\lambda; H_\pm, H_0) = \pm\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, A(\lambda + i\varepsilon) + tK(\lambda + i\varepsilon)). \tag{3.12}$$

Далее, заметим, что $\{-1, 1\} \cap \sigma(A(\lambda + i0) + iK(\lambda + i0)) = \varnothing$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Это следует, например, из тождества (3.3) и из того, что в силу (1.3) оператор-функции $G(H_\pm - zI)^{-1}G^*$ имеют граничные значения в $S_2(\mathcal{K})$ при $z \to \lambda + i0$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Сказанное позволяет применить лемму 2.5. Переходя к пределу в правой части (3.12) при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, получаем (1.7). •

§4. Доказательство теоремы 1.2

1. Вначале обсудим существование граничных значений операторов (1.6). Следующее утверждение вытекает из основных фактов стационарной ядерной теории рассеяния.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* (1.8)–(1.10). *Тогда при п.в.* $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) *оператор* $T(z)$ *имеет предельные значения в* $S_\infty(\mathcal{K})$ *при* $z \to \lambda + i0$;

(ii) $K(\lambda + i0) \in S_1(\mathcal{K})$;

(iii) $\{-1, 1\} \cap \sigma(T(\lambda + i0)) = \varnothing$.

Доказательство. 1. Пусть $\delta \subset \mathbb{R}$ — произвольный ограниченный интервал. Разобьем оператор $T(z)$ на два слагаемых:

$$\begin{aligned} T(z) &= GE_{H_0}(\delta)(H_0 - zI)^{-1}(GE_{H_0}(\delta))^* \\ &\quad + GE_{H_0}(\mathbb{R} \setminus \delta)(H_0 - zI)^{-1}(GE_{H_0}(\mathbb{R} \setminus \delta))^* \\ &=: T_1(z) + T_2(z). \end{aligned}$$

В силу (1.10) оператор $T_1(\lambda + i\varepsilon)$ имеет предельные значения в $S_2(\mathcal{K})$ при п.в. $\lambda \in \delta$, причем $\operatorname{Im} T_1(\lambda + i0) \in S_1$ (см. [11]). С другой стороны, оператор $T_2(\lambda + i\varepsilon)$ имеет предельные значения при $\varepsilon \to +0$ в $S_\infty(\mathcal{K})$ при всех $\lambda \in \delta$, причем $\operatorname{Im} T_2(\lambda + i0) = 0$. Это доказывает (i), (ii).

2. Для доказательства (iii) вначале покажем, что из (1.8)–(1.10) следуют включения

$$G(H_\pm + aI)^{-1/2} \in S_\infty(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \tag{4.1}$$

$$G(H_\pm + aI)^{-m} \in S_2(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \tag{4.2}$$

при некотором $-a < \inf \sigma(H_-)$.

Очевидно, (4.1) следует из (1.9) и ограниченности оператора $(H_0 + \gamma I)^{1/2}(H_\pm + aI)^{-1/2}$. Соотношение (4.2) эквивалентно включению

$$G(H_\pm + aI)^{-2m} G^* \in S_1(\mathcal{K}), \tag{4.3}$$

которое мы и устанавливаем ниже.

3. Выберем $-a < \inf \sigma(H_-)$ так, чтобы

$$\|G(H_0 + aI)^{-1/2}\|_{S_\infty} < 1, \tag{4.4}$$

$$\|G(H_0 + aI)^{-m}\|_{S_2} < 1. \tag{4.5}$$

Легко видеть, что такой выбор возможен в силу условий (1.8)–(1.10). Интерполируя между (4.4) и (4.5), получаем

$$\|G(H_0 + aI)^{-1/2-k}\|_{S_{(2m-1)/k}} < 1, \quad 0 \le k \le m - 1/2. \tag{4.6}$$

Записывая ряд теории возмущений по степеням V для оператора из (4.3), с помощью (4.6) убеждаемся, что он сходится в $S_1(\mathcal{K})$, что и приводит к включению (4.3). Подобное рассуждение см., например, в [10, теорема XI.12].

4. Из (4.2), (4.1), как и в пункте (i), получаем, что при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $G(H_\pm - zI)^{-1}G^*$ имеет предельные значения в $S_\infty(\mathcal{K})$ при $z \to \lambda + i0$. В силу тождества (3.3) отсюда следует утверждение (iii). •

2. План доказательства теоремы 1.2 состоит в том, чтобы аппроксимировать возмущение V некоторой последовательностью ядерных операторов V_j, при фиксированном j воспользоваться теоремой 1.1, а затем в формуле (1.7) перейти к пределу при $j \to \infty$. При этом лемма 2.5 обеспечивает переход к пределу в правой части (1.7); что касается левой части, то здесь предельный переход основан на следующей лемме.

Лемма 4.2. *Пусть для последовательности действующих в $\mathcal{H}$ операторов M_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, выполнено*

$$0 \le M_j \le aI, \quad a > 0; \tag{4.7}$$

$$\pm(M_j - M_{j+1}) \ge 0; \tag{4.8$\pm$}$$

$$\operatorname{rank}(M_j - M_0) < \infty. \tag{4.9}$$

Пусть, кроме того, для

$$M := \operatorname*{s-lim}_{j \to \infty} M_j \tag{4.10}$$

(этот предел заведомо существует в силу (4.8)) выполнено

$$M_0^l - M^l \in \boldsymbol{S}_1 \quad \textit{для некоторого } l > 1. \tag{4.11}$$

Тогда при п.в. $\lambda \in (0, a)$

$$\xi(\lambda; M_j, M) \to 0, \quad j \to \infty. \tag{4.12}$$

Доказательство. 1. Вначале заметим, что в силу (4.11) и (4.9) ф.с.с. $\xi(\lambda; M_j, M)$ корректно определена. Далее, (4.8$\pm$) влечет за собой монотонность последовательности функций $\xi(\lambda; M_j, M)$. Следовательно, достаточно показать, что последовательность $\xi(\lambda; M_j, M)$ стремится к нулю в $L_1(a_0, a)$ при любом $a_0 \in (0, a)$.

2. Положим $V_j = \pm(M_j - M) \ge 0$ (знаки берутся в соответствии со знаками в (4.8$\pm$)). Легко видеть, что условие (4.11) влечет за собой компактность оператора V_0. Отсюда и из (4.8), (4.10) получаем

$$\|V_j\| \to 0, \quad j \to \infty. \tag{4.13}$$

3. Воспроизведем один вспомогательный результат из работы [13] (см. также [9, теорема 8.10.4]). Занумеруем собственные числа λ_k оператора V_0 в порядке убывания, и запишем спектральное разложение V_0 в виде

$$V_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\cdot, \psi_k) \psi_k.$$

При $k \ge 1$ обозначим: $\widetilde{P}_k = \sum_{i=1}^{k} (\cdot, \psi_i)\psi_i$, $P_k = I - \widetilde{P}_k$, $V_0^{(k)} = P_k V_0$, $\widetilde{V}_0^{(k)} = \widetilde{P}_k V_0$. В качестве вспомогательного факта в [13, 9] доказано, что при условии (4.11)

$$\|(M \pm V_0^{(k)})^n - M^n\|_{\boldsymbol{S}_1} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.14}$$

где n — ближайшее к l натуральное нечетное число, большее l.

4. Зафиксируем произвольное $a_0 \in (0,a)$ и проверим, что

$$\int_{a_0}^{a} |\xi(\lambda; M_j, M)| d\lambda \to 0, \quad j \to \infty. \tag{4.15}$$

Для любых $j,k = 1,2,3,\ldots$ разобьем оператор V_j на два слагаемых: $V_j = V_j^{(k)} + \widetilde{V}_j^{(k)}$, где $V_j^{(k)} = P_k V_j P_k$, а проектор P_k определен в предыдущем пункте. При этом ясно, что $V_j^{(k)} \leq V_0^{(k)}$ (в силу $(4.8_\pm)$). Таким образом, имеем для любых k, j:

$$\begin{aligned}|\xi(\lambda; M_j, M)| &= |\xi(\lambda; M \pm V_j, M)| \\ &\leq |\xi(\lambda; M \pm V_j, M \pm V_j^{(k)})| + |\xi(\lambda; M \pm V_j^{(k)}, M)| \\ &\leq |\xi(\lambda; M \pm V_j, M \pm V_j^{(k)})| + |\xi(\lambda; M \pm V_0^{(k)}, M)|.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом оценки $\|\widetilde{V}_j^{(k)}\|_{S_1} \leq \operatorname{rank} \widetilde{V}_j^{(k)} \|\widetilde{V}_j\| \leq 4k\|V_j\|$ получаем

$$\begin{aligned}&\int_{a_0}^{a} |\xi(\lambda; M_j, M)| d\lambda \\ &\quad\leq \int_{a_0}^{a} |\xi(\lambda; M \pm V_j, M \pm V_j^{(k)})| d\lambda + \int_{a_0}^{a} |\xi(\lambda; M \pm V_0^{(k)}, M)| d\lambda \\ &\quad\leq 4k\|V_j\| + n^{-1} {a_0}^{1-n} \int_{a_0^n}^{a^n} |\xi(\lambda^n; (M \pm V_0^{(k)})^n, M^n)| d\lambda^n \\ &\quad\leq 4k\|V_j\| + n^{-1} a_0^{1-n} \|(M \pm V_0^{(k)})^n - M^n\|_{S_1}.\end{aligned}$$

Поскольку k здесь произвольно, то (4.13) и (4.14) влекут за собой (4.15). •

3. Доказательство теоремы 1.2. 1. Пусть P_j — какая-либо последовательность конечномерных ортопроекторов в $\mathcal{K}$ такая, что $P_0 = 0$, $P_{j+1} \geq P_j$, и $P_j \xrightarrow{s} I$ при $j \to \infty$. Обозначим $G_j = P_j G$ и определим операторы $H_\pm^{(j)} = H_0 \pm G_j^* G_j$ через соответствующие формы.

2. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и установим справедливость представления:

$$\xi(\lambda; H_\pm^{(j)}, H_0) = \pm\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, P_j A(\lambda + i0) P_j + t P_j K(\lambda + i0) P_j). \tag{4.16}$$

Из (1.10) следует, что

$$G_j(H_0+\gamma I)^{-1/2} \in S_2(\mathcal{H},\mathcal{K}). \tag{4.17}$$

В [5, 6] доказано, что при условиях (1.8), (4.17) при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо следующее представление:

$$\xi(\lambda; H_\pm^{(j)}, H_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \arg D_{H_\pm^{(j)}/H_0}(\lambda+i\varepsilon), \tag{4.18}$$

где функция $D_{H_\pm^{(j)}/H_0}(z)$ определена равенствами (1.6), (3.8), (3.10) с заменой $G \mapsto G_j$. В силу (4.17) можно воспользоваться леммой 3.2, что приводит к представлению

$$\xi(\lambda; H_\pm^{(j)}, H_0) = \pm\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_\mp(1, P_j A(\lambda+i\varepsilon)P_j + tP_j K(\lambda+i\varepsilon)P_j). \tag{4.19}$$

Далее, как и при доказательстве леммы 4.1(iii), убеждаемся, что $\{-1,1\} \cap \sigma(P_j T(\lambda+i0)P_j) = \varnothing$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому можно применить лемму 2.5 и перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ в правой части (4.19). Это и приводит к (4.16).

3. Покажем теперь, что в (4.16) можно перейти к пределу при $j \to \infty$ и получим, таким образом, представление (1.7). Пусть $M_j^\pm = (H_\pm^{(j)} - \lambda_0 I)^{-1}$, $M^\pm = (H_0 - \lambda_0 I)^{-1}$, где число λ_0 — то же, что и в условии (1.11). Тогда операторы $M_j^\pm$, $M^\pm$ удовлетворяют условиям леммы 4.2 при $a^{-1} = \min\{\inf\sigma(H_0) - \lambda_0, \inf\sigma(H_\pm) - \lambda_0\}$. Следовательно, при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\xi(\lambda; H_\pm, H_0) - \xi(\lambda; H_\pm^{(j)}, H_0) = \xi(\lambda; H_\pm, H_\pm^{(j)}) \to 0, \quad j \to \infty.$$

С другой стороны, в силу лемм 2.5 и 4.1(iii), можно перейти к пределу под знаком интеграла в правой части (4.16) при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, что и доказывает искомое представление (1.7). •

§5. Доказательство лемм 2.1, 2.2, 2.5

1. Доказательство леммы 2.1. Мы докажем лишь оценку (2.3$_-$); остальные оценки доказываются аналогично. Пользуясь неравенством (1.1$_+$), получаем для любого $\varepsilon \in (0,1)$:

$$n_+(1, A+tK) \le n_+(1-\varepsilon, A) + n_+(\varepsilon, tK).$$

Интегрируя эту оценку по t с весом $\pi^{-1}(1+t^2)^{-1}$, находим

$$\xi_- \le n_+(1-\varepsilon, A) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} n(\varepsilon t^{-1}, K). \tag{5.1}$$

Осталось оценить интеграл в правой части (5.1). Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} n(\varepsilon t^{-1}, K) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\tau^2} n(\tau, K) d\tau$$
$$= \varepsilon^{-p}\int\limits_0^\infty g_p(\tau/\varepsilon) p\tau^{p-1} n(\tau, K) d\tau,$$

где $p\pi g_p(x) = x^{1-p}(1+x^2)^{-1}$. Поскольку $\int_0^\infty p\tau^{p-1} n(\tau, K) d\tau = \|K\|_{S_p}^p$, $2\pi p g_p(x) \le (1-p)^{\frac{1-p}{2}}(1+p)^{\frac{1+p}{2}}$, и $g_p(x) \to 0$ при $x \to \infty$, получаем, что

$$\int\limits_0^\infty g_p(\tau/\varepsilon) p\tau^{p-1} n(\tau, K) d\tau = \mu_p(\varepsilon, K)\|K\|_{S_p}^p,$$

где $\mu_p(\varepsilon, K)$ обладает требуемыми свойствами (2.5). •

2. Доказательство леммы 2.2. Вначале, как и при доказательстве леммы 2.2, получаем оценку (5.1). Оценка интеграла в правой части (5.1) проводится следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} n(\varepsilon t^{-1}, K) = \frac{\varepsilon^{-p}}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{-p}}{1+\tau^2}\tau^p n(\tau, K) d\tau$$
$$\le \frac{\varepsilon^{-p}}{\pi}\big(\sup_{\tau\ge 0} \tau^p n(\tau, K)\big)\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{-p}}{1+\tau^2} d\tau = \varepsilon^{-p}\Big(2\cos\frac{\pi p}{2}\Big)^{-1}\|K\|_{\Sigma_p}^p,$$

что и приводит к (2.6_-). Остальные оценки доказываются аналогично. •

3. Доказательство леммы 2.5. Для определенности докажем (2.8_-).

1. Вначале оценим интеграл в левой части (2.8_-). Из (1.1_+) при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ получаем

$$n_+(1, A_j + tK_j) = n_+(1, A + tK + (A_j - A) + t(K_j - K))$$
$$\le n_+(1-2\varepsilon, A + tK) + n_+(\varepsilon, A_j - A) + n_+(\varepsilon, t(K_j - K)).$$

Проинтегрируем полученную оценку с весом $(1+t^2)^{-1}$:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} n_+(1, A_j + tK_j)$$
$$\le \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} n_+(1-2\varepsilon, A + tK) + \pi n_+(\varepsilon, A_j - A)$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} n_+(\varepsilon, t(K_j - K)). \tag{5.2}$$

2. Оценим последний интеграл в правой части (5.2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(\varepsilon, t(K_j - K)) = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon}{\tau^2+\varepsilon^2} n_+(\tau, |K_j - K|) d\tau$$
$$\leq \varepsilon^{-1} \|K_j - K\|_{S_1}. \tag{5.3}$$

3. Перейдем к верхнему пределу по j в оценке (5.2). С учетом (5.3) получаем

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(1, A_j + tK_j) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(1-2\varepsilon, A+tK). \tag{5.4}$$

4. В силу аналитической альтернативы Фредгольма (см., например, [9]) множество $\{t \in \mathbb{C} \mid 1 \in \sigma(A+tK)\}$ либо дискретно, либо совпадает с $\mathbb{C}$. Однако второй вариант не может реализоваться из-за условия $1 \notin \sigma(A + z_0 K)$. Следовательно, при всех $t \in \mathbb{R}$ за исключением дискретного множества имеем

$$n_+(1-2\varepsilon, A+tK) \to n_+(1, A+tK) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Тогда по теореме Лебега о монотонной сходимости

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(1-2\varepsilon, A+tK) \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(1, A+tK) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, из (5.4) следует оценка:

$$\limsup_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(1, A_j + tK_j) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} n_+(1, A+tK).$$

Аналогично (с использованием (1.2_+) вместо (1.1_+)) доказывается оценка снизу для нижнего предела по j. Эти две оценки приводят к (2.8_-). •

Список литературы

[1] Лифшиц И. М., *Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой*, Успехи мат. наук **7** (1952), № 1, 171–180.

[2] Крейн М. Г., *О формуле следов в теории возмущений*, Мат. сб. **33** (1953), № 3, 597–626.

[3] Крейн М. Г., *О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов*, Первая летняя математическая школа (Канев, 1963). Ч. 1, Наук. думка, Киев, 1964, сс. 103–187.

[4] Бирман М. Ш., Крейн М. Г., *К теории волновых операторов и операторов рассеяния*, Докл. АН СССР **144** (1962), № 3, 475–478.

[5] Крейн М. Г., Яврян В. А., *О функциях спектрального сдвига, возникающих при возмущениях положительного оператора*, J. Operator Theory **6** (1981), no. 1, 155–191.

[6] Яврян В. А., *О некоторых возмущениях самосопряженных операторов*, Докл. АН АрмССР **38** (1964), № 1, 3–7.

[7] Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие*, Алгебра и анализ **4** (1992), № 5, 1–44.

[8] Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р., *Спектральные свойства матрицы рассеяния*, Алгебра и анализ **4** (1992), № 6, 1–27.

[9] Яфаев Д. Р., *Математическая теория рассеяния. Общая теория*, СПГУ, СПб., 1994.

[10] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики. 3. Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.

[11] Бирман М. Ш., Энтина С. Б., *Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **31** (1967), № 2, 401–430.

[12] Набоко С. Н., *О граничных значениях аналитических оператор-функций с положительной мнимой частью*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **157** (1987), 55–69.

[13] Коплиенко Л. С., *К теории функции спектрального сдвига*, Спектральная теория, Пробл. мат. физ., вып. 5, ЛГУ, Л., 1971, сс. 62–72.

[14] Sobolev A. V., *Efficient bounds for the spectral shift function*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **58** (1993), no. 1, 55–83.

[15] Sobolev A. V., Yafaev D. R., *On the quasiclassical limit of the total scattering cross-section in nonrelativistic quantum mechanics*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **44** (1986), no. 2, 195–210.

[16] Соболев А. В., Яфаев Д. Р., *Спектральные свойства абстрактной матрицы рассеяния*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **188** (1990), 125–149.

[17] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980; English transl., D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

С.-Петербургский
государственный университет
Физический факультет
198904, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская ул., 1
E-mail: pushnit@mph.niif.spb.su

Поступило 20 января 1997 г.