



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, Об инвариантности характеристических классов для многообразий гомотопического типа CP^n , УМН, 1973, том 28, выпуск 5, 245–246

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.239.3.196

14 октября 2024 г., 07:31:33



ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ
ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ГОМОТОПИЧЕСКОГО ТИПА CP^n

И. М. Кричевер

В работе [1] сформулирована гипотеза о том, что существования нетривиального действия группы S^1 на многообразии X гомотопического типа CP^n достаточно для инвариантности \hat{A} -рода $\hat{A}(x) \subset H^*(X, Q)$, там же доказано, что при некоторых условиях на действия с изолированными неподвижными точками \hat{A} -род действительно инвариантен. В настоящей заметке класс таких условий значительно расширен.

1. Если G — компактная группа Ли, то для любого G -многообразия определен гомоморфизм Гизина $p_! : \Omega_{SO}^*(M \times EG/G) \rightarrow \Omega_{SO}^*(BG)$. Для векторного G -пучка ξ над M обозначим через ξ_G , соответствующий ему пучок над $(M \times EG)/G$, $e(\xi_G)$ — его эйлеров класс.

Т е о р е м а. Если действие группы G на многообразии M имеет лишь изолированные неподвижные точки, то найдется такое представление $\Delta = \Delta' + \sum_i \Delta_i$ (Δ_i — представление G в слое касательного пучка в i -й неподвижной точке; $\tilde{\Delta}_i$ — представление в слое G -пучка ξ), что $e(\Delta) \cdot p_! e(\xi_G) = \sum_i e(\tilde{\Delta}_i) e(\Delta - \Delta_i)$, где $e(\Delta)$ — эйлеров класс пучка над BG , ассоциированного с представлением Δ .

Л е м м а. Если e — гомоморфизм аргументации, то $e(p_! e(\xi_G)) = eD(e(\xi))$.

2. Пусть на многообразии X $h: X \rightarrow CP^n$ — сохраняющая ориентацию гомотопическая эквивалентность, действие S^1 имеет лишь изолированные неподвижные точки. Заметим, что их число равно $n + 1$.

Через δ обозначим представление S^1 с характером z^δ и соответствующий S^1 -пучок над S^1 -многообразием. Пусть δ_i $1 \leq i \leq n + 1$, — представления в слоях над неподвижными точками S^1 -пучка η' , который получен из пучка $h^*\eta$ поднятием действия S^1 с базы.

Применяя результаты предыдущего пункта к S^1 -пучку $m\eta'$, $0 \leq m \leq n$, получим в кольце $\Omega_{SO}^*(CP^\infty) = \Omega_{SO}^*[[u]]$ равенства

$$(1) \quad \prod_k e(\Delta_k) p_! e(m\eta'_{S^1}) = \sum_i e(\delta_i)^m \prod_{k \neq i} e(\Delta_k),$$

$$p_! e(m\eta'_{S^1}) = [h^*v^m \cap X] + \text{чл. старших степеней по } u.$$

Здесь $v = \sigma_1(\eta) \in \Omega_{SO}^2(CP^n)$, \cap — оператор высечения Чеха. Обозначим $\zeta_j = p_! e(\sum_{l \neq j} \eta' \otimes (-\delta_l))$, тогда $\prod_k e(\Delta_k) \zeta_j = \sum_i \prod_{l \neq j} e(\delta_i - \delta_l) \prod_{k \neq i} e(\Delta_k)$. Отсюда следует

$$(2) \quad \prod_k e(\Delta_k) \zeta_j = \prod_{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l) \prod_k e(\Delta_k).$$

$\zeta_j = 1 + \text{чл. старших степеней по } u$. Сравнивая коэффициенты при младшей степени u в равенстве (2), получим

С л е д с т в и е 1. Пусть представление Δ_j раскладывается в сумму одномерных представлений x_{js} , $1 \leq s \leq n$, тогда $\prod_s x_{js} = \prod_{l \neq j} (\delta_j - \delta_l)$.

З а м е ч а н и е. Так как все $x_{js} \neq 0$, то $\delta_j \neq \delta_l$, если $j \neq l$. Значит, действие S^1 на CP^n , индуцированное представлением $-\sum_i \delta_i$, имеет изолированные неподвижные точки. Представления, индуцированные этим действием, в слоях касательного и канонического пучков равны $\sum_{l \neq j} (\delta_j - \delta_l)$ и δ_j соответственно.

Из (1) и (2) получаем

$$(3) \quad \prod_j \prod_{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l) p_! (m\eta'_{S^1}) = \sum_i [e(\delta_i)^m \zeta_i \prod_{j \neq i} \prod_{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l)].$$

Из сделанного выше замечания следует, что

$$(4) \quad \prod_j \prod_l^{l \neq j} e(\delta_j - \delta_l) \tilde{p}_l e(m\eta_{S^1}) = \sum e(\delta_i)^m \prod_j \prod_l^{j \neq i, l \neq j} e(\delta_j - \delta_l) \\ \tilde{p}_l e(m\eta_{S^1}) = [CP^{n-m}] + \text{чл. старших степеней по } u,$$

Здесь $\tilde{p}: (CP^n \times S^\infty)/S^1 \rightarrow CP^\infty$.

3. Рассмотрим произвольный мультипликативный Q -род. Ему соответствуют гомоморфизмы колец $Q: \Omega_{SO}^* \rightarrow Z$ и $Q^*: \Omega_{SO}^*(CP^\infty) \rightarrow Z[[u]]$. Из равенства (2) и из того, что $e(\delta) = g^{-1}(\delta g(u))$, где $g(u) = \sum \frac{[CP^n]}{n+1} u^{n+1}$ — логарифм формальной группы «геометрических» кобордизмов, следует $\zeta_j = \prod_l^{l \neq j} g^{-1}((\delta_j - \delta_l)g(u)) \cdot \left[\prod_s g^{-1}(x_{js}g(u)) \right]^{-1}$. Тогда $Q^*(\zeta_j)$ равны

$$(5) \quad Q^*(\zeta_j) = \prod_l^{l \neq j} g_Q^{-1}((\delta_j - \delta_l)g_Q(u)) \cdot \left[\prod_s g_Q^{-1}(x_{js}g_Q(u)) \right]^{-1}, \quad g_Q(u) = \sum \frac{Q[CP^n]}{n+1} u^{n+1}.$$

С л е д с т в и е 2. Пусть для некоторого мультипликативного рода такого, что все $s_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$, где λ_i — коэффициенты соответствующего ряда Хирцебруха, выполняется условие: Действие группы S^1 на многообразии таково, что выражения (5) не зависят от j , тогда $p_i(X) = h^*p_i(CP^n)$, p_i — характеристические классы Понтрягина.

П р и м е р ы выражений (5) для некоторых классических родов.

a) \hat{A} -род:
$$\prod_l^{l \neq j} (t^{\delta_j - \delta_l} - t^{\delta_l - \delta_j}) \cdot \prod_s (t^{x_{js}} - t^{-x_{js}})^{-1}.$$

b) L -род:
$$\prod_l^{l \neq j} \frac{(1+t)^{\delta_j - \delta_l} - (1-t)^{\delta_j - \delta_l}}{(1+t)^{\delta_j - \delta_l} + (1-t)^{\delta_j - \delta_l}} \cdot \prod_s \frac{(1+t)^{x_{js}} + (1-t)^{x_{js}}}{(1+t)^{x_{js}} - (1-t)^{x_{js}}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к равенствам (3) и (4) гомоморфизм Q^* . Из сравнения коэффициентов при младшей степени u получаем, что $Q([h^*v^m \cap X]) = = Q([v^m \cap CP^n])$. Отсюда и из того, что $H^*(X, Z)$ — урезанное кольцо полиномов, и вытекает доказываемое утверждение.

4. Следует отметить, что результаты этой заметки полностью переносятся на тот случай, когда X — квазикомплексное многообразие, а действия S^1 сохраняют комплексную структуру в стабильном касательном пучке.

С л е д с т в и е 3. Пусть для некоторого мультипликативного рода $Q: \Omega_u^* \rightarrow Z$, удовлетворяющего условиям следствия 2, выражения (5) не зависят от j , тогда классы Черна инвариантны, $c_i(X) = h^*(c_i(CP^n))$.

Дополним набор примеров в выражения (5) для некоторых родов.

c) T -род:
$$\prod_l^{l \neq j} (1 - (1-t)^{\delta_j - \delta_l}) \cdot \prod_s (1 - (1-t)^{x_{js}})^{-1}.$$

d) Эйлерова характеристика c_n :
$$\prod_l^{l \neq j} \frac{(\delta_j - \delta_l)t}{1 - t + (\delta_j - \delta_l)t} \cdot \prod_s \frac{1 - t + x_{js}t}{x_{js}t}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. P e t r i e, Smooth S^1 actions on homotopy complex projective spaces and related topics, Bull. AMS 78:2, 105–154.
 [2] И. М. К р и ч е в е р, Действия конечных циклических групп на квазикомплексных многообразиях, Матем. сб. 90:2 (1973).

Поступило в Правление общества 19 декабря 1972 г.