



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Mirsalimov, Modelling of cracking in the strip of variable thickness, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2012, Volume 12, Issue 2, 95–102

DOI: 10.18500/1816-9791-2012-12-2-95-102

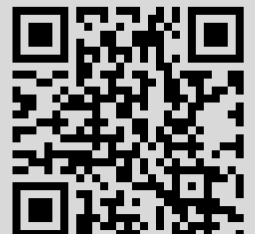
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

February 10, 2025, 06:23:49





9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
10. Морозов А. Д., Драгун Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.; Ижевск: ИКИ, 2003. 304 с.
11. Goirgilli A., Lazutkin V. F., Simo C. Visualization of

a hyperbolic structure in area preserving maps // Reg. & Chaot. Dyn. 1997. Vol. 2, № 3/4. P. 47–61.

12. Асланов В. С., Ледков А. С. Особенности вращательного движения космического аппарата при спуске в атмосфере Марса // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 351–357.

УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

М. В. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, Баку  
E-mail: a-mirsalimov@mail.ru

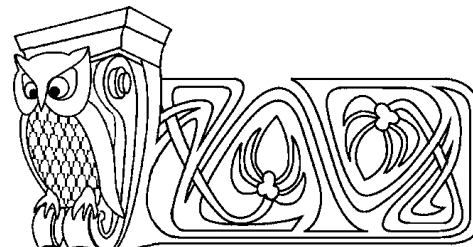
Проведено математическое описание модели зарождения трещины в полосе переменной толщины. Определение неизвестных параметров, характеризующих зародышевую трещину, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Получено условие, определяющее критическое значение внешней нагрузки, при которой происходит трещинообразование.

**Ключевые слова:** полоса переменной толщины, зона предразрушения, зарождение трещины.

Полосы переменной толщины используются в различных отраслях техники. Это вызвано, в частности тем, что, часто изменяя толщину изделия, ему можно придать требуемые свойства.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается однородная изотропная полоса переменной толщины. Обозначим через  $2L$  и  $2h$  ширину и толщину полосы соответственно (рис. 1). Срединная плоскость  $(x, y)$  является плоскостью симметрии. Полоса переменной толщины находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Пусть полоса подвергается силовому нагружению. Считается, что заданы напряжения на границе  $y = \pm L$  полосы (условие первой основной задачи). Принято, что в материале полосы после многократного нагружения появляется концентратор напряжений (область ослабленных межчастичных связей материала). При нагружении в прослойке перенапряженного материала образуется зона пластического течения. Пусть для определенности силовая нагрузка изменяется так, что в области ослабленных межчастичных связей материала осуществляется пластическое деформирование. Через некоторое число нагружений возможность пластического деформирования в области ослабленных межчастичных связей материала исчерпывается, и раскрытие берегов зоны пластического течения резко увеличивается. Если раскрытие берегов зоны предразрушения в точке максимальной концентрации достигает предельного значения  $\delta_c$  для данного материала полосы, то в этой точке зарождается трещина. Важно отметить, что в предлагаемой расчетной модели удлинение зародышевой трещины происходит непрерывно от нулевой длины.



### Modelling of Cracking in the Strip of Variable Thickness

M. V. Mirsalimov

The mathematical description of the model crack nucleation in a strip of variable thickness was conducted. Definition of the unknown parameters that characterize the nucleus crack is reduced to solving a system of singular integral equations. The condition that determines the critical value of external load at which cracking occurs was obtained.

**Key words:** strip of variable thickness, prefracture zone, nucleation of cracks.

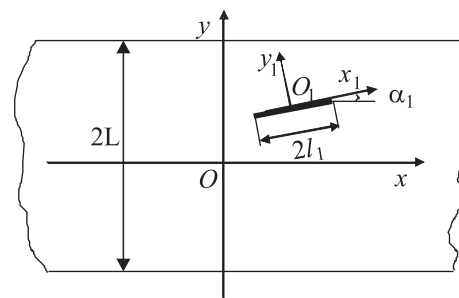


Рис. 1. Расчетная схема задачи о зарождении трещины в полосе переменной толщины



Задача моделирования процессов образования и роста трещины редуцируется к последовательно решаемым упругопластическим задачам. Разработка расчетной модели, в рамках которой можно было бы эффективно прогнозировать появление трещины в полосе переменной толщины, имеет важное значение для обеспечения безопасной эксплуатации изделий.

По мере нагружения полосы в материале будут возникать зоны предразрушения, которые моделируются как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется линиями пластического течения между ними (вырожденными зонами пластических деформаций). Размеры зон пластического течения при постоянном напряжении зависят от вида материала. На ранних стадиях разрушения из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию областей с нарушенной структурой материала в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1]. В рассматриваемом случае образование трещины представляет собой процесс перехода зоны предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Размеры зоны предразрушения заранее неизвестны и должны быть определены.

Твердое тело (полоса), деформируемое за пределом упругости, представляется как тело, деформируемое упруго всюду, кроме некоторых поверхностей зон предразрушения. Напомним, что упругая деформация представляет собой изменение в расстояниях между элементарными частицами без изменения порядка их расположения, в то время как пластическая деформация сопровождается изменением относительного расположения атомов за счет сдвигов одного слоя атомов относительно другого (элементарные пластические деформации). Поскольку указанные зоны (прослойки перенапряженного материала) малы по сравнению с остальной упругой частью полосы, их можно мысленно заменить разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Таким образом, задача, о деформации полосы переменной толщины за пределами упругости сводится к задаче о деформации некоторого упругого тела, имеющего условные разрезы. Силы, действующие по поверхностям этих зон, называются силами ослабленных связей, а зоны, в которых они появляются, — зонами предразрушения, или областями ослабленных связей. Считается, что толщина полосы  $2h(x, y)$  удовлетворяет условиям  $0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_2$ , где  $h_1, h_2$  — наименьшее и наибольшее значение толщины полосы соответственно. Функция толщины может быть представлена в виде

$$h(x, y) = h_0 [1 + \varepsilon \bar{h}(x, y)],$$

где  $h_0 = (h_1 + h_2)/2$ ,  $\varepsilon = (h_2 - h_1)/(h_2 + h_1)$ ,  $-1 \leq \bar{h}(x, y) \leq 1$  — некоторая известная безразмерная непрерывная функция.

Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений. В центре зоны предразрушения разместим начала локальной системы координат  $x_1 O_1 y_1$ , ось  $x_1$  которой совпадает с линией расположения зоны предразрушения и образует угол  $\alpha_1$  с осью  $x$  (см. рис. 1). Взаимодействие берегов зоны предразрушения (связи между берегами) сдерживает зарождение трещины. При действии силовой нагрузки на границе полосы  $y = \pm L$  в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают нормальные  $\sigma_{y_1} = \sigma_s$  и касательные  $\tau_{x_1 y_1} = \tau_s$  напряжения, где  $\sigma_s$  — предел текучести материала на растяжение,  $\tau_s$  — предел текучести материала полосы на сдвиг.

Таким образом, к берегам зоны ослабленных межчастичных связей материала приложены нормальные  $\sigma_s$  и касательные  $\tau_s$  напряжения.

Запишем общие уравнения статического деформирования полосы:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0;$$

– закон Гука

$$N_x = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{1 + \nu} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}$  — нормальные и сдвигающие усилия, приходящиеся на единицу длины соответственно;  $u, v$  — компоненты вектора смещений;  $E$  — модуль упругости материала полосы;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала.



Краевые условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = p_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L & \quad \sigma_y - i\tau_{xy} = p_2(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \sigma_{y_1} - i\tau_{x_1y_1} = \sigma_s - i\tau_s, & -l_1 \leq x_1 \leq l_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты тензора напряжений;  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  — заданные функции, убывающие на бесконечности и удовлетворяющие условиям статики.

Для вычисления значения внешней нагрузки, при которой происходит зарождение трещины, нужно дополнить постановку задачи условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия примем критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения

$$|v^+ - v^- - i(u^+ - u^-)| = \delta_c, \quad (2)$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала полосы трещинообразованию. Это дополнительное условие позволяет найти параметры полосы, при которых появляется трещина.

## МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решение системы уравнений статического деформирования полосы ищем в виде

$$\begin{aligned} N_x &= N_x^{(0)} + \varepsilon N_x^{(1)} + \dots, & N_y &= N_y^{(0)} + \varepsilon N_y^{(1)} + \dots, & N_{xy} &= N_{xy}^{(0)} + \varepsilon N_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, & l_1 &= l_1^0 + \varepsilon l_1^1 + \dots \end{aligned}$$

Используем процедуру метода возмущений. В полученных уравнениях уравнение нулевого приближения совпадает с уравнениями классической плоской задачи теории упругости, а уравнения первого приближения представляют собой уравнения плоской задачи теории упругости с объемной силой

$$X_1 = N_x^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}, \quad Y_1 = N_y^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + N_{xy}^{(0)} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}. \quad (3)$$

Аналогично определяются составляющие  $X_2, Y_2$  объемной силы для второго и последующих приближений.

Граничные условия задачи (1) принимают соответственно вид:

– для нулевого приближения

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} = p_1(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L & \quad \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} = p_2(x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \sigma_{y_1}^{(0)} - i\tau_{x_1y_1}^{(0)} = \sigma_s - i\tau_s, & -l_1^0 \leq x_1 \leq l_1^0; \end{aligned} \quad (4)$$

– для первого приближения

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x, 0)p_1^*, & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L & \quad N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x, 0)p_2^*, & -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad N_y^* - iN_{xy}^* = -\bar{h}(x, y)(\sigma_s^* - i\tau_s^*), & -l_1^1 \leq x_1 \leq l_1^1, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $p_1^* - ip_2^* = 2h_0(p_1(x) - ip_2(x))$ ,  $\sigma_1^* - i\tau_s^* = 2h_0(\sigma_s - i\tau_s)$ .

Здесь при выводе уравнений первого приближения были приняты следующие обозначения:

$$N_x^* = N_x^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_x^{(0)}, \quad N_y^* = N_y^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_y^{(0)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy}^{(1)} - \bar{h}(x, y)N_{xy}^{(0)}.$$

При решении задачи в каждом приближении используем принцип суперпозиции. Тогда напряженно-деформированное состояние полосы в каждом приближении можно представить в виде суммы двух напряженно-деформированных состояний. Первое состояние будет определяться из решения плоской задачи теории упругости для полосы при отсутствии зоны предразрушения. Второе состояние определяется из решения задачи для полосы с зоной предразрушения, на берегах которой дополнительно



приложены усилия, равные по величине и обратные по знаку, определяемые первым напряженным состоянием при  $y_1 = 0$ .

Рассмотрим нулевое приближение. Первое состояние для нулевого приближения (для полосы постоянной толщины) при отсутствии зоны предразрушения известно [2, 3].

Граничные условия задачи, определяющей второе состояние в нулевом приближении, принимает вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y = -L & \quad \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \sigma_{y_1}^{(0)} - i\tau_{x_1 y_1}^{(0)} = \sigma_s - i\tau_s - (p_*^{(0)}(x_1) - iq_*^{(0)}(x_1)), \quad -l_1^0 \leq x_1 \leq l_1^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $p_*^{(0)}(x_1)$  и  $q_*^{(0)}(x_1)$  — нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной бездефектной полосе на оси  $x_1$  ( $y_1 = 0$ ) от действия напряжений на границе  $y = \pm L$  полосы в нулевом приближении.

Граничные условия задачи (6) с помощью формул Колосова–Мусхелишвили [4] запишем в виде краевой задачи для отыскания двух аналитических функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ :

$$\begin{aligned} \text{при } y = L & \quad \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0, \\ \text{при } y = -L & \quad \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)} = 0, \\ \text{при } y_1 = 0 & \quad \Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1\overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} = f^0(x_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $f^0(x_1) = \sigma_s - i\tau_s - (p_*^{(0)} - iq_*^{(0)})$ ,  $|x_1| \leq l_1^0$ .

Комплексные потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  ищем в виде [3]

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k^0(t) dt}{t - z_k}, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^2 e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_k}^{l_k} \left[ \frac{\overline{g_k^0(t)}}{t - z_k} - \frac{\overline{T_k} e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k^0(t) \right] dt, \quad (8)$$

где  $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$ ,  $z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$ ,  $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$ ,  $z_0^0 = iL$ ,  $z_2^0 = -iL$ ,  $l_0 = \infty$ ,  $l_2 = \infty$ .

Удовлетворяя функциями (8) краевым условиям (7), после некоторых преобразований получим систему трех интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{g_0^0(t)}{t - x} + g_2^0(t)K_{0,2}(t - x) + \overline{g_2^0(t)}L_{0,2}(t - x) \right] dt = - \int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[ g_1^0(t)K_{0,1}(t, x) + \overline{g_1^0(t)}L_{0,1}(t, x) \right] dt, \quad |x| < \infty, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{g_2^0(t)}{t - x} + g_0^0(t)K_{2,0}(t - x) + \overline{g_0^0(t)}L_{2,0}(t - x) \right] dt = - \int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[ g_1^0(t)K_{2,1}(t, x) + \overline{g_1^0(t)}L_{2,1}(t, x) \right] dt, \quad |x| < \infty,$$

$$\begin{aligned} \int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[ \frac{g_1^0(t)}{t - x} + g_1^0(t)K_{1,1}(t, x) + \overline{g_1^0(t)}L_{1,1}(t, x) \right] dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g_0^0(t)K_{1,0}(t, x) + \overline{g_0^0(t)}L_{1,0}(t, x) \right] dt + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g_2^0(t)K_{1,2}(t, x) + \overline{g_2^0(t)}L_{1,2}(t, x) \right] dt = \pi f^0(x), \quad |x| < l_1^0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ввиду некоторой громоздкости величины  $K_{n,k}$ ,  $L_{n,k}$  ( $k, n = 0, 1, 2$ ) не приводятся. Из системы трех интегральных уравнений исключаются две неизвестные функции  $g_0^0(t)$  и  $g_2^0(t)$ . Подставляя в (10) функции  $g_0^0(x)$  и  $g_2^0(x)$ , найденные из решения интегральных уравнений (9), после некоторых преобразований получим одно комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1^0(x)$ :

$$\int_{-l_1^0}^{l_1^0} \left[ \frac{g_1^0(t)}{t - x} + g_1^0(t)R_{11}(t, x) + \overline{g_1^0(t)}S_{11}(t, x) \right] dt = \pi f^0(x), \quad |x| < l_1^0. \quad (11)$$



Выражения для функций  $R_{11}(t, x)$  и  $S_{11}(t, x)$  из-за некоторой громоздкости величины не приводятся (они имеют вид, подобный (V.41) из [3]).

К сингулярному интегральному уравнению (11) для внутренней зоны предразрушения добавляется дополнительное условие:

$$\int_{-l_1^0}^{l_1^0} g_1^0(t) dt = 0, \quad (12)$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения в нулевом приближении. Комплексное сингулярное интегральное уравнение (11) при дополнительном условии (12) сводится к системе  $M$  алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомой функции  $g_1^0(x_1)$  в узловых точках. Для получения системы алгебраических уравнений сначала приведем в интегральном уравнении (11) и в условии (12) все интервалы интегрирования к одному отрезку  $[-1, 1]$  с помощью замены переменных  $t = l_1^0 \tau$ ,  $x = l_1^0 \xi$  ( $|t| < l_1^0$ ,  $|x| < l_1^0$ ). Решение сингулярного интегрального уравнения ищем в виде

$$g_1^0(\xi) = \frac{g_1^*(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

где  $g_1^*(\xi)$  — регулярная в интервале  $[-1, 1]$  функция.

Используя квадратурные формулы типа Гаусса [3, 5], сингулярное интегральное уравнение (11) при дополнительном условии (12) сведем к системе  $M$  алгебраических уравнений для определения  $M$  неизвестных  $g_1^*(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1^0 \left[ g_1^*(t_m) R_{11}^*(l_1^0 t_m, l_1^0 x_r) + \overline{g_1^*(t_m)} S_{11}^*(l_1^0 t_m, l_1^0 x_r) \right] &= f^0(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_1^*(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1; m = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ,  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$ .

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (11) ищется в классе всюду ограниченных функций (напряжений), то к системе (13) необходимо добавить условия ограниченности напряжений на концах зоны предразрушения  $x_r = \pm l_1^0$  в нулевом приближении. Эти условия имеют вид

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^*(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^*(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (14)$$

Полученная алгебраическая система (13)–(14) из-за неизвестного размера зоны предразрушения нелинейная. Система уравнений (13)–(14) относительно  $g_1^*(t_m)$  и  $l_1^0$  позволяет при заданной внешней нагрузке найти напряженно-деформированное состояние полосы при наличии зоны предразрушения в нулевом приближении. Решение системы уравнений (13)–(14) позволяет найти приближенные значения функций  $v_0(t_m)$ ,  $u_0(t_m)$  и размеры зоны предразрушения. Для ее решения используется метод последовательных приближений, суть которого состоит в следующем. Решаем систему (13) при некотором определенном значении размера зоны предразрушения относительно остальных неизвестных. Остальные неизвестные входят в систему линейным образом. Значения размера зоны предразрушения и соответствующие значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (14). Подбирая значения параметров длины зоны предразрушения, будем многократно повторять вычисления, пока уравнения (14) не будут удовлетворяться с достаточной точностью. В каждом приближении алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента.

Перейдем к построению решения задачи в первом приближении. Зная решение задачи в нулевом приближении, находим компоненты усилий  $N_x^{(0)}$ ,  $N_y^{(0)}$ ,  $N_{xy}^{(0)}$ . По формулам (3) находим компоненты объемной силы  $F = X_1 + iY_1$  в первом приближении. Для определения первого состояния в первом приближении имеем уравнения плоской теории упругости при наличии объемных сил (3). При



наличии объемных сил решение плоской задачи для первого состояния ищем в виде

$$N_x^* = N_{x_*}^{(1)} + N_{x_1}^{(1)}, \quad N_y^* = N_{y_*}^{(1)} + N_{y_1}^{(1)}, \quad N_{xy}^* = N_{xy_*}^{(1)} + N_{xy_1}^{(1)},$$

где  $N_{x_*}^{(1)}, N_{y_*}^{(1)}, N_{xy_*}^{(1)}$  — частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемной силы (3);  $N_{x_1}^{(1)}, N_{y_1}^{(1)}, N_{xy_1}^{(1)}$  — общее решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.

Для усилий первого состояния в первом приближении при наличии объемных сил имеем общие представления

$$\begin{aligned} \frac{N_x^* + N_y^*}{2h_0} &= 4 \operatorname{Re} \left( \Phi_{10}(z) - \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \\ \frac{N_y^* - N_x^* + 2iN_{xy}^*}{2h_0} &= 2 \left( \bar{z}\Phi'_{10}(z) + \Psi_{10}(z) + \frac{1}{2(1+\kappa)} \frac{\partial(\kappa\bar{F}_1 - Q_1)}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

В эти соотношения входят две аналитические функции  $\Phi_{10}(z)$  и  $\Psi_{10}(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  и две функции  $F_1(z, \bar{z}), Q_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой любые частные решения уравнений

$$\frac{\partial^2 F_1(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} = F, \quad \frac{\partial^2 Q_1(z, \bar{z})}{\partial z^2} = \bar{F}.$$

Граничные условия для нахождения комплексных потенциалов  $\Phi_{10}(z)$  и  $\Psi_{10}(z)$  на основании первых двух краевых условий (5) и общих представлений (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad & \Phi_{10}(z) + \overline{\Phi_{10}(z)} + z\overline{\Phi'_{10}(z)} + \overline{\Psi_{10}(z)} = f_1(z) - \bar{h}p_1^*(x), \\ \text{при } y = -L \quad & \Phi_{10}(z) + \overline{\Phi_{10}(z)} + z\overline{\Phi'_{10}(z)} + \overline{\Psi_{10}(z)} = f_1(z) - \bar{h}p_2^*(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{1+\kappa} \operatorname{Re} \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{1}{2(1+\kappa)} \left( \kappa \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right). \quad (17)$$

Здесь функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  определяются по формулам

$$F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad Q_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz. \quad (18)$$

Решение граничной задачи (16) известно [2, 3].

Согласно принципу суперпозиции граничные условия задачи, определяющие второе напряженно-деформированное состояние в первом приближении, получим в виде

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad & N_y^* = 0, \quad N_{xy}^* = 0, \\ \text{при } y = -L \quad & N_y^* = 0, \quad N_{xy}^* = 0, \\ \text{при } y_1 = 0, |x_1| \leq l_1^1 \quad & N_{y_1}^* = -\bar{h}\sigma_s^* - p_*^{*(1)}, \quad N_{x_1 y_1}^* = -\bar{h}\tau_s^* - q_*^{*(1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $p_*^{*(1)}(x_1) = 2h_0 p_*^{(1)}$  и  $q_*^{*(1)}(x_1) = 2h_0 q_*^{(1)}$  — нормальные и касательные напряжения, возникающие в сплошной бездефектной полосе без зоны предразрушения по оси  $x_1$  ( $y_1=0$ ) в первом состоянии первого приближения соответственно.

Для определения комплексных потенциалов  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  второго состояния первого приближения имеем граничную задачу

$$\begin{aligned} \text{при } y = L \quad & \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z\overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} = 0, \\ \text{при } y = -L \quad & \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + z\overline{\Phi'_1(z)} + \overline{\Psi_1(z)} = 0, \\ \text{при } y_1 = 0, |x_1| \leq l_1^1 \quad & \Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1\overline{\Phi'_1(x_1)} + \overline{\Psi_1(x_1)} = f^1(x_1), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $f^1(x_1) = -\bar{h}(\sigma_s - i\tau_s) - (p_*^{(1)} - iq_*^{(1)})$ .



Комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  ищем в виде, подобном (8). Поступая аналогично вышеизложенному, получим комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g_1^1(x_1)$  с дополнительным условием типа (12).

Как и в нулевом приближении, интегральное уравнение с дополнительным условием типа (12) сводим к системе комплексных алгебраических уравнений относительно  $M$  неизвестных  $g_1^{*(1)}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1^1 \left[ g_1^{*(1)}(t_m) R_{11}^*(l_1^1 t_m, l_1^1 x_r) + \overline{g_1^{*(1)}(t_m)} S_{11}^*(l_1^1 t_m, l_1^1 x_r) \right] &= f^1(x_r), \\ \sum_{m=1}^M g_1^{*(1)}(t_m) &= 0 \quad (r = 1, 2, \dots, M-1). \end{aligned} \quad (21)$$

Для замкнутости алгебраической системы (21) не хватает двух уравнений, определяющих размеры зоны предразрушения в первом приближении. Записывая условия конечности напряжений в вершинах зоны предразрушения  $x_1 = \pm l_1^1$ , получим недостающие два уравнения

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^{*(1)}(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^{*(1)}(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0. \quad (22)$$

Для определения раскрытия берегов зоны предразрушения и размеров зоны предразрушения задается закон изменения толщины полосы. Функцию  $h(x, y)$  разложим в ряд Тейлора в окрестности начала координат, ограничиваясь для простоты несколькими первыми членами разложения. Проинтегрировав (18), находим функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$ . По найденным функциям  $F_1(z, \bar{z})$  и  $Q_1(z, \bar{z})$  находим функцию  $f_1(z)$ . О способе решения алгебраической системы (21), (22) сказано выше. После решения алгебраической системы находим

$$g_1(x_1) = g_1^0(x_1) + \varepsilon g_1^1(x_1), \quad l_1 = l_1^0 + \varepsilon l_1^1.$$

Для определения предельного значения внешней нагрузки, при которой появится трещина, используем соотношение (2).

Используя решение задачи о зоне пластических деформаций, вычислим смещения на берегах зоны предразрушения:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_1}^{x_1} g_1(x_1) dx_1 = v_*(x_1, 0) - i u_*(x_1, 0),$$

где  $v_*(x_1, 0) = v^+ - v^-$ ,  $u_*(x_1, 0) = u^+ - u^-$ ,  $\mu$  — модуль сдвига материала.

Смещения на берегах зоны предразрушения при  $x_1 = x_0$  будут

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-l_1}^{x_0} g_1(x_1) dx_1 = v_*(x_0, 0) - i u_*(x_0, 0).$$

Применяя замену переменных и заменяя интеграл суммой, находим

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} g_1(t_m) = v_*(x_0, 0) - i u_*(x_0, 0), \quad (23)$$

где  $M_1$  — число узловых точек, содержащихся в отрезке  $(-l_1, x_0)$ .

Из (23) находим

$$v_*(x_0, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} v_1(t_m), \quad u_*(x_0, 0) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} u_1(t_m).$$

Тогда модуль вектора смещений на берегах зоны предразрушения при  $x_1 = x_0$  будет

$$V_0 = \sqrt{u_*^2 + v_*^2} = \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (24)$$

где  $A = \sum_{m=1}^{M_1} v_1(t_m)$ ,  $B = \sum_{m=1}^{M_1} u_1(t_m)$ .





Таким образом, условием, определяющим предельное значение внешней нагрузки, будет

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi l_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2} = \delta_c. \quad (25)$$

Совместное решение полученных алгебраических уравнений и (25) дает возможность (при известных характеристиках трещиностойкости материала) определить критическую величину внешней нагрузки, размеры зоны предразрушения (области ослабленных межчастичных связей материала) для состояния предельного равновесия, при котором появляется трещина.

На рис. 2 представлена зависимость длины зоны предразрушения  $l_1/2L$  от безразмерной нагрузки  $p_0/\sigma_s$  для полосы, толщина которой меняется по линейному закону. В расчетах были приняты следующие значения параметров:  $\nu = 0.3$ ;  $E = 1.8 \cdot 10^5$  МПа,  $\alpha_1 = \pi/4$ ,  $z_1^0 = 0$ ,  $M = 30$ .

На рис. 3 приведена зависимость безразмерной предельной нагрузки  $p_c = \frac{p_0 \sqrt{L}}{\sqrt{E \sigma_s \delta_c}}$  от относительной толщины полосы  $h_1/h_0$ .

Если зона предразрушения одним концом выходит на наружную поверхность полосы ( $y = \pm L$ ), необходимость в дополнительном условии (12) в каждом приближении отпадает.

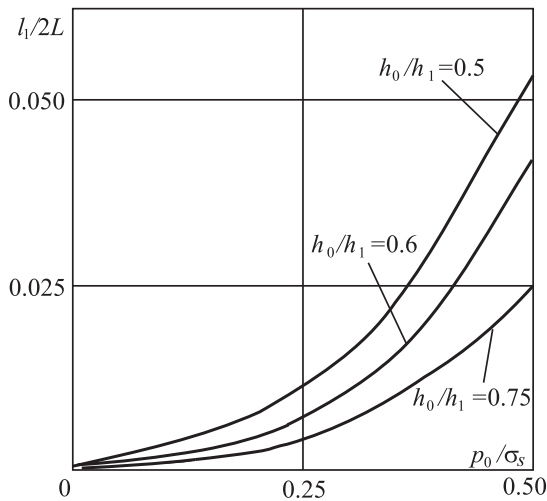


Рис. 2. Зависимость длины зоны предразрушения  $l_1/2L$  от безразмерной нагрузки  $p_0/\sigma_s$

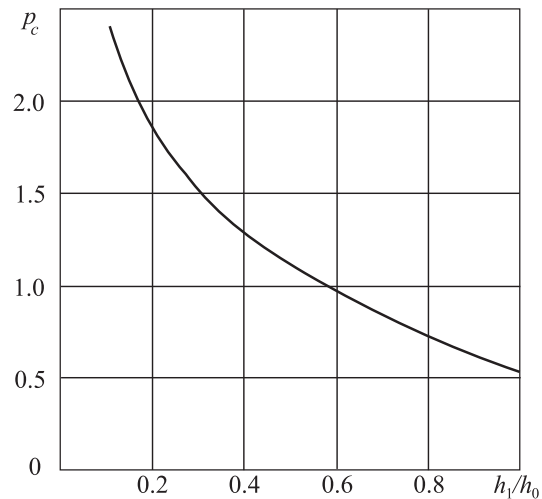


Рис. 3. Зависимость предельной нагрузки  $p_c = \frac{p_0 \sqrt{L}}{\sqrt{E \sigma_s \delta_c}}$  от относительной толщины полосы  $\frac{h_1}{h_0}$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ модели зарождения трещины в полосе переменной толщины при силовом нагружении сводится к параметрическому совместному исследованию разрешающей алгебраической системы задачи и критерия появления трещины (25) при различных значениях свободных параметров полосы. Это различные механические характеристики материала и геометрические данные полосы. Построенная расчетная модель позволяет при изменении параметров  $\alpha_1$  и  $z_1^0$  исследовать влияние расположения зоны ослабленных связей материала в полосе на трещинообразование.

В заключение отметим, что построенная модель, описывающая начало разрушения материала полосы, основана на дислокационных механизмах зарождения трещины. Дислокационные механизмы зарождения трещины получили экспериментальное подтверждение [1].

## Библиографический список

1. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев : Наук. думка, 1991. 416 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л. : Наука, 1967. 420 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев : Наук. думка, 1976. 443 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
5. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М. : Наука, 1987. 256 с.