A. O. Spiridonov, E. M. Karchevskii, A. I. Nosich, Muller boundary integral equations in the spectral theory of dielectric waveguides,
University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, 2015, Issue 1, 24–36

УДК 517.9

А. О. Спиридонов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЮЛЛЕРА В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Граничные интегральные уравнения Мюллера широко используются для теоретического и численного анализа самых разных спектральных задач математической теории дифракции. Они применялись и для вычисления поверхностных собственных волн однородных слабонаправляющих диэлектрических волноводов без потерь. Цель настоящей работы – разработать методику их применения для поиска не только поверхностных, но и вытекающих волн таких волноводов, а также исследовать с их помощью качественные свойства спектра.

Материалы и методы. Исследование качественных свойств спектра проведено методами теории регуляризации задач о собственных волнах открытых волноводов. Сведение исходной задачи к спектральной задаче для системы интегральных уравнений проведено методами теории потенциала. Дальнейший анализ основан на известных результатах об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, и о поведении характеристических значений такой оператор-функции, как функций неспектральных параметров.

Результаты. Доказано, что исходная задача для уравнения Гельмгольца на плоскости эквивалентна нелинейной спектральной задаче для граничных интегральных уравнений Мюллера с вполне непрерывным оператором. Доказано, что характеристическое множество построенной операторзначной функции может состоять лишь из изолированных точек на соответствующей поверхности Римана. Каждое характеристическое значение непрерывно зависит от неспектральных параметров и может появляться и исчезать лишь на границе этой поверхности.

Выводы. Разработанная методика применения граничных интегральных уравнений Мюллера может успешно применяться для решения спектральных задач теории диэлектрических волноводов, а именно для поиска поверхностных вытекающих собственных волн, а также для исследования качественных свойства спектра.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн в волноводе, задача на собственные значения, интегральные уравнения.

A. O. Spiridonov, E. M. Karchevskiy, A. I. Nosich

MULLER BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS IN THE SPECTRAL THEORY OF DIELECTRIC WAVEGUIDES

[1] Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности.

Abstract.

Background. Muller boundary integral equations are widely used for theoretical and numerical analysis of various spectral problems of the mathematical theory of diffraction. They are also used for calculation of superficial own waves of homogeneous weakly guiding dielectric waveguides without losses. The aim of the work is to develop a method of using the latter for searching of both superficial and leaky waves of such waveguides, and also to research qualitative spectral proprties.

Materials and methods. The research of qualitative spectral properties was carried out using the methods of the theory of regularization of problems of open waveguides' own waves. Reduction of the initial problem to a spectral problem for the system of integral equations was carried out by the potential theory methods. The further analysis is based on the known results on isolation of characteristic values of the Fredholm holomorphic operator-function with the presence of at least one regular point in the area of its holomorphy, and on behavior of characteristic values of such operator-function as a function of non-spectral parameters.

Results. It is proved that the initial problem for the surface Helmholtz equation is equivalent to a nonlinear spectral problem for Muller boundary integral equations with a quite continuous operator. It is proved that the characteristic set of the built operator-value function may consist of only isolated points on the corresponding Riemann surface. Each characteristic value continuously depends on nonspectral parameters and may occur and disappear on the boundary of this surface.

Cocnlusions. The developed technique of Muller boundary integral equations application may be successfully implemented for solving spectral problems of the theory of dielectric waveguides, namely for searching superficial leaky own waves, as well as for researching qualitative spectral properties.

Key words: propagation of electromagnetic waves in waveguides, eigenvalue problem, integral equations.

Введение

Граничные интегральные уравнения Мюллера [1] являются надежным инструментом теоретического и численного анализа самых разных спектральных задач математической теории дифракции (см., напр., статью [2] и обзор литературы в этой работе). Они применялись и для вычисления поверхностных собственных волн однородных слабонаправляющих диэлектрических волноводов без потерь [3, 4]. В настоящей работе мы используем их для поиска не только поверхностных, но и вытекающих волн [5] таких волноводов, а также исследуем качественные свойства спектра методами теории регуляризации задач о собственных волнах открытых волноводов [6, 7]. Доказывается, что исходная задача для уравнения Гельмгольца на плоскости эквивалентна нелинейной спектральной задаче для граничных интегральных уравнений Мюллера с вполне непрерывным оператором. Доказывается, что характеристическое множество построенной операторзначной функции может состоять лишь из изолированных точек на соответствующей поверхности Римана. Каждое характеристическое значение непрерывно зависит от неспектральных параметров и может появляться и исчезать лишь на границе этой поверхности.

1. Постановка задачи и локализация спектра

Сформулируем, следуя [8, с. 38], задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянной диэлектрической проницаемостью, близкой к диэлектричской проницаемости окружающей среды. Пусть область поперечного сечения волновода Ω_i на плоскости R^2 ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром Γ (рис. 1). Диэлектрическая проницаемость ε является кусочно-постоянной функцией, а именно равна константе ε_i в области $\bar{\Omega}_i$, а в области $\Omega_e = R^2 \setminus \bar{\Omega}_i$ – константе ε_e. Пусть $0 < \varepsilon_e < \varepsilon_i$. Будем считать, что постоянная распространения β – неизвестный комплексный параметр, $k > 0$ – заданное продольное волновое число. В скалярном приближении слабонаправляющего волновода задача сводится [8] к отысканию таких значений параметра β, при которых существуют нетривиальные решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \chi_i^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \tag{1}$$

$$\Delta u + \chi_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \tag{2}$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

где

$$\chi_i = \sqrt{k^2 \varepsilon_i - \beta^2}\,,\ \chi_e = \sqrt{k^2 \varepsilon_e - \beta^2}\,,$$

$\partial u / \partial \nu$ – производная по нормали к контуру Γ, внешней относительно области Ω_i; $u^+(u^-)$ – предельное значение функции u извне (изнутри) контура Γ.

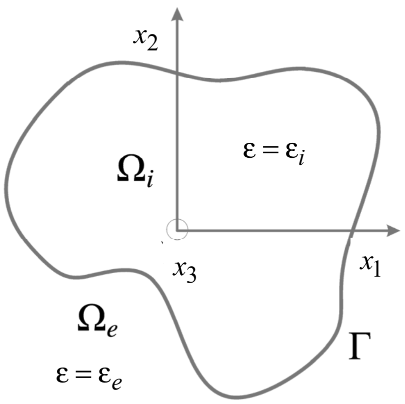

Рис. 1. Поперечное сечение волновода

Будем предполагать, что функция u удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения, т.е. при $|x| \geqslant R_0$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_e r) e^{il\varphi},$$

где $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$; $H_l^{(1)}$ – функции Ханкеля первого рода порядка l.

Обозначим буквой U множество функций, непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}_i$ и $\bar{\Omega}_e$, дважды непрерывно дифференцируемых в Ω_i и Ω_e, удовлетворяющих условию (4). Будем предполагать, что постоянные распространения β принадлежат множеству Λ – пересечению римановых поверхностей Λ_i и Λ_e функций $\ln\chi_+(\beta)$ и $\ln\chi_e(\beta)$, соответственно

$$\Lambda = \Lambda_i \cap \Lambda_e. \tag{4}$$

Строение поверхности Λ_e подробно рассмотрено в [7] . Строение поверхности Λ_i абсолютно аналогично. Обозначим

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{i0}^{(1)} \cap \Lambda_{e0}^{(1)}$$

пересечение главных («физических») листов этих поверхностей, определяемых условиями:

$$-\pi/2 < \arg\chi_i(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_i(\beta)) \geqslant 0, \quad \beta \in \Lambda_{i0}^{(1)},$$

$$-\pi/2 < \arg\chi_e(\beta) < 3\pi/2, \quad \operatorname{Im}(\chi_e(\beta)) \geqslant 0, \quad \beta \in \Lambda_{e0}^{(1)}.$$

Обозначим вещественную ось листа $\Lambda_0^{(1)}$ символом $R_0^{(1)}$, пусть

$$G = \left\{\beta \in R_0^{(1)} : k^2\varepsilon_e < \beta^2 < k^2\varepsilon_i\right\}.$$

Ненулевую функцию $u \in U$ будем называть собственной функцией задачи о собственных волнах слабонаправляющего волновода, отвечающей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (1)–(3).

Сформулируем известный результат о локализации собственных значений этой задачи.

Теорема 1. На листе $\Lambda_0^{(1)}$ собственные значения задачи (1)–(3) могут лежать лишь в области G.

Доказательство этого утверждения приведено в монографии [7, с. 40]. Вещественным $\beta \in G$ соответствуют поверхностные волны (u экспоненциально убывает при $r \to \infty$). Комплексным $\beta \in \Lambda_0^{(2)}$ отвечают вытекающие волны (тогда $\operatorname{Im}\chi_e(\beta) < 0$ и функция u экспоненциально возрастает при $r \to \infty$). Теорема 1 обобщает результаты [5] о локализации спектра собственных волн слабонаправляющего диэлектрического волновода кругового сечения, полученные на основе анализа характеристического уравнения метода разделения переменных.

2. Граничные интегральные уравнения Мюллера

Сведем задачу (1)–(3) методами теории потенциалов к спектральной задаче для интегральной оператор-функции. Большинство результатов теории потенциалов, которые мы будем использовать, являются классическими и хорошо известны. Их можно найти, например, в книгах [9, 10]. Менее традиционно изучение поведения потенциалов на бесконечности как функций, удовлетворяющих парциальным условиям излучения. Аналогичные построения содержатся в монографиях [8, 11].

Введем в рассмотрение функции

$$G_i(\beta;x,y)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\chi_i(\beta)|x-y|\right), \tag{5}$$

$$G_e(\beta;x,y)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(\chi_e(\beta)|x-y|\right), \tag{6}$$

здесь

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, \tag{7}$$

параметр β предполагается комплексным, принадлежащим множеству Λ, определенному формулой (4).

Функции (5), (6) удовлетворяют уравнениям

$$\Delta G_i(\beta;x,y)+\chi_i^2(\beta)G_i(\beta;x,y)=0, \tag{8}$$

$$\Delta G_e(\beta;x,y)+\chi_e^2(\beta)G_e(\beta;x,y)=0, \tag{9}$$

как функции переменной x при любой фиксированном $y\neq x$. Они имеют логарифмическую особенность при $y=x$. С помощью теоремы сложения Графа [12, с. 201] легко показать, что функция $G_e(\beta;x,y)$ при любых $\beta\in\Lambda$ и $y\in R^2$ удовлетворяет условию (4), поскольку

$$G_e(\beta;x,y)=\frac{i}{4}\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(\chi_e r(y))e^{-il\varphi(y)}H_l^{(1)}(\chi_e r(x))e^{il\varphi(x)}. \tag{10}$$

Аналогичному условию удовлетворяет функция $G_i(\beta;x,y)$, определенная формулой (5):

$$G_i(\beta;x,y)=\frac{i}{4}\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_l(\chi_i r(y))e^{-il\varphi(y)}H_l^{(1)}(\chi_i r(x))e^{il\varphi(x)}. \tag{11}$$

Поэтому функции (5), (6) можно называть функциями Грина для уравнений Гельмгольца (8), (9), удовлетворяющими на бесконечности парциальным условиям излучения. Отметим, что, в отличие от функций (5), (6), другая пара фундаментальных решений уравнений Гельмгольца (8), (9), а именно функции

$$\frac{i}{4}H_0^{(2)}\left(\chi_i(\beta)|x-y|\right) \text{ и } \frac{i}{4}H_0^{(2)}\left(\chi_e(\beta)|x-y|\right),$$

где $H_0^{(2)}$ – функция Ханкеля второго рода нулевого порядка, парциальным условиям излучения (10), (11) не удовлетворяют.

Лемма 1. Если u – собственная функция задачи (1)–(3), отвечающая собственному значению $\beta\in\Lambda$, то

$$u(x) = -\int_\Gamma \left(u^-(y)\frac{\partial G_i(\beta;x,y)}{\partial\nu(y)} - G_i(\beta;x,y)\frac{\partial u^-(y)}{\partial\nu(y)} \right) dl(y), \quad x\in\Omega_i, \qquad (12)$$

$$u(x) = \int_\Gamma \left(u^+(y)\frac{\partial G_e(\beta;x,y)}{\partial\nu(y)} - G_e(\beta;x,y)\frac{\partial u^+(y)}{\partial\nu(y)} \right) dl(y), \quad x\in\Omega_e. \qquad (13)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (12) надо применить в области Ω_i вторую формулу Грина к функции Грина G_i и собственной функции u, отвечающей собственному значению $\beta\in\Lambda$. В справедливости формулы (13) легко убедиться аналогичным методом. При этом надо использовать известное равенство [13, с. 35]:

$$\int_{\Gamma_R} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial r(y)} G_e(\beta;x,y) - \frac{\partial G_e(\beta;x,y)}{\partial r(y)} u(y) \right] dl(y) = 0, \quad R \geqslant R_0.$$

Оно верно для любого $\beta\in\Lambda$ и функции $u\in U$, удовлетворяющей условию (4). Здесь Γ_R – окружность радиуса R с центром в начале координат. Лемма доказана.

Устремим в интегральных представлениях (12), (13) точку x к контуру Γ с двух разных сторон. Используем предельные свойства потенциалов простого и двойного слоя. Здесь и далее под производной по нормали будем понимать правильную нормальную производную. Получим следующие равенства при $x\in\Gamma$:

$$u^-(x) = -\int_\Gamma u^-(y)\frac{\partial G_i(x,y)}{\partial\nu(y)} dl(y) + \frac{1}{2}u^-(x) + \int_\Gamma G_i(x,y)\frac{\partial u^-(y)}{\partial\nu(y)} dl(y), \qquad (14)$$

$$u^+(x) = \int_\Gamma u^+(y)\frac{\partial G_e(x,y)}{\partial\nu(y)} dl(y) + \frac{1}{2}u^+(x) - \int_\Gamma G_e(x,y)\frac{\partial u^+(y)}{\partial\nu(y)} dl(y). \qquad (15)$$

Обозначим

$$u(x) = u^+(x) = u^-(x), \quad v(x) = \frac{\partial u^+(x)}{\partial\nu(x)} = \frac{\partial u^-(x)}{\partial\nu(x)}, \quad x\in\Gamma. \qquad (16)$$

Сложим почленно равенства (14), (15) и используем (16), получим

$$u(x) + \int_\Gamma u(y)\left(\frac{\partial G_i(x,y)}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial G_e(x,y)}{\partial\nu(y)} \right) dl(y) -$$

$$-\int_\Gamma v(y)\big(G_i(x,y)-G_e(x,y)\big)dl(y)=0,\quad x\in\Gamma. \tag{17}$$

Вычислим производную по нормали от левой и правой частей интегральных представлений (12), (13):

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\nu(x)}=-\int_\Gamma u^-(y)\frac{\partial^2 G_i(x,y)}{\partial\nu(x)\partial\nu(y)}dl(y)+\int_\Gamma\frac{G_i(x,y)}{\partial\nu(x)}\frac{\partial u^-(y)}{\partial\nu(y)}dl(y),\quad x\in\Omega_i, \tag{18}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\nu(x)}=\int_\Gamma u^+(y)\frac{\partial^2 G_e(x,y)}{\partial\nu(x)\partial\nu(y)}dl(y)-\int_\Gamma\frac{G_e(x,y)}{\partial\nu(x)}\frac{\partial u^+(y)}{\partial\nu(y)}dl(y),\quad x\in\Omega_e. \tag{19}$$

Устремим в формулах (18), (19) точку x к контуру Γ с двух разных сторон. Используем предельные свойства нормальных производных потенциалов простого и двойного слоя. Получим следующие равенства:

$$\frac{\partial u^-(x)}{\partial\nu(x)}=-\int_\Gamma u^-(y)\frac{\partial^2 G_i(x,y)}{\partial\nu(x)\partial\nu(y)}dl(y)+$$

$$+\int_\Gamma\frac{G_i(x,y)}{\partial\nu(x)}\frac{\partial u^-(y)}{\partial\nu(y)}dl(y)+\frac{1}{2}\frac{\partial u^-}{\partial\nu}(x),\quad x\in\Gamma; \tag{20}$$

$$\frac{\partial u^+(x)}{\partial\nu(x)}=\int_\Gamma u^+(y)\frac{\partial^2 G_e(x,y)}{\partial\nu(x)\partial\nu(y)}dl(y)-$$

$$-\int_\Gamma\frac{G_e(x,y)}{\partial\nu(x)}\frac{\partial u^+(y)}{\partial\nu(y)}dl(y)+\frac{1}{2}\frac{\partial u^+}{\partial\nu}(x),\quad x\in\Gamma. \tag{21}$$

Сложим почленно равенства (20) и (21), используем (16), получим

$$v(x)+\int_\Gamma u(y)\left(\frac{\partial^2 G_i(x,y)}{\partial\nu(x)\partial\nu(y)}-\frac{\partial^2 G_e(x,y)}{\partial\nu(x)\partial\nu(y)}\right)dl(y)-$$

$$-\int_\Gamma v(y)\left(\frac{G_i(x,y)}{\partial\nu(x)}-\frac{G_e(x,y)}{\partial\nu(x)}\right)dl(y)=0,\quad x\in\Gamma. \tag{22}$$

Система граничных интегральных уравнений (17), (22) называется системой Мюллера. Запишем ее в следующем виде:

$$u(x)+\int_\Gamma K_{1,1}(\beta;x,y)u(y)dl(y)-\int_\Gamma K_{1,2}(\beta;x,y)v(y)dl(y)=0,\quad x\in\Gamma; \tag{23}$$

$$v(x)+\int_\Gamma K_{2,1}(\beta;x,y)u(y)dl(y)\ -\int_\Gamma K_{2,2}(\beta;x,y)v(y)dl(y)=0,\quad x\in\Gamma, \tag{24}$$

здесь

$$K_{1,1}(\beta; x, y) = \frac{\partial G_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial G_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)}; \tag{25}$$

$$K_{1,2}(\beta; x, y) = G_i(\beta; x, y) - G_e(\beta; x, y); \tag{26}$$

$$K_{2,1}(\beta; x, y) = \frac{\partial^2 G_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} - \frac{\partial^2 G_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)}; \tag{27}$$

$$K_{2,2}(\beta; x, y) = \frac{G_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{G_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}. \tag{28}$$

Изучим особенности ядер (25)–(28) при совпадении аргументов x и y. Вычислим нормальные производные функций Грина:

$$\frac{\partial G_{i/e}(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} = \frac{i}{4} \chi_{i/e} H_1^{(1)}(\chi_{i/e} |x - y|) \frac{\left((x - y) \cdot \nu(y)\right)}{|x - y|}; \tag{29}$$

$$\frac{\partial G_{i/e}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{i}{4} \chi_{i/e} H_1^{(1)}(\chi_{i/e} |x - y|) \frac{\left((x - y) \cdot \nu(x)\right)}{|x - y|}; \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 G_{i/e}(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} = -\frac{i\chi_{i/e}^2}{4} H_2^{(1)}(\chi_{i/e} |x - y|) \frac{((x - y) \cdot \nu(y))((x - y) \cdot \nu(x))}{|x - y|^2} +$$

$$+\frac{i\chi_{i/e}}{4} H_1^{(1)}(\chi_{i/e} |x - y|) \frac{(\nu(x) \cdot \nu(y))}{|x - y|}. \tag{31}$$

Здесь $(a \cdot b)$ – стандартное скалярное произведение векторов a и b в пространстве R^2. Хорошо известно [14], что если кривая имеет непрерывную кривизну, то

$$\lim_{|x - y| \to 0} \frac{\left((x - y) \cdot \nu(x)\right)}{|x - y|^2} = \frac{\xi}{2}, \tag{32}$$

где ξ – кривизна кривой в точке x. Используя равенства (29)–(31), предел (32), а также известные асимптотические свойства функций Ханкеля [12], легко доказать следующую лемму.

Лемма 2. При любом $\beta \in \Lambda$ ядра (25), (26), (28) не имеют особенности при совпадении аргументов x и y, а именно

$$\lim_{|x - y| \to 0} K_{1,1}(\beta; x, y) = \lim_{|x - y| \to 0} K_{2,2}(\beta; x, y) = 0,$$

$$\lim_{|x - y| \to 0} K_{1,2}(x, y) = \frac{\ln \chi_e - \ln \chi_i}{2\pi}.$$

При любом $\beta \in \Lambda$ ядро (27) имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов x и y, точнее, при $|x - y| \to 0$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$K_{2,1}(x,y) \approx \frac{i(\chi_i^2-\chi_e^2)}{8} + \frac{\chi_e^2 \ln\chi_e - \chi_i^2 \ln\chi_i}{4\pi} + \frac{\chi_e^2-\chi_i^2}{4\pi}\left[\ln|x-y| - \ln 2 - \psi(1) - \frac{1}{2}\right],$$

где ψ – пси-функция.

3. Дискретность характеристического множества и зависимость характеристических значений от параметров

Пусть C – пространство функций, непрерывных на контуре Γ, с нормой

$$\| u \|_C = \max_{x\in\Gamma} |u(x)|.$$

Для каждого $\beta\in\Lambda$ определим интегральные операторы

$$B_{i,j}(\beta): C \to C, \quad i,j = 1,2,$$

с помощью следующих равенств:

$$\left(B_{i,j}(\beta)u\right)(x) = \int_\Gamma K_{i,j}(\beta;x,y)u(y)dl(y), \quad x\in\Gamma.$$

Здесь, как и прежде, через $K_{i,j}$, $j=1,2,$ обозначены ядра (25)–(28) системы интегральных уравнений Мюллера (23), (24). В предыдущем пункте мы доказали, что лишь ядро $K_{2,1}$ имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов, все остальные ядра непрерывны. Хорошо известно [15], что интегральные операторы с такими ядрами являются вполне непрерывными в пространстве C.

Запишем теперь систему (23), (24) в виде операторного уравнения

$$A(\beta)w = (I + B(\beta))w = 0, \tag{33}$$

где $w = (u,v)^T$, $u,v\in C$; вполне непрерывный оператор $B: W\to W$, $W = C\times C$, определен при помощи равенства

$$Bw = \begin{bmatrix} B_{1,1} & -B_{1,2} \\ B_{2,1} & -B_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

символом I обозначен единичный оператор.

Теорема 2. Положим $R_+ = \{x\in R : x>0\}$. При каждом фиксированном $(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)\in\Lambda\times R_+^3$ оператор $A(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e): W\to W$ фредгольмов. При каждом фиксированном $(k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)\in R_+^3$ оператор-функция $A(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)$ голоморфна по $\beta\in\Lambda$. Оператор-функция $A(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)$ непрерывна по переменным $(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)\in\Lambda\times R_+^3$.

Доказательство. При любом $(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)\in\Lambda\times R_+^3$ оператор $A(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)$ фредгольмов в силу полной непрерывности оператора $B(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)$. Рассуждая аналогично [16, с. 459], можно показать, что оператор-функция $A(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)$ голоморфна по $\beta\in\Lambda$ и непрерывна по $(\beta;k,\varepsilon_i,\varepsilon_e)\in\Lambda\times R_+^3$. Теорема доказана.

Ненулевой элемент $w\in W$ будем называть собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta\in\Lambda$, если выполнено уравнение (33). Характеристическим множеством оператор-функции $A(\beta)$ будем называть множество чисел $\beta\in\Lambda$, для которых оператор $A(\beta)$ не имеет ограниченного обратного в W (это множество называют также сингулярным). Будем обозначать его символом $\sigma(A)$. Обозначим множество регулярных точек оператора $A(\beta)$ через $\rho(A)=\Lambda\setminus\sigma(A)$.

Изучим качественные свойства характеристического и регулярного множеств оператор-функции $A(\beta)$. С этой целью прежде всего докажем полную спектральную эквивалентность задач (1)–(3) и (33).

Теорема 3. Если функция $w=(u_0,v_0)^T\in W$ является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta_0\in\Lambda$, то функция u, определяемая равенствами (12), (13), где

$$\beta=\beta_0,\quad u^+=u^-=u_0,\quad \frac{\partial u^+}{\partial\nu}=\frac{\partial u^-}{\partial\nu}=v_0, \tag{34}$$

является собственной функцией задачи (1)–(3), отвечающей собственному значению β_0. Любая собственная функция $u\in U$ задачи (1)–(3), отвечающая собственному значению $\beta_0\in\Lambda$, может быть представлена в виде (12), (13). При этом функция

$$w=\left(u^+,\frac{\partial u^+}{\partial\nu}\right)^T=\left(u^-,\frac{\partial u^-}{\partial\nu}\right)^T \tag{35}$$

является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению β_0.

Доказательство. Предположим, что $w=(u_0,v_0)^T\in W$ является собственной функцией оператор-функции $A(\beta)$, отвечающей характеристическому значению $\beta_0\in\Lambda$. Построим функцию u по формулам (12), (13) и (34). Хорошо известно [10], что такая функция не равна тождественно нулю, удовлетворяет требуемым свойствам гладкости, а также уравнениям Гельмгольца (1) и (2). Ясно, что условия сопряжения (3) выполнены. С помощью теоремы сложения Графа [12, с. 201] легко показать, что функция u удовлетворяет условию (4). Итак, функция u является собственной функцией задачи (1)–(3), отвечающей собственному значению β_0. Обратное утверждение теоремы сразу вытекает из леммы 1 и построения оператор-функции $A(\beta)$. Следует заметить лишь, что любая функция w вида (35), где $u\in U$, принадлежит W. Теорема доказана.

Теоема 4. Регулярное множество оператор-функции $A(\beta)$, определенной в (33), не пусто, а именно $\Lambda_0\setminus G\subset\rho(A)$. Характеристическое множество $\sigma(A)$ оператор-функции $A(\beta)$ может состоять лишь из изолированных точек, являющихся характеристическими значениями оператор-функции $A(\beta)$. Каждое ее характеристическое значение β непрерывно зависит от параметров $(k,\varepsilon_+,\varepsilon_\infty)\in R_+^3$. Кроме того, с изменением $(k,\varepsilon_+,\varepsilon_\infty)\in R_+^3$ характеристические значения оператор-функции $A(\beta)$ могут появляться и исчезать только на границе множества Λ, т.е. в точках $\pm kn_+,\pm kn_\infty$ и на бесконечности.

Доказательство. В силу фредгольмовости оператора $A(\beta)$ при каждом фиксированном $(\beta;k,\varepsilon_+,\varepsilon_\infty)\in \Lambda\times R_+^3$ (установленной в теореме 2), теоремы 1 о локализации собственных значений задачи (1)–(3) и теоремы 3 о связи решений задач (1)–(3) и (33) оператор $A(\beta;k,\varepsilon_+,\varepsilon_\infty)$ обратим для любых значений $(\beta;k,\varepsilon_+,\varepsilon_\infty)\in(\Lambda_0\setminus G)\times R_+^3$. Таким образом, справедливость настоящей теоремы следует из свойств оператор-функции $A(\beta;k,\varepsilon_+,\varepsilon_\infty)$, установленных в теореме 2, теоремы И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна [17] об изолированности характеристических значений фредгольмовой голоморфной оператор-функции $A(\beta)$ при наличии в области ее голоморфности хотя бы одной регулярной точки, теоремы S. Steinberg [18] о поведении характеристических значений такой оператор-функции в зависимости от изменения вещественного параметра k в случае, если оператор-функция является совместно непрерывной функцией β и k. Отметим, что теорема S. Steinberg справедлива для частного случая (который как раз и рассматривается нами), когда оператор-функция $A(\beta,k)$ имеет вид $A(\beta,k)=I+B(\beta,k)$, где оператор $B(\beta,k)$ вполне непрерывен. Теорема доказана.

Список литературы

1. **Muller, C.** Grundproblems der Mathematischen Theorie Elektromagnetis-cher Schwingungen / C. Muller. – Berlin : Springer, 1957. – 345 p.
2. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser / E. I. Smotrova, V. Tsvirkun, I. Gozhyk, C. Lafargue, C. Ulysse, M. Lebental, A. I. Nosich // J. Opt. Soc. Am. B. – 2013. – Vol. 30, № 6. – P. 1732–1742.
3. **Eyges, L.** Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape / L. Eyges, P. Gianino, P. Wintersteiner // J. Opt. Soc. Am. – 1979. – Vol. 69, № 9. – P. 1226–1235.
4. **Wang, L.** Modal analysis of homogeneous optical waveguides by the boundary integral formulation and the Nystroem method / L. Wang, J. A. Cox, A. Friedman // J. Opt. Soc. Am. A. – 1998. – Vol. 15, № 1. – P. 92–100.
5. **Снайдер, А.** Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – М. : Радио и связь, 1987. – 656 с.
6. **Karchevskii, E.** Methods of analytical regularization in the spectral theory of open waveguides (invited paper) / E. Karchevskii, A. Nosich // Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2014. – P. 39–45.
7. **Kartchevski, E. M.** Mathematical analysis of the generalized natural modes of an inhomogeneous optical fiber / E. M. Kartchevski, A. I. Nosich, G. W. Hanson // SIAM J. Appl. Math. – 2005. – Vol. 65, № 6. – P. 2033–2048.

8. **Даутов, Р. З.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов / Р. З. Даутов, Е. М. Карчевский. – Казань : Казан. гос. ун-т, 2009. – 271 с.
9. **Бицадзе, А. В.** Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1981. – 448 с.
10. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – 312 с.
11. **Shestopalov, Yu. V.** Logarithmic integral equations in electromagnetics. / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, E. V. Chernokozhin. – VSP, 2000. – 117 p.
12. **Никифоров, А. Ф.** Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М. : Наука, 1974. – 303 с.
13. **Ильинский, А. С.** Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн / А. С. Ильинский, Ю. В. Шестопалов. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 184 с.
14. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
15. **Kress, R.** Linear integral equations / R. Kress. – New York : Springer-Verlag, 1999. –365 p.
16. **Като, Т.** Теория возмущений линейных операторов. / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.
17. **Гохберг, И. Ц.** Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Успехи математических наук. – 1957. – Т. 12, № 2. – С. 44–118.
18. **Steinberg, S.** Meromorphic families of compact operators / S. Steinberg // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – Vol. 31, № 5. – P. 372–379.

References

1. Muller C. *Grundproblems der Mathematischen Theorie Elektromagnetis-cher Schwingungen* [Grundproblems the Mathematical theory Elektromagnetis-cher vibrations]. Berlin: Springer, 1957, 345 p.
2. Smotrova E. I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A. I. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742.
3. Eyges L., Gianino P., Wintersteiner P. *J. Opt. Soc. Am*. 1979, vol. 69, no. 9, pp. 1226–1235.
4. Wang L., Cox J. A., Friedman A. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1998, vol. 15, no. 1, pp. 92–100.
5. Snayder A., Lav Dzh. *Teoriya opticheskikh volnovodov* [Theory of optical waveguides]. Moscow: Radio i svyaz', 1987, 656 p.
6. Karchevskii E., Nosich A. *Proceedings of International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2014, pp. 39–45.
7. Kartchevski E. M., Nosich A. I., Hanson G. W. *SIAM J. Appl. Math.* 2005, vol. 65, no. 6, pp. 2033–2048.
8. Dautov R. Z., Karchevskiy E. M. *Metod integral'nykh uravneniy i tochnye nelokal'nye granichnye usloviya v teorii dielektricheskikh volnovodov* [Method of integral equations and precise nonlocal boundary conditions in the theory of dielectric waveguides]. Kazan: Kazan. gos. un-t, 2009, 271 p.
9. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some equation classes in partial derivatives]. Moscow: Nauka, 1981, 448 p.
10. Kolton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya* [Methods of integral equations in the scattering theory]. Moscow: Mir, 1987, 312 p.
11. Shestopalov Yu. V., Smirnov Yu. G., Chernokozhin E. V. *Logarithmic integral equations in electromagnetics*. VSP, 2000, 117 p.

12. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. *Osnovy teorii spetsial'nykh funktsiy* [Basic theory of special functions]. Moscow: Nauka, 1974, 303 p.
13. Il'inskiy A. S., Shestopalov Yu. V. *Primenenie metodov spektral'noy teorii v zadachakh rasprostraneniya voln* [Application of spectral theory methods in the wave propagation problems]. Moscow: Izd-vo MGU, 1989, 184 p.
14. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Izd-vo MGU, 1999, 799 p.
15. Kress R. *Linear integral equations*. New York: Springer-Verlag, 1999, 365 p.
16. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Theory of linear operators' disturbance]. Moscow: Mir, 1972, 740 p.
17. Gokhberg I. Ts., Kreyn M. G. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1957, vol. 12, no. 2, pp. 44–118.
18. Steinberg S. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1968, vol. 31, no. 5, pp. 372–379.

Спиридонов Александр Олегович
аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Spiridonov Aleksandr Olegovich
Postgraduate student, Kazan (Volga region) Federal University (18 Kremlevskaya street, Kazan, Russia)

E-mail: sasha_ens@mail.ru

Карчевский Евгений Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

Karchevskiy Evgeniy Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of applied mathematics, Kazan (Volga region) Federal University (18 Kremlevskaya street, Kazan, Russia)

E-mail: sasha_ens@mail.ru

Носич Александр Иосифович
доктор физико-математических наук, профессор, лаборатория микро- и нанооптики, Институт радиофизики и электроники Национальной академии наук Украины (Украина, г. Харьков, ул. Академика Проскуры, 12)

Nosich Aleksandr Iosifovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, laboratory of micro and nanooptics, Institute of Radio Physics and Electronics of the National Academy of Sciences of Ukraine (12 Akademika Proskury street, Kharkov, Ukraine)

E-mail: sasha_ens@mail.ru

УДК 517.9

Спиридонов, А. О.

Граничные интегральные уравнения мюллера в спектральной теории диэлектрических волноводов / А. О. Спиридонов, Е. М. Карчевский, А. И. Носич // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 24–36.