Л. С. Казарин, О некоторых классах конечных групп, *Докл. АН СССР*, 1971, том 197, номер 4, 773–776

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 4

УДК 519.44 МАТЕМАТИКА

Л. С. КАЗАРИН

# О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

*(Представлено академиком В. М. Глушковым 13 VII 1970)*

Разными авторами рассматривались группы с ограничениями на систему инвариантных подгрупп (см., например, обзор С. Н. Черникова ([1])). Так, в статьях ([2], [3]) изучались группы, у которых все неабелевы подгруппы инвариантны (метагамильтоновы группы).

В настоящей заметке исследуются конечные группы с некоторыми ограничениями на нормализаторы подгрупп. В ней дается описание (теорема 2) конечных $(n, \bar{i})$-групп, являющихся обобщением метагамильтоновых. Из этого описания можно вывести основные результаты работы ([2]) и некоторые результаты работы ([3]).

Класс $(n, \bar{i})$-групп оказывается значительно шире класса метагамильтоновых групп, так как группы типов (III) — (VI) теоремы 2 уже не являются метагамильтоновыми группами (исключение представляет лишь произведение метациклической на центральную подгруппу). Группы же оставшихся типов, как явствует из теоремы 2, являются метагамильтоновыми лишь при сильных ограничениях. Класс метагамильтоновых групп оказывается у́же класса $(n, \bar{i})$-групп и в случае $p$-групп. Простейший пример тому 2-группы максимального класса порядка большего, чем 32.

Перед автором не стояла задача описания $p$-групп, являющихся $(n, \bar{i})$-группами (в случае $p$-групп нет описания и метагамильтоновых групп).

Миллер и Морено ([4]) изучили конечные группы, у которых все максимальные подгруппы абелевы (группы типа $M$). О. Ю. Шмидт ([5]) исследовал группы, у которых все максимальные подгруппы нильпотентны. Затем последовали работы ([6–8]), которые привели к полной классификации непримарных групп, у которых все 2-максимальные подгруппы (2-максимальная подгруппа — это максимальная подгруппа максимальной подгруппы) нильпотентны (соответственно абелевы).

Вопрос об описании $p$-групп с исключительно абелевыми 2-максимальными подгруппами до последнего времени оставался открытым. Автору удалось (теорема 4) дать описание, доведенное до определяющих соотношений, всех таких групп (они целиком входят в класс $(n, \bar{i})$-групп).

М. Судзуки ([9]) охарактеризовал группы $PSL(2, q)$ и $PGL(2, q)$ как полупростые конечные группы, у которых (по нашей терминологии) все циклические подгруппы четного порядка $n$-вложимы. Однако $p$-группы с этим условием не изучались. Теоремы 5 и 6 настоящей работы полностью описывают конечные $p$-группы, у которых все циклические подгруппы $n$-вложимы.

Из теоремы 6 следует описание $p$-группы, у которых все неизолированные подгруппы инвариантны ([10]), а также $p$-групп, у которых все неинвариантные подгруппы имеют экспоненту $p$ ([11]). (Оба эти класса групп у́же, чем группы, удовлетворяющие условию теоремы 6, причем теорема 8 из ([11]) утверждает только, что такие $p$-группы имеют класс нильпотентности 2 при $p > 2$.)

Введем несколько определений.

Определение 1. Подгруппу $B$ группы $G$ назовем $(n, \alpha)$-вложимой ($n$-вложимой) в группу $G$, если для любой неединичной подгруппы $A \leqslant B$ со свойством $\alpha$ (для любой $\langle 1\rangle \neq A \leqslant B$) выполняется соотношение

$$N_G(A) \leqslant N_G(B). \qquad (*)$$

В частности, подгруппу $B$ группы $G$ будем называть $(n, \bar{\imath})$-вложимой ($(n, \bar{\imath}S_p$-вложимой), если соотношение $(*)$ выполняется для всякой неинвариантной в $B$ подгруппы $A$ (для всякой неинвариантной в $B$ силовской $p$-подгруппы группы $B$).

Определение 2. Группу $G$ назовем $(n\beta, \alpha)$-группой ($(n, \alpha)$-группой), если всякая подгруппа $B$ со свойством $\beta$ (всякая подгруппа $B$ из $G$) является $(n, \alpha)$-вложимой подгруппой группы $G$.

Пусть $\Pi$ — множество всех простых чисел, $p \in \Pi$. Если для всякого $q \in \Pi \setminus p$ группа $G$ является $(n, \bar{\imath}S_q)$ группой, то группу $G$ назовем $(n, \bar{\imath}S_{p'})$-группой.

Понятие $(n, \alpha)$-вложимости обобщает понятие инвариантности (если $B$ инвариантна в $G$, то для любой $A \leqslant B$ выполняется $(*)$) и родственно понятию изолированности (любая минимальная изолированная подгруппа является $(n, \alpha)$-вложимой). Легко показать, что любая группа $B$ может быть $n$-вложена в некоторую группу $G$ так, что $B$ не инвариантна и не изолирована в $G$.

Теорема 1. *Если конечная группа $G$ является $(n, \bar{\imath}S_2)$ или $(n, \bar{\imath}S_{p'})$-группой, то $G$ разрешима.*

Известные примеры простых групп показывают, что этот результат нельзя усилить. Из теоремы 1 также следуют известные критерии разрешимости, приведенные в ([5]) и ([12]). Заметим также, что всякая $p$-разрешимая $(n, \bar{\imath}S_p)$-группа имеет $p$-длину, равную единице.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие типы конечных групп:

(I). $G = Q \times H$, где $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $G$, являющаяся $(n, \bar{\imath})$-группой, $H$ — дедекиндова;

(II). $G = (Q \leftthreetimes H) \times K$, где $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $G$, $H \times K$ — дедекиндова, $(|K|, |H|) = 1$. Группа $H = \langle h\rangle (Z(G) \cap H)$.

Взаимный коммутант $[Q, H] = D$ — либо специальная 2-группа, либо экстраспециальная $q$-группа, если $q > 2$.

$Q = C_Q(H)D$, причем $C_Q(H) \leqslant C_Q(D)$, и всякая подгруппа из $C_Q(H)$ инвариантна в $G$. Если $|D| = p^\delta$ и $|D / \Phi(D)| = p^\lambda$, то $\delta \leqslant {}^3/_2\lambda$, где $\lambda$ — минимальное решение сравнения $p^x \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$ для всякого $q \in \Pi(H)$. При $p = 2$ силовская 2-подгруппа $Q$ является $(n, \bar{\imath})$-группой;

(III). $G = K \leftthreetimes H$, где $K$ и $H$ — дедекиндовы, $(|H|, |K|) = 1$, $H = C_H(K)\langle h\rangle$, причем если $[a, h^\lambda] = l$ для некоторого $\lambda > 0$ и $a \in K$, то или $a = l$, или $h^\lambda \in C_H(K)$. Если $\langle a\rangle \leqslant C_H(K)$, то $\langle a\rangle \Delta G$; $H$ — *$(n, \bar{\imath})$-группа,*

(IV) — (VI). $G = Q \leftthreetimes H$, где $Q$ — силовская $q$-подгруппа в $G$ $(q > 2)$, $H$ — дедекиндова, $H = \langle h\rangle C_H(Q)$ — нильпотентная *$(n, \bar{\imath}]$-группа.* причем если для некоторого $y \in Q$ и некоторого $\lambda > 0$ выполняется $[y, h^\lambda] = l$, то либо $y \in C_Q(H)$, либо $h^\lambda \in C_H(Q)$.

Группа $Q$ имеет систему образующих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k \leqslant 4)$ таких, что для всякого $j = 1, 2, \ldots, k$ $[h, x_j] \in \langle x_j\rangle$. При этом в случае (IV) $|Q| = q^2$. В случае (V) $|Q| = q^3$, $Q = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, $[x_1, x_2] = x_3$, $C_Q(H) \leqslant \langle x_3\rangle$. Если $[h, x_3] = l$, то $Q$ имеет $\exp q$. В случае (VI) $|Q| = q^4$, $Q = \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$, $x_1{}^q = x_2{}^q = x_3{}^q = l$, $x_4{}^q \in \langle x_3\rangle$, $[x_4, x_2] = [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = [x_4, x_3] = l$, $[x_4, x_1] = x_2$, $[x_2, x_1] = x_3$, $C_Q(H) = \langle x_3, x_4\rangle$.

Теорема 2. *Конечная непримарная группа $G$ тогда и только тогда является $(n, \bar{\imath})$-группой, когда она является группой одного из типов* (I) — (VI), *приведенных выше.*

Очевидно, что группа, в которой нормализаторы всех подгрупп упорядочены по включению (для любых двух подгрупп $A$ и $B$ имеет место одно из соотношений $N_G(A) \leqslant N_G(B)$ или $N_{G(B)} \leqslant N_G(A)$), относится к числу $(n, \bar{\imath})$-групп. По теореме 2 для полного описания таких групп достаточно получить его для $p$-групп.

Т е о р е м а 3. *Конечная недедекиндова р-группа $G$ тогда и только тогда является группой, в которой нормализаторы всех подгрупп упорядочены по включению, когда она представима в виде $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \times C$, где $a^{p^\lambda} = b^{p^\mu} = l$, $[a, b] = a^{p^\nu}$, $\mu \geqslant 1$, $\lambda > 1$, $\lambda \leqslant 2\nu$, $C$ — абелева и порядки элементов подгруппы $C \times \langle b \rangle = H$ ограничены в совокупности числом $p^\nu$ (при $p = 2$, $\nu \geqslant 2$).*

Приведем список $p$-групп с абелевыми 2-максимальными подгруппами:

1) прямое произведение группы типа $M$ на циклическую простого порядка;

2) $G = \langle a, b, d \rangle$, $a^{p^\lambda} = b^{p^\mu} = d^{p^2} = l$, $[a, b] = d^p$,

$$[d, a] = [d, b] = l, \quad \lambda, \mu \geqslant 1;$$

3) метациклическая группа с коммутантом порядка $p^2$;

4) $G = \langle a, b, c \rangle$, $a^{p^\lambda} = b^{p^2} = c^p = l$, $[a, c] = b^p$, $[b, a] = a^{p^{\lambda-1}}$, $[c, b] = l$;

5) $G = \langle a, b, c \rangle$, $a^{p^\delta} = b^{p^2} = c^{p^2} = l$, $b^p = x^\lambda y^\mu$, $\delta \geqslant 1$, $c^p = x^\nu y^\sigma$, $[a, b] = x$, $[a, c] = y$, $x, y \in Z(G)$, где при $p > 2$ $4\mu\nu + (\sigma - \lambda)^2$ — квадратичный невычет по mod $p$. При $p = 2$ $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\sigma = 1$;

6) $p > 2$, $G = \langle a, b, x \rangle$, $[a, x] = b$, $[x, b] = y_1$, $[a, b] = y_2$, $y_1{}^p = y_2{}^p = a^{p^2} = b^p = x^{p^2} = l$; $a^p = y_1{}^\mu y_2{}^\nu$; $x^p = y_1{}^\gamma y_2{}^\delta$, $y_1, y_2 \in Z(G)$, причем при $p > 3$ $4\mu\delta + (\gamma - \nu)^2$ — квадратичный невычет по mod $p$. При $p = 3$ сопоставим допустимым значениям $\mu$, $\nu$, $\gamma$, $\delta$ вектор $(\mu, \nu, \gamma, \delta)$. Тогда допустимы следующие векторы: $(\mu, 0, 0, \delta)$, где $\mu\delta \equiv 0 \pmod 3$; $(\mu, \nu, \mu, \nu)$, где $\mu\nu \not\equiv 0 \pmod 3$; $(\mu, \nu, -\mu, -\nu)$, где $\mu\nu \not\equiv 0 \pmod 3$; а также $(1, 1, 1, -1)$; $(1, 0, 1, -1)$; $(-1, 0, 1, 1)$; $(-1, 0, -1, -1)$;

7) $p > 2$, $G = \langle a, b, x \rangle$, $a^{p^\lambda} = b^p = x^p = l$, $[a, b] = a^{p^{\lambda-1}}$, $[a, x] = b$; $[b, x] = [a^p, b] = l$, $\lambda > 1$;

8) $p > 2$, $G = \langle a, b, c, x \rangle$, $a^p = c^p = x^p = b^{p^\lambda} = l$, $\lambda \geqslant 1$, $[x, b] = a$, $c \in Z(G)$, $\langle a, c, x \rangle$ — абелева группа $[a, b] = c$;

9) $p > 2$, $G = \langle a, b, x \rangle$, $x^{p^2} = a^p = b^{p^\lambda}$, $[a, b] = x^{sp}$, где $s = 1$ или квадратичный невычет по mod $p$, $[x, b] = a$;

10) $p = 3$ $G = \langle a, b, c \rangle$, $a^3 = b^{-3} = d$, $d^3 = l \neq c^3$, $[b, a] = c$, $[c, a] = d$, $[c, b] = l$, $d \in Z(G)$.

Т е о р е м а 4. *Конечная неабелева р-группа $G$, отличная от групп типа $M$, тогда и только тогда является группой, у которой все 2-максимальные подгруппы абелевы, когда она является либо одной из групп типов 1) — 10), приведенных перед теоремой, либо 2-группой порядка $2^5$ или $2^6$.*

Имеется всего одна группа порядка $2^5$ и две группы порядка $2^6$ с абелевыми 2-максимальными подгруппами, неизоморфные ни одной из групп типов 1) — 10). Их строение легко получить, пользуясь описанием групп порядка $\leqslant 2^6$ (см. ([13])).

Я. Г. Берковичем ([14]) было высказано предположение, что всякая $p$-группа максимального класса содержит подгруппу порядка $p$, которую соединяет со всей группой единственная цепь максимальных подгрупп. Группа типа 10) — минимальный контрпример этого утверждения (можно построить аналогично примеры и для любого $p > 2$).

Следующее предложение несколько усиливает результат Н. Блекберна ([15]), описавшего $p$-группы, у которых все подгруппы метациклические.

С л е д с т в и е 1. *Конечные неабелевы и неметациклические р-группы, у которых все собственные неабелевы подгруппы метациклические, являются группами, у которых все 2-максимальные подгруппы абелевы.*

Определяющие соотношения для таких групп получаются легко из теоремы 4.

С л е д с т в и е 2. *Если для всякой абелевой подгруппы $A$ неабелевой конечной р-группы $G$ $(p > 2)$ из включения $A \leqslant B$ следует, что $N_G(A) \leqslant B$ или $N_G(A) \geqslant B$, то $G$ — группа типа $M$.*

Следствие 2 является усилением одного из результатов автора ([16]).

**Теорема 5.** *Конечная $p$-группа $G$ тогда и только тогда является группой, у которой все циклические подгруппы $n$-вложимы, когда все ее циклические подгруппы составного порядка инвариантны.*

**Теорема 6.** *Конечная неабелева $p$-группа $G$, содержащая элемент составного порядка, тогда и только тогда является группой, у которой все циклические подгруппы составного порядка инвариантны, когда имеет место хотя бы одно из условий:*

a) $|G'| = p$ *и* $\Phi(G)$ *циклическая;*

b) $G = A \leftthreetimes \langle b \rangle$ *и* $(ab)^2 = l$ *для всякого* $a \in A$.

Строение $p$-групп с циклической подгруппой Фраттини известно (см. ([17])).

В заключение отметим, что результаты, аналогичные теоремам 2 — 6, можно получить и для локально конечных групп.

Автор выражает глубокую благодарность проф. П. И. Трофимову, а также В. А. Белоногову и Я. Д. Половицкому за участие в обсуждении результатов.

Пермский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
1 VII 1970

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Укр. матем. журн., 2, 247 (1968). [2] В. Т. Нагребецкий, Матем. Зап. Уральск. гос. унив., 6, 3, 45 (1968). [3] Г. М. Ромалис, Н. Ф. Сесекин, Матем. Зап. Уральск. гос. унив., 5, 3, 101 (1966). [4] G. A. Miller, H. C. Moreno, Trans. Am. Math. Soc., 4, 394 (1903). [5] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 31, 366 (1924). [6] В. А. Белоногов, Матем. зам., 3, 1, 21 (1968). [7] M. Suzuki, Proc. Am. Math. Soc., 8, 4, 686 (1957). [8] Z. Janko, Math. Zs., 79, 422 (1962). [9] M. Suzuki, J. Math. Soc. Japan, 20, 1—2, 242 (1968). [10] М. М. Гольденберг, Н. Ф. Сесекин, Резюме сообщений и докл. X Всесоюзн. алгебраич. коллоквиума, 2, Новосибирск, 1969. [11] Я. Г. Беркович, ДАН, 187, № 3, 499 (1969). [12] В. Т. Нагребецкий, Матем. зап. Уральск. гос. унив., 6 (1967). [13] M. Hall, I. K. Senior, Groups of Order $2^n (n \leqslant 6)$, N.Y.— Macmillan, 1964. [14] Я. Г. Беркович, ДАН, 179, № 1, 13 (1968). [15] N. Blackburn, Proc. London Math. Soc., 3, 11, 1 (1961). [16] Л. С. Казарин, Резюме сообщений и докладов X Всесоюзн. алгебраич. коллоквиума, 2, Новосибирск, 1969. [17] Я. Г. Беркович, ДАН, 18, № 2, 247 (1968).