



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Половинкин, Реализация функционалов на пространствах $L_p^m(E_n)$,

Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 166–172

<https://www.mathnet.ru/smj433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

20 мая 2025 г., 00:21:55



РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРОСТРАНСТВАХ $L_p^m(E_n)^*$

В. И. Половинкин

В настоящей статье продолжают исследования из [1, 2], посвященные вопросам, связанным с реализацией линейных функционалов на пространствах $L_p^m(E_n)$ через билинейные формы от производных порядка m . Аналогичные вопросы ранее рассмотрены в [3] для пространства $W_p^m(\Omega)$, где Ω — ограниченная область, граница которой — бесконечно дифференцируемое многообразие. Центральное место занимает теорема 2, которая дает конкретное описание необходимого способа реализации произвольных линейных функционалов на $L_p^m(E_n)$, $p \in (1, \infty)$. Она усиливает результаты [2], где рассматривались лишь финитные функционалы. Кроме того, в зависимости от значений p , m , n выводятся некоторые формулы для функций, реализующих линейные функционалы на $L_p^m(E_n)$, отличные от тех, которые дает упомянутая выше теорема 2.

Обозначим через p, q, m, n положительные числа такие, что $n, p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, m, n натуральные; далее E_n — n -мерное евклидово пространство; Q — совокупность векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми компонентами такими, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$.

Пусть u_α — некоторые функции, зависящие от вектор-индексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Q$. Тогда сокращенно будем писать

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha} = m! \sum_{\alpha \in Q} (\alpha_1! \dots \alpha_n!)^{-1} u_{\alpha}$$

(здесь и далее равенство функций подразумевается как равенство почти всюду).

Для $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ положим

$$\int_{E_n} f(x) dx = \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Ниже будут использованы многие хорошо известные результаты и обозначения теории обобщенных функций, которые приводятся в гл. 1 из [4]. В частности, знак $*$ (не в верхнем индексе) будет обозначать свертку в смысле [4, с. 64]; δ — функция Дирака. Под выражением «обобщенные функции» будут пониматься линейные непрерывные функционалы над пространством финитных основных функций $D = D(E_n)$.

Положим: W_p^m — линейное многообразие функций, обладающих в E_n суммируемыми в степени p обобщенными производными порядка

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (код проекта 4F055).

m ; $L_p^m = L_p^m(E_n)$ — линейное нормированное пространство, индуцированное на W_p^m полунормой, заданной формулой

$$\|f\|_{L_p^m} = \left(\int \left(\sum_{\alpha} (f^{(\alpha)}(x))^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p},$$

где

$$f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

Если l — функционал, заданный на W_p^m , равный 0 на многочленах степени ниже m , который индуцирует функционал из сопряженного к L_p^m пространства L_p^{m*} , то индуцированный функционал также будет обозначаться через l . Через l будем обозначать также соответствующую обобщенную функцию.

Полагая $L_q = L_q(E_n)$ состоящим из таких функций f , что $\int |f(x)|^q dx < \infty$, через g_{β} , $\beta \in Q$ будем обозначать функции из L_q , удовлетворяющие условиям

$$(l, f) = \sum_{\beta} \int g_{\beta}(x) f^{(\beta)}(x) dx \quad \forall f \in W_p^m. \quad (1)$$

Один из возможных способов выбора функций g_{β} обеспечивает следующий результат, доказанный в [1] (при $p = q = 2$ он вытекает непосредственно из теоремы об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве).

Теорема 1. Для всякого функционала $l \in L_p^{m*}$ существует единственная с точностью до многочлена степени ниже m функция $u \in W_q^m$ такая, что

$$(l, f) = \sum_{\alpha} \int u^{(\alpha)}(x) f^{(\alpha)}(x) dx \quad \forall f \in W_p^m. \quad (2)$$

Формула (1) показывает, что функционал l индуцирует на D обобщенную функцию

$$l = (-1)^m \sum_{\beta} (g_{\beta})^{(\beta)} = (-1)^m \sum_{\beta} g_{\beta} * \delta^{(\beta)}. \quad (3)$$

Если $l \in L_p^{m*}$ и $f \in W_p^m$, то положим

$$(l \circ f)(x) = (l(y), f(x - y)). \quad (4)$$

Из (1) и (4) вытекает, что

$$\begin{aligned} (l \circ f)(x) &= (-1)^m \sum_{\beta} \int g_{\beta}(y) f^{(\beta)}(x - y) dy \\ &= (-1)^m \sum_{\beta} (g_{\beta} * f^{(\beta)})(x) = (-1)^m \sum_{\beta} (g_{\beta} * (f * \delta^{(\beta)}))(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (3), (5) показывают, что если при $\beta \in Q$

$$g_{\beta} * (f * \delta^{(\beta)}) = (g_{\beta} * \delta^{(\beta)}) * f, \quad (6)$$

то

$$l \circ f = l * f. \quad (7)$$

В частности, равенства (6), (7) выполняются, если f или g_β , $\beta \in Q$, финитны.

Обозначим через G фундаментальное решение в E_n полигармонического уравнения

$$\Delta^m v = 0. \quad (8)$$

Оно имеет следующий вид:

$$G(x) = \begin{cases} \kappa_{m,n} |x|^{2m-n} \ln |x| & \text{при } n \text{ четном, } 2m \geq n, \\ \kappa_{m,n} |x|^{2m-n} & \text{при остальных } m, n, \end{cases}$$

здесь $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $\kappa_{m,n}$ — соответствующие константы (их выражение см. в [5, с. 521] или в [1]).

Выберем произвольную функцию $\eta \in D$, равную 1 в некоторой окрестности начала координат. Например, за η можно взять «шапочку» из [4, с. 16].

$$\text{Положим } \widehat{G} = G\eta, \quad \overline{G} = G - \widehat{G}.$$

Теорема 2. Пусть $l \in L_p^{m*}$ и u — функция, соответствующая l в (2). Тогда при $\alpha \in Q$

$$u^{(\alpha)} = (-1)^m [l * \widehat{G}^{(\alpha)} + l \circ \overline{G}^{(\alpha)}]. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть функционал l и функция u удовлетворяют условиям леммы. Для $\alpha \in Q$ положим

$$\psi_\alpha = l \circ \overline{G}^{(\alpha)}, \quad \tau = l * \widehat{G}. \quad (10)$$

Покажем, что τ и все ψ_α , $\alpha \in Q$, определены как обобщенные функции.

Так как \widehat{G} — финитная функция, то τ определена. Будем исследовать $l \circ \overline{G}^{(\alpha)}$. Из определения \overline{G} вытекают оценки ее производных, соответствующих вектор-индексам $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$:

$$|\overline{G}^{(\gamma)}(x)| < K_\gamma |x|^{2m-n-\gamma_1-\dots-\gamma_n} |\ln |x||, \quad (11)$$

где K_γ — постоянные, зависящие от γ . Применяя (11) к производным $\overline{G}^{(\alpha)}$ порядка m , находим, что $\overline{G}^{(\alpha)} \in L_p^m$ при $\alpha \in Q$. Следовательно, ψ_α из (10) при таких α определены.

Лемма 1. Для $\varphi \in D$

$$(l, \varphi) = (-1)^m \sum_{\alpha} (\tau^{(\alpha)} + \psi_\alpha, \varphi^{(\alpha)}). \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in D$. Из определения обобщенных производных следует, что

$$(-1)^m \sum_{\alpha} (\tau^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}) = (\Delta^m \tau, \varphi) = (l * \Delta^m \widehat{G}, \varphi). \quad (13)$$

Положим

$$\lambda(x) = \begin{cases} (\Delta^m \widehat{G})(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\Delta^m \widehat{G} = \lambda + \delta$. Отсюда и из (13) находим, что

$$(-1)^m \sum_{\alpha} (\tau^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}) = (l * \delta, \varphi) + (l * \lambda, \varphi) = (l, \varphi) + (l * (-\Delta^m \overline{G}), \varphi). \quad (14)$$

Далее, из (10) и (5) имеем

$$\sum_{\alpha} (\psi_{\alpha}, \varphi^{(\alpha)}) = (-1)^m \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} g_{\beta} * \bar{G}^{(\alpha+\beta)}, \varphi^{(\alpha)} \right) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} (g_{\beta} * \bar{G}^{(\alpha+\beta)})^{(\alpha)}, \varphi \right). \quad (15)$$

Но

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} (g_{\beta} * \bar{G}^{(\alpha+\beta)})^{(\alpha)} = \sum_{\beta} g_{\beta} * \Delta^m \bar{G}^{(\beta)} = \sum_{\beta} g_{\beta} * (\delta * \Delta^m \bar{G}^{(\beta)}).$$

Так как $\Delta^m \bar{G} \in D$, последнее равенство и формулы (6), (7), где надо считать $f = \Delta^m \bar{G}$, и (15) показывают, что при $\varphi \in D$

$$(-1)^m \sum_{\alpha} (\psi_{\alpha}, \varphi^{(\alpha)}) = (l \circ \Delta^m \bar{G}, \varphi) = (l * \Delta^m \bar{G}, \varphi). \quad (16)$$

Складывая формулы (16) и (14), получаем лемму 1.

Лемма 2. Существует регулярная обобщенная функция ψ такая, что $\psi^{(\alpha)} = \psi_{\alpha}$ при $\alpha \in Q$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Формулы (5) и (10) показывают, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{\alpha} = (-1)^m \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{\beta} * \bar{G}^{(\alpha+\beta)}) = (-1)^m \sum_{\beta} g_{\beta} * \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{G}^{(\alpha+\beta)}. \quad (17)$$

Поскольку все g_{β} принадлежат L_q , $\beta \in Q$, из (11) вытекает, что все слагаемые в последней формуле являются регулярными обобщенными функциями.

Положим $e_i = (e_i^1, \dots, e_i^n)$, где $e_i^j = 1$ при $i = j$, $e_i^j = 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть векторы $\alpha(1), \alpha(2) \in Q$ и $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ таковы, что $\alpha(1) + e(i) = \alpha(2) + e(j)$. Тогда из (17) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{\alpha(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{\alpha(2)}. \quad (18)$$

Равенства (18) показывают, что $\{\psi_{\alpha}\}_{\alpha \in Q}$ является обобщенным градиентом порядка m . Отсюда и из [5, теорема IV.5] следует лемма 2.

Лемма 3 [4, с. 62]. Если числа $\lambda, \mu \geq 1$, таковы, что $\lambda^{-1} + \mu^{-1} \geq 1$ и $f \in L_{\lambda}$, $g \in L_{\mu}$, то существует $f * g \in L_t$, где число t определяется из равенства $t^{-1} = \lambda^{-1} + \mu^{-1} - 1$.

Лемма 4. Функция ψ принадлежит W_s^m при $s > q$.

Доказательство. Пусть $s > q$. Положим $\lambda = (s^{-1} - q^{-1} + 1)^{-1}$. Тогда $\lambda > 1$, $\lambda^{-1} + q^{-1} - 1 = s^{-1}$.

Функции g_{β} из (5) принадлежат L_q , $\beta \in Q$. Из оценок (11) также вытекает, что $\bar{G}^{(\alpha+\beta)} \in L_{\lambda}$, когда $\alpha, \beta \in Q$. Поэтому, применяя лемму 3 с $f = \bar{G}^{(\alpha+\beta)}$, $\mu = q$, $g = g_{\beta}$, $\alpha, \beta \in Q$ и учитывая (5), получаем, что $l \circ \bar{G}^{(\alpha)} = \psi_{\alpha} \in L_s$. Следовательно, лемма 4 верна.

Лемма 5. Функция τ принадлежит L_q .

Доказательство. Из формул (10) и (5) и финитности \widehat{G} следует, что

$$\tau = (-1)^m \sum_{\beta} (g_{\beta} * \delta^{(\beta)}) * \widehat{G} = (-1)^m \sum_{\beta} g_{\beta} * (\widehat{G} * \delta^{(\beta)}) = (-1)^m \sum_{\beta} g_{\beta} * \widehat{G}^{(\beta)}.$$

При $\beta \in Q$ функции g_{β} принадлежат L_q , $\widehat{G}^{(\beta)} \in L_1$. Отсюда и из леммы 3, где надо считать $f = g_{\beta}$, $\lambda = q$, $\widehat{G} = g$, $\mu = 1$, вытекает лемма 5.

Обозначим через A множество обобщенных функций медленного роста (определение и необходимые ниже свойства таких функций см. в [4, § 5]).

Определим функцию v равенством

$$v = (-1)^m u - \tau - \psi. \quad (19)$$

Лемма 6. Имеет место соотношение $v \in A$.

Доказательство. Выберем произвольно число $s > q$. Тогда $\psi \in W_s^m$. Поскольку $u \in W_q^m$, $\psi \in W_s^m$, а W_s^m и W_q^m содержатся в A [2], то $\psi, u \in A$. Кроме того, $\tau \in A$, так как $\tau \in L_q$, а $L_q \subset A$. Отсюда и из (19) вытекает лемма 6.

Лемма 7. Функция v является многочленом.

Доказательство. Из равенств (2), (12) и (19) при $\varphi \in D$ имеем

$$\sum_{\alpha} (v^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}) = 0. \quad (20)$$

Формула (20) показывает, что v удовлетворяет уравнению в обобщенных функциях (8). Отсюда и из леммы 6 так же, как в аналогичном случае в [2, с. 138], вытекает справедливость леммы.

Приведем определения рассмотренных в [5, 6] весовых классов $L_{\alpha, \gamma, \kappa}$, $L_{\alpha, \gamma}$, $W_{\alpha, \gamma}^m$, $W_{\alpha, \gamma, 1}^m$, где α, γ, κ — числа, $\alpha \geq 1$, $\kappa \in \{0, 1\}$. Класс $L_{\alpha, \gamma, \kappa}$ состоит из определенных в E_n функций φ , для которых конечен интеграл

$$\int |\varphi(x)|^{\alpha} |\bar{x}|^{\gamma \alpha} [1 + \ln |\bar{x}|]^{-\alpha \kappa} dx,$$

где $|\bar{x}| = (1 + |x|^2)^{1/2}$; обозначим $L_{\alpha, \gamma} = L_{\alpha, \gamma, 0}$. Классы $W_{\alpha, \gamma, 1}^m$, $W_{\alpha, \gamma}^m$ суть множества функций, у которых существуют все обобщенные производные порядка m , принадлежащие соответственно $L_{\alpha, \gamma, 1}$ и $L_{\alpha, \gamma}$.

Если B и C — множества функций, то $B \rightarrow C$ означает следующее: либо $B \subset C$, либо для любой функции $b \in B$ найдется многочлен $\pi(b)$ степени ниже m такой, что $(b + \pi(b)) \in C$.

Ниже при доказательстве леммы 9 будут применяться теоремы вложения для весовых классов, доказательства которых имеются в [5, гл. 5] и [6, гл. 3]. Для настоящей работы данные теоремы являются вспомогательными и будут сформулированы в виде следующего утверждения.

Лемма 8. Пусть числа λ, μ, η, ξ таковы, что $\lambda > \mu > 1$, $\eta > \xi > 0$. Тогда

- а) $W_{\lambda}^m \rightarrow W_{\mu, n(1/\lambda - 1/\mu), 1}^m$;
- б) $W_{\lambda}^m \rightarrow W_{\lambda, -\eta, 1}^m$;
- в) $W_{\lambda, -\xi, 1}^m \rightarrow W_{\lambda, -\eta}^m$;
- г) $W_{\lambda, -\eta}^m \rightarrow L_{\lambda, -\eta - m, 1}$;
- д) $L_{\lambda, -\xi, 1} \rightarrow L_{\lambda, -\eta}$;
- е) $L_{\lambda} \rightarrow L_{\lambda, -\eta}$.

Лемма 9. Степень многочлена v ниже m .

Доказательство. Выберем $\delta \in (m, m + nq^{-1})$. Тогда многочлены степени выше $m - 1$ не принадлежат классам $L_{q,-\delta}$.

Зафиксируем такие числа ρ, s , чтобы выполнялись условия

$$\rho + m < \delta; \quad s > q; \quad n(q^{-1} - s^{-1}) < \rho.$$

Из утверждений а) и б) леммы 8 следует, что

$$W_s^m \rightarrow W_{q,n(1/s-1/q),1}^m; \quad W_q^m \rightarrow W_{q,n(1/s-1/q),1}^m. \quad (21)$$

Так как $u \in W_q^m, \psi \in W_s^m$, из (21) вытекает вложение

$$\{u, \psi\} \rightarrow W_{q,n(1/s-1/q),1}^m. \quad (22)$$

Кроме того, утверждения в), г), д) леммы 8 дают

$$W_{q,n(1/s-1/q),1}^m \rightarrow W_{q,-\rho}^m \rightarrow L_{q,-\rho-m,1} \rightarrow L_{q,-\delta}. \quad (23)$$

Сравнивая формулы (22) и (23), находим, что

$$\{u, \psi\} \rightarrow L_{q,-\delta}.$$

По утверждению е) леммы 8 $L_q \rightarrow L_{q,-\delta}$. Отсюда и из леммы 5 получаем, что $\tau \in L_{q,-\delta}$.

Так как $\{u, \psi, \tau\} \rightarrow L_{q,-\delta}$, а класс $L_{q,-\delta}$ не содержит многочленов степени выше $m - 1$, то лемма 9 верна.

Теорема 2 является непосредственным следствием леммы 9 и формулы (19).

Далее будем применять знак \circ , определенный формулой (4), не только в случае, когда $f \in W_p^m, l \in L_p^{m*}$, но и тогда, когда $f \in W_\lambda^m \cup W_p^m, l \in L_p^{m*} \cap L_\lambda^{m*}$, λ — параметр из $(1, \infty)$, не обязательно равный p .

Теорема 3. Пусть числа $\lambda > 1, \mu = \lambda(\lambda - 1)^{-1}$ таковы, что

$$\mu m > n, \quad (24)$$

l — функционал и u — функция из формулировки теоремы 1. Кроме того, $l \in L_\lambda^{m*}$. Тогда при $\alpha \in Q$

$$u^{(\alpha)} = (-1)^m [(l \circ \widehat{G})^{(\alpha)} + l \circ \overline{G}^{(\alpha)}].$$

Доказательство. В условиях теоремы неравенство (24) равносильно тому, что $(m - n)\lambda > -n$. Отсюда вытекает, что $\widehat{G} \in L_\lambda^m$. Следовательно, выражение $l \circ \widehat{G}$ определено.

Обозначим через $g_\beta, \beta \in Q$, функции из L_μ такие, что верна формула, полученная из (1) заменой буквы p на λ . Так как $D \subset W_p^m \cap W_\lambda^m$, независимо от способа реализации l в виде (1) подобная формула будет определять одну и ту же обобщенную функцию при реализации l как на W_p^m , так и на W_λ^m .

Поскольку функция \widehat{G} финитна, полагая в (7) $f = \widehat{G}$, приходим к равенству $l * \widehat{G} = l \circ \widehat{G}$. Отсюда и из формулы (9) следует теорема 3.

Замечание. В случае $\lambda = p, \mu = q$ формулировка теоремы 3, как и следующей ниже теоремы 4, может быть очевидным образом сокращена.

Теорема 4. Пусть числа λ , μ , функция u , функционал l удовлетворяют всем условиям теоремы 3, кроме неравенства (24). Предполагаем, что $t\mu < n$. Тогда

$$u^{(\alpha)} = (-1)^{m_l} l * G^{(\alpha)}, \quad \alpha \in Q. \quad (25)$$

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены. Неравенство $t\mu < n$ равносильно тому, что $(m-n)\lambda < -n$. Отсюда и из (11) вытекает, что $\overline{G}^{(\alpha)} \in L_\lambda$ при $\alpha \in Q$.

Обозначим через g_β , $\beta \in Q$, функции, аналогичные соответствующим функциям в доказательстве теоремы 3. Так как $g_\beta \in L_\mu$, $\overline{G}^{(\alpha)} \in L_\lambda$, существуют $g_\beta * \overline{G}^{(\alpha)}$ при $\alpha, \beta \in Q$. Отсюда и из определения двойной свертки можно непосредственно получить, что существует $g_\beta * \overline{G}^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}$, $\alpha, \beta \in Q$. Поэтому

$$(g_\beta * \overline{G}^{(\alpha)}) * \delta^{(\beta)} = g_\beta * (\overline{G}^{(\alpha)} * \delta^{(\beta)}) \quad (26)$$

(об ассоциативности свертки, у которых два свертывателя обладают сверткой, а третий финитен, см. также в [7, теорема 6.4.8]). Из (26) и (6) с $f = \overline{G}^{(\alpha)}$ находим, что $l \circ \overline{G}^{(\alpha)} = l * \overline{G}^{(\alpha)}$, откуда по формуле (9) будем иметь (25) вместе с теоремой 4.

В [2] формулы (25) были доказаны в случае, когда l — финитный функционал. Анализируя доказательство этого результата, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. Пусть l , u — функционал и функция, удовлетворяющие условию теоремы 1; кроме того, существует $(l * G) \in A$. Тогда

- а) $u = (-1)^{m_l} l * G + v$, где v — многочлен,
- б) если $l * G \in W_q^m$, то справедливы равенства (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. Половинкин В. И. О реализации функционалов ошибок кубатурных формул в пространствах типа L_p^m // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. С. 125–136.
2. Половинкин В. И. О реализации финитных функционалов в $L_p^m(E_n)$ // Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 137–139.
3. Соломяк М. З. О пространствах, сопряженных к пространствам W_p^l С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1289–1292.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
5. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
6. Соболев С. Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
7. Айтосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.