УДК 514.764.3

ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ (НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ МЕТОДА НОРМАЛИЗАЦИИ А. П. НОРДЕНА)

А. П. Широков

Известно, что наиболее яркие и естественные приложения теории пространств аффинной связности к проективно-дифференциальной геометрии указаны в методе нормализации А. П. Нордена (см. [14]). В настоящей статье отмечаются некоторые из таких приложений. Вначале здесь напоминаются основные идеи метода нормализации, а затем указывается ряд вопросов, разрабатываемых в последнее время учениками А. П. Нордена; отчасти эти вопросы связаны с его теорией композиций (см. [16]).

Основным рабочим средством этой статьи служит использование структурных уравнений пространства аффинной связности (см. [7]). В дифференцируемом многообразии M_n рассматривается семейство кореперов $\{\omega^i\}$. Оно может совпадать с множеством всех кореперов (когда рассматривается все главное расслоенное пространство линейных реперов многообразия M_n), а может образовывать и подрасслоение этого главного расслоения. При этом вполне допустимо локальное рассмотрение, когда кореперы $\{\omega^i\}$ задаются лишь в некоторой открытой области многообразия M_n и, в частности, могут образовывать гладкое поле кореперов в этой области. Задание аффинной связности в M_n равносильно заданию инфинитезимальной связности в главном расслоенном пространстве линейных реперов многообразия M_n. При этом возникают структурные уравнения аффинной связности

$$d\omega^i-\omega^s\wedge\omega_s{}^i=\Omega^i,\quad d\omega_j{}^i-\omega_j{}^s\wedge\omega_s{}^i=\Omega_j{}^i,$$

где $\omega_j{}^i$ — формы связности, а Ω^i и $\Omega_j{}^i$ — формы кручения и кривизны аффинной связности. Если в рассматриваемой области многообразия M_n задано поле кореперов $\{\omega^i\}$, то формы связности $\omega_j{}^i$ принимают вид

$$\omega_j{}^i=\Gamma^i_{js}\omega^s,$$

и величины Γ^i_{jk} называются компонентами аффинной связности относительно поля корепера $\{\omega^i\}$. Формы кручения и кривизны имеют строение

$$\Omega^i=\frac{1}{2}S^i_{pq}\omega^p\wedge\omega^q,\quad \Omega_j^i=\frac{1}{2}R_{pqj}{}^i\omega^p\wedge\omega^q,$$

где $S^i_{pq}=-S^i_{qp}$ и $R_{pqj}{}^i=-R_{qpj}{}^i$ — координаты тензорных полей кручения и кривизны относительно корепера $\{\omega^i\}$.

§ 1. Нормализованные поверхности проективного пространства

Проективное пространство P_n определяется с помощью векторного пространства L_{n+1}: его одномерные подпространства служат точками пространства P_n. Векторное пространство L_{n+1} мы будем отождествлять с центроаффинным пространством, точки которого определяются векторами пространства L_{n+1} как своими радиусами-векторами.

Общей m-мерной поверхности X_m пространства L_{n+1}, заданной векторно-параметрическим уравнением

$$\vec{r}=\vec{r}(u^1,\ldots,u^m),$$

отвечает m-мерная поверхность пространства P_n. При этом, естественно, накладывается условие, чтобы радиусы-векторы точек поверхности X_m не касались этой поверхности. В обратную сторону соответствие между m-мерными поверхностями обоих пространств не определено: поверхности M_m пространства P_n отвечает $(m+1)$-мерный конус K_{m+1} пространства L_{n+1}, и роль поверхности X_m может играть любое m-мерное сечение этого конуса, «трансверсальное» к его прямолинейным образующим.

Пусть поверхность M_m пространства P_n задана с помощью поверхности X_m пространства L_{n+1}. Выберем такое оснащение поверхности X_m, чтобы m оснащающих векторов $\vec{e}_i$ $(i, j,\ldots=1,\ldots, m)$ принадлежали $(m+1)$-мерному подпространству пространства L_{n+1}, проходящему через центр и через касательную плоскость к X_m в точке $M(\vec{r})$; радиус-вектор $\vec{r}$ точки M тоже возьмем за оснащающий вектор и выберем еще $n-m$ оснащающих векторов $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta=m+1,\ldots, n)$. Запишем деривационные формулы для репера $\{\vec{r};\ \vec{e}_i;\ \vec{e}_\alpha\}$:

$$\begin{cases} d\vec{r}=\omega\vec{r}+\omega^s\vec{e}_s,\\ d\vec{e}_i=\omega_i\vec{r}+\omega_i^s\vec{e}_s+\omega_i^\sigma\vec{e}_\sigma,\\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha\vec{r}+\omega_\alpha^s\vec{e}_s+\omega_\alpha^\sigma\vec{e}_\sigma.\end{cases}\tag{1}$$

Соответствующие условия интегрируемости принимают вид

$$\begin{cases} d\omega - \omega^s \wedge \omega_s = 0, \\ d\omega^i - \omega \wedge \omega^i - \omega^s \wedge \omega_s{}^i = 0, \\ \omega^s \wedge \omega_s^\alpha = 0, \end{cases} \tag{A}$$

$$\begin{cases} d\omega_i - \omega_i \wedge \omega - \omega_i{}^s \wedge \omega_s - \omega_i^\sigma \wedge \omega_\sigma = 0, \\ d\omega_i{}^k - \omega_i \wedge \omega^k - \omega_i{}^s \wedge \omega_s{}^k - \omega_i^\sigma \wedge \omega_\sigma^k = 0, \\ d\omega_i^\alpha - \omega_i{}^s \wedge \omega_s^\alpha - \omega_i^\sigma \wedge \omega_\sigma^\alpha = 0, \end{cases} \tag{B}$$

$$\begin{cases} d\omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \omega - \omega_\alpha^s \wedge \omega_s - \omega_\alpha^\sigma \wedge \omega_\sigma = 0, \\ d\omega_\alpha^i - \omega_\alpha \wedge \omega^i - \omega_\alpha^s \wedge \omega_s{}^i - \omega_\alpha^\sigma \wedge \omega_\sigma^i = 0, \\ d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^s \wedge \omega_s^\beta - \omega_\alpha^\sigma \wedge \omega_\sigma^\beta = 0. \end{cases} \tag{C}$$

В уравнениях (1) формы ω^i линейно независимы и могут быть взяты за формы корепера во внутренней геометрии оснащенной поверхности X_m. Второе из уравнений группы (A) можно записать в виде

$$d\omega^i - \omega^s \wedge (\omega_s{}^i - \omega\delta_s{}^i) = 0. \tag{2}$$

Отсюда следует, что формы

$$\overset{1}{\theta}_j{}^i = \omega_j{}^i - \omega\delta_j^i \tag{3}$$

определяют аффинную связность без кручения ∇ на оснащенной поверхности X_m.

Перейдем затем к произвольному другому сечению конуса K_{m+1}:

$$'\vec{r} = \lambda\vec{r}, \tag{4}$$

где λ — гладкая функция, не принимающая нулевых значений. Оснащение этого сечения в соответствующей точке $M(\vec{r})$ осуществим с помощью векторов $\{'\vec{r};\ '\vec{e}_i;\ '\vec{e}_\alpha\}$, где

$$'\vec{e}_i = \lambda\vec{e}_i, \quad '\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha. \tag{5}$$

Тогда уравнения (1) примут вид

$$\begin{cases} d'\vec{r} = {}'\omega'\vec{r} + {}'\omega^s{}'\vec{e}_s, \\ d'\vec{e}_i = {}'\omega_i{}'\vec{r} + {}'\omega_i{}^s{}'\vec{e}_s + {}'\omega_i^\sigma{}'\vec{e}_\sigma, \\ d'\vec{e}_\alpha = {}'\omega_\alpha{}'\vec{r} + {}'\omega_\alpha^s\vec{e}_s + {}'\omega_\alpha^\sigma\vec{e}_\sigma, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$'\omega = \omega + \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad '\omega^i = \omega^i, \quad '\omega_i = \omega_i, \quad '\omega_j{}^i = \omega_j{}^i + \frac{d\lambda}{\lambda}\delta_j{}^i,$$

$$'\omega_i^\alpha = \lambda\omega_i^\alpha, \quad '\omega_\alpha = \frac{1}{\lambda}\omega_\alpha, \quad '\omega_\alpha^i = \frac{1}{\lambda}\omega_\alpha^i, \quad '\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha. \tag{7}$$

Мы видим, что корепер $\{'\omega^i\}$ совпадает с корепером $\{\omega^i\}$. Более того, из (3) и (7) следует, что

$$\overset{1}{\theta}{}_j{}^i = '\omega_j{}^i - '\omega\delta_j{}^i. \tag{8}$$

Таким образом, при указанном выборе оснащения аффинная связность ∇ одна и та же на всех оснащенных поверхностях X_m, трансверсально рассекающих прямолинейные образующие конуса K_{m+1}, и потому ее можно рассматривать как внутреннюю связность нормализованной поверхности M_m пространства P_n.

Уравнения (1) или (6) можно рассматривать как деривационные уравнения нормализованной поверхности M_m, а закон (5) изменения векторов $\vec{e}_i$ при перенормировании (4) обеспечивает фиксацию нормали 2-го рода, натянутой на точки пространства P_n, определяемые векторами $\vec{e}_i$.

Условия интегрируемости уравнений (6) будут снова иметь вид (А), (В), (С), где только теперь надо заменить все формы на штрихованные. Эти условия можно записать в ином виде, если выразить входящие в них формы через базисные формы корепера $\{\omega^i\}$. Так, например, положив

$$\omega = l_s\omega^s, \quad \omega_i = p_{is}\omega^s, \quad \omega_i^\alpha = b_{is}^\alpha\omega^s, \tag{9}$$

где ковектор l_i — так называемый «нормализатор» А. П. Нордена, мы можем записать первое из условий (А) в виде

$$\nabla_{[i}l_{j]} = p_{[ij]}. \tag{10}$$

Второе условие, как отмечалось, выражает факт отсутствия кручения у связности ∇, а третье эквивалентно симметрии величин b_{ij}^α по нижним индексам.

К остальным условиям интегрируемости (В) и (С) будем обращаться по мере необходимости.

Рассмотрим случай $m=n-1$, который соответствует заданию в P_n гиперповерхности. Здесь уравнения (1) принимают вид

$$\begin{cases} d\vec{r} = \omega\vec{r} + \omega^s\vec{e}_s, \\ d\vec{e}_i = \omega_i\vec{r} + \omega_i{}^s\vec{e}_s + \omega_i{}^n\vec{e}_n, \\ d\vec{e}_n = \omega_n\vec{r} + \omega_n{}^s\vec{e}_s + \omega_n{}^n\vec{e}_n, \end{cases} \tag{11}$$

а условия интегрируемости будут

$$\begin{cases} d\omega - \omega^s \wedge \omega_s = 0, \\ d\omega^i - \omega \wedge \omega^i - \omega^s \wedge \omega_s{}^i = 0, \\ \omega^s \wedge \omega_s{}^n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\omega_i - \omega_i\wedge\omega - \omega_i^s\wedge\omega_s - \omega_i^n\wedge\omega_n = 0,\\ d\omega_i^k - \omega_i\wedge\omega^k - \omega_i^s\wedge\omega_s^k - \omega_i^n\wedge\omega_n^k = 0,\\ d\omega_i^n - \omega_i^s\wedge\omega_s^n - \omega_i^n\wedge\omega_n^n = 0,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} d\omega_n - \omega_n\wedge\omega - \omega_n^s\wedge\omega_s - \omega_n^n\wedge\omega_n = 0,\\ d\omega_n^i - \omega_n\wedge\omega^i - \omega_n^s\wedge\omega_s^i - \omega_n^n\wedge\omega_n^i = 0,\\ d\omega_n^n - \omega_n^s\wedge\omega_s^n = 0.\end{cases}$$

В сопряженном пространстве ковекторов L^*_{n+1} рассмотрим корепер $\{\tilde\xi;\ \tilde\eta^i;\ \tilde\eta^n\}$, дуальный реперу $\{\vec r;\ \vec e_i;\ \vec e_n\}$. Согласно (11), его деривационными уравнениями являются

$$\begin{cases} d\tilde\xi = -\omega\tilde\xi - \omega_s\tilde\eta^s - \omega_n\tilde\eta^n,\\ d\tilde\eta^i = -\omega^i\tilde\xi - \omega_s^i\tilde\eta^s - \omega_n^i\tilde\eta^n,\\ d\tilde\eta^n = -\omega_s^n\tilde\eta^s - \omega_n^n\tilde\eta^n.\end{cases} \tag{13}$$

Если формы ω_i^n линейно независимы, то гиперповерхность тангенциально невырожденная. В этом случае формы ω_i^n можно взять за формы нового корепера во внутренней геометрии гиперповерхности. Рассмотрение уравнений (11), (12) и (13) показывает, что если ввести новые формы

$$\begin{matrix} \overset{*}{\omega} = -\omega_n^n, & \overset{*}{\omega}{}^i = -\omega_i^n, & \overset{*}{\omega}_i = -\omega_n^i, & \overset{*}{\omega}{}_j^i = -\omega_i^j,\\ \overset{*}{\omega}{}_i^n = -\omega^i, & \overset{*}{\omega}_n = -\omega_n, & \overset{*}{\omega}{}_n^i = -\omega_i, & \overset{*}{\omega}{}_n^n = -\omega, \end{matrix} \tag{14}$$

то условия интегрируемости (12) перепишутся (после некоторой их перестановки) в точно таком же виде, но только для форм, снабженных значком *. Поэтому для тангенциально невырожденной гиперповерхности можно ввести новую связность без кручения, характеризующуюся в корепере $\{\overset{*}{\omega}{}^i\}$ новыми формами связности

$$\overset{*}{\theta}{}_j^i = \overset{*}{\omega}{}_j^i - \overset{*}{\omega}\delta_j^i.$$

Пересчитаем эту связность к первоначальному кореперу $\{\omega^i\}$, обозначив ее формы там через $\overset{2}{\theta}{}_j^i$. Положим в соответствии с (9)

$$-\overset{*}{\omega}{}^i = \omega_i^n = b_{is}\omega^s, \tag{15}$$

где b_{ij} — асимптотический тензор гиперповерхности. Вспоминая, что при преобразовании корепера $\omega^{i'} = A_s^{i'}\omega^s$ формы связности преобразуются по правилу

$$\theta_j^i = A_{p'}^i A_j^{q'}\theta_{q'}^{p'} + A_{s'}^i dA_j^{s'},$$

и учитывая, что согласно (14), $A_j^{i'} = -b_{ij}$, находим:

$$\overset{2}{\theta}{}_j^i = \tilde b^{ip} b_{jq}(-\omega_p^q - \overset{*}{\omega}\delta_p^q) + \tilde b^{is} db_{js}, \tag{16}$$

или

$$\overset{2}{b}_{ks}\theta_j^{\ s} = -b_{js}\omega_k^{\ s} - b_{jk}\overset{*}{\omega} + db_{jk} = -b_{js}\overset{1}{\theta}_k^{\ s} - b_{jk}\omega - b_{jk}\overset{*}{\omega} + db_{jk},$$

т. е.

$$db_{jk} - \overset{1}{\theta}_k^{\ s} b_{js} - \overset{2}{\theta}_j^{\ s} b_{sk} = (\omega + \overset{*}{\omega})\, b_{jk}. \tag{17}$$

Мы приходим к условию сопряженности связностей $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ относительно асимптотического тензора b_{ij} (см. [14]). Полагая

$$\omega = l_s\omega^s, \quad -\omega_n^{\ n} = \overset{*}{\omega} = \lambda_s\omega^s, \tag{18}$$

получаем из (16) соотношение

$$\nabla_k b_{i(j)} = (l_k + \lambda_k)\, b_{ij}, \tag{19}$$

где слева стоит смешанная ковариантная производная от асимптотического тензора b_{ij}. Используем (15), (18) и введем обозначения

$$\omega_n^{\ i} = p_s^{\ i}\omega^s, \quad \omega_n = \gamma_s\omega^s, \quad \omega_i = p_{is}\omega^s. \tag{20}$$

Тогда последнее из уравнений (13) запишется в виде

$$d\tilde{\eta}^n = -b_{sp}\omega^p\tilde{\eta}^s + \lambda_p\omega^p\tilde{\eta}^n.$$

Мы видим, что это уравнение примет вид первого из уравнений (11), где фигурируют формы корепера $\{\omega^i\}$:

$$d\tilde{\eta}^n = \overset{*}{\omega}\tilde{\eta}^n + \omega^s\tilde{\eta}_s, \tag{21}$$

если ввести ковекторы пространства L^*_{n+1}

$$\eta_i = -b_{is}\tilde{\eta}^s. \tag{22}$$

Уравнения (21) эквивалентны тогда таким:

$$\partial_i^{\omega}\tilde{\eta}^n = \lambda_i\tilde{\eta}^n + \tilde{\eta}_i, \tag{23}$$

где ∂^{ω} — символ пфаффовой производной. Из (22) и (13) теперь следует:

$$\begin{aligned} d\tilde{\eta}_i &= -db_{is}\tilde{\eta}^s + b_{is}\omega^s\tilde{\xi} + b_{im}\omega_l^{\ m}\tilde{b}^{ls}\tilde{\eta}_s + b_{im}p_s^{\ m}\omega^s\tilde{\eta}^n = \\ &= (b^{ms}db_{im} - \tilde{b}^{ms}b_{il}\omega_m^{\ l})\,\tilde{\eta}_s + b_{im}\omega^m\tilde{\xi} + b_{im}p_s^{\ m}\omega^s\tilde{\eta}^n = \\ &= \overset{2}{\theta}_i^{\ s}\tilde{\eta}_s + \overset{*}{\omega}\tilde{\eta}_i + b_{is}\omega^s\tilde{\xi} + b_{im}p_s^{\ m}\omega^s\tilde{\eta}^n, \end{aligned}$$

или

$$\overset{2}{\nabla}_j\tilde{\eta}_i = \lambda_j\tilde{\eta}_i + b_{ij}\tilde{\xi} + b_{is}p_j^{\ s}\tilde{\eta}^n. \tag{24}$$

Первое из уравнений (13) запишется в виде

$$d\tilde{\xi} = -l_s\omega^s\tilde{\xi} + p_{ms}\tilde{b}^{ml}\omega^s\eta_l - \gamma_s\omega^s\tilde{\eta}^n,$$

или

$$\partial_i^\omega \tilde{\xi} = -l_i\tilde{\xi} + \tilde{b}^{ms} p_{mi}\tilde{\eta}_s - \gamma_i\tilde{\eta}^n. \tag{25}$$

Запишем уравнения (11) в пфаффовых и ковариантных производных и сравним их с уравнениями (23)—(25):

$$\begin{cases} \partial_i^\omega \vec{r} = l_i\vec{r} + \vec{e}_i, \\ \overset{1}{\nabla}_j \vec{e}_i = l_j\vec{e}_i + p_{ij}\vec{r} + b_{ij}\vec{e}_n, \\ \partial_i^\omega \vec{e}_n = \gamma_i\vec{r} + p_i{}^s\vec{e}_s - \lambda_i\vec{e}_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_i^\omega \tilde{\eta}^n = \lambda_i\tilde{\eta}^n + \tilde{\eta}_i, \\ \overset{2}{\nabla}_j \tilde{\eta}_i = \lambda_j\tilde{\eta}_i + b_{ij}\tilde{\xi} + b_{is}p_j{}^s\tilde{\eta}^n, \\ \partial_i^\omega \tilde{\xi} = -l_i\tilde{\xi} + \tilde{b}^{ms}p_{mi}\tilde{\eta}_s - \gamma_i\tilde{\eta}^n. \end{cases}$$

В этом сравнении становится особенно ясной двойственность между геометриями 1-го и 2-го рода нормализованной тангенциально невырожденной гиперповерхности. Такое проявление проективного принципа двойственности весьма характерно для метода нормализации А. П. Нордена.

§ 2. Аффинные связности в многообразиях m-пар

Деривационные уравнения (1) можно рассматривать и в случае $m=n$, когда в пространстве L_{n+1} рассматривается гиперповерхность, трансверсально пересекающая радиусы-векторы своих точек. В этом случае векторов $\vec{e}_\alpha$ не существует, и мы рассматриваем нормализованное проективное пространство P_n, точке $M(\vec{r})$ которого ставится в соответствие гиперплоскость, натянутая на точки, определяемые векторами $\vec{e}_i$. Уравнения (1) теперь принимают вид

$$\begin{cases} d\vec{r} = \omega\vec{r} + \omega^s\vec{e}_s, \\ d\vec{e}_i = \omega_i\vec{r} + \omega_i{}^s\vec{e}_s = \omega\vec{e}_i + \theta_i{}^s\vec{e}_s + \omega_i\vec{r}, \end{cases} \tag{26}$$

условия интегрируемости (C) вообще исчезают, а условия серии (B) упрощаются:

$$\begin{cases} d\omega_i - \omega_i\wedge\omega - \omega_i{}^s\wedge\omega_s = 0, \\ d\omega_i{}^k - \omega_i\wedge\omega^k - \omega_i{}^s\wedge\omega_s{}^k = 0. \end{cases}$$

Используя формы связности (3) и первое условие интегрируемости серии (A): $d\omega - \omega^s\wedge\omega_s = 0$, перепишем эти условия в виде

$$\begin{cases} d\omega_i - \theta_i{}^s\wedge\omega_s = 0, \\ d\theta_i{}^k - \theta_i{}^s\wedge\theta_s{}^k = -\omega^s\wedge\omega_s\delta_i{}^k + \omega_i\wedge\omega^k. \end{cases} \tag{27}$$

Если заметить, что входящие в (9) величины p_{ij} образуют тензор по отношению к преобразованию корепера $\{\omega^i\}$, то (27) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\nabla_{[k}p_{|i|j]}=0,$$

$$R_{lmi}^{\ \ \ k}=(p_{mi}-p_{im})\delta_l^k+p_{il}\delta_m^k-p_{lm}\delta_i^k, \qquad (28)$$

где $R_{lmi}^{\ \ \ k}$ — тензор кривизны связности ∇. Известно (см. [14]), что условия (28) необходимы и достаточны для того, чтобы связность ∇ была проективно-евклидовой.

Используем принцип двойственности при рассмотрении деривационных уравнений (26) для нормализованного проективного пространства P_n. Вводя корепер $\{\tilde{\xi};\ \tilde{\eta}^i\}$, дуальный реперу $\{\vec{r};\ \vec{e}_i\}$, получим для него деривационные уравнения

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}=-\omega\tilde{\xi}-\omega_s\tilde{\eta}^s, \\ d\tilde{\eta}^i=-\omega^i\tilde{\xi}-\omega_s^{\ i}\tilde{\eta}^s. \end{cases} \qquad (29)$$

Сравнение уравнений (26) и (29) показывает, что после введения новых форм $\overset{*}{\omega}$, $\overset{*}{\omega}_i$, $\overset{*}{\omega}{}^i$, $\overset{*}{\omega}{}_j^{\ i}$:

$$\overset{*}{\omega}=-\omega, \quad \overset{*}{\omega}_i=-\omega^i, \quad \overset{*}{\omega}{}^i=-\omega_i, \quad \overset{*}{\omega}{}_j^{\ i}=-\omega_i^{\ j}$$

условия интегрируемости сохранят свой вид, будучи записанными для форм, помеченных значком *. В случае линейной независимости форм ω_i (т. е. при условии невырожденности тензора p_{ij} в формулах (9)) мы получаем новую связность без кручения с формами

$$\overset{*}{\theta}{}_j^{\ i}=\overset{*}{\omega}{}_j^{\ i}-\overset{*}{\omega}\delta_j^i=-\omega_i^{\ j}+\omega\delta_i^j$$

в корепере $\{\overset{*}{\omega}{}^i\}$. Эту связность можно рассматривать как связность в нормализованном многообразии гиперплоскостей пространства P_n, когда гиперплоскости, определяемой ковектором $\tilde{\xi}$, ставится в соответствие точка, определяемая вектором $\vec{r}$. Обозначим снова через $\overset{1}{\theta}{}_j^{\ i}=\omega_j^{\ i}-\omega\delta_j^i$ формы первоначальной связности $\overset{1}{\nabla}$, а через $\overset{2}{\theta}{}_j^{\ i}$ — формы новой связности $\overset{2}{\nabla}$, полученные из $\overset{*}{\theta}{}_j^{\ i}$ пересчетом к кореперу $\{\omega^i\}$. Полагая $\overset{*}{\omega}{}^i=\omega^{i'}=-p_{is}\omega^s=A_s^{i'}\omega^s$, получим $A_j^{i'}=-p_{ij}$, $A_{j'}^i=-\tilde{p}^{ij}$, где $\tilde{p}^{si}p_{js}=\delta_j^i$, $\tilde{p}^{is}p_{sj}=\delta_j^i$. После этого

$$\overset{2}{\theta}{}_j^{\ i}=\tilde{p}^{li}p_{mj}(-\omega_l^{\ m}+\omega\delta_l^m)+\tilde{p}^{is}dp_{sj}=-\tilde{p}^{li}p_{mj}\overset{1}{\theta}{}_l^{\ m}+\tilde{p}^{is}dp_{sj},$$

откуда

$$dp_{kj}-\overset{1}{\theta}{}_k^{\ s}p_{sj}-\overset{2}{\theta}{}_j^{\ s}p_{ks}=0.$$

Итак, связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ находятся в сопряженности относительно (несимметричного в общем случае) тензора p_{ij}.

Заметим, что деривационные уравнения (26) справедливы для любого семейства реперов $\{\vec{r};\ \vec{e}_i\}$ в L_{n+1}. Можно, в частности, предположить, что подпространства, натянутые на векторы $\vec{e}_i$, выбираются совершенно независимо от одномерных подпространств, определяемых векторами $\vec{r}$. В таком случае в пространстве P_n возникает множество всех 0-пар, являющееся дифференцируемым многообразием M_{2n} с весьма примечательной геометрией (см. [17], [18]). В рассматриваемой ситуации формы ω^i и ω_i являются линейно независимыми и образуют корепер $\{\omega^i;\ \omega^{n+i}=\omega_i\}$ во внутренней геометрии многообразия M_{2n}. Условия интегрируемости деривационных уравнений (26) теперь принимают вид

$$\begin{cases} d\omega - \Sigma\omega^s\wedge\omega^{n+s}=0,\\ d\omega^i-\omega^s\wedge(\omega_s{}^i-\omega\delta_s{}^i)=0,\\ d\omega^{n+i}-\Sigma\omega^{n+s}\wedge(-\omega_i{}^s+\omega\delta_i{}^s)=0,\\ d\omega_i{}^k-\omega_i{}^s\wedge\omega_s{}^k+\omega^k\wedge\omega^{n+i}=0.\end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что если в корепере $\{\omega^i;\ \omega^{n+i}\}$ рассмотреть формы θ^α_β $(\alpha, \beta=1, \ldots, 2n)$, из которых отличны от нуля $\theta_j{}^i=\omega_j{}^i-\omega\delta_j{}^i$, $\theta^{n+i}_{n+j}=-\omega_i{}^j+\omega\delta_i{}^j$, то эти формы определяют в M_{2n} аффинную связность без кручения, в которой ковариантно постоянны симметрический тензор $g_{\alpha\beta}$ с матрицей

$$(g_{\alpha\beta})=\left|\begin{array}{c|c} 0 & E_n\\ \hline E_n & 0\end{array}\right|,$$

аффинор f^α_β с матрицей

$$(f^\alpha_\beta)=\left|\begin{array}{c|c} E_n & 0\\ \hline 0 & -E_n\end{array}\right|$$

и антисимметрический тензор $f_{\alpha\beta}=f^\sigma_\alpha g_{\sigma\beta}$ с матрицей

$$(f_{\alpha\beta})=\left|\begin{array}{c|c} 0 & E_n\\ \hline -E_n & 0\end{array}\right|.$$

Тензор кривизны этой связности имеет в корепере $\{\omega^i;\ \omega^{n+i}\}$ отличные от нуля компоненты

$$R_{p,n+q,j}{}^{i}=-\delta_p{}^i\delta_{jq}-\delta_{pq}\delta_j{}^i,$$

$$R_{p,n+q,n+j}{}^{n+i}=\delta_{pj}\delta_q{}^i+\delta_{pq}\delta_j{}^i,$$

и может быть записан в инвариантном виде следующим образом:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{1}{2}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}+f_{\beta\delta}f_{\gamma\alpha}-f_{\alpha\delta}f_{\gamma\beta}-2f_{\alpha\beta}f_{\gamma\delta}\right). \quad (30)$$

Как показано Б. А. Розенфельдом (см. [17]), пространство нуль-пар является унитарным пространством постоянной кривизны над алгеброй двойных чисел (точнее, вещественной моделью такого пространства).

Нормализованное проективное пространство P_n можно рассматривать как n-мерное подмногообразие в M_{2n}.

Указанные положения естественно обобщаются: мы предполагаем, что в пространстве L_{n+1} рассматривается множество реперов $\{\vec{e}_i; \vec{e}_\alpha\}$, где $(m+1)$ векторов $\vec{e}_i$ определяют $(m+1)$-мерное подпространство, которому соответствует m-плоскость в P_n. Остальные $n-m$ векторов $\vec{e}_\alpha$ натягивают $(n-m)$-мерное подпространство, определяющее $(n-m-1)$-плоскость в P_n. В совокупности две указанные плоскости составляют m-пару в P_n, и многообразие этих m-пар также является симметрическим римановым пространством, — вещественной моделью некоторого аналога унитарного пространства постоянной кривизны над алгеброй двойных чисел. Чтобы показать это, используем методику, уже применявшуюся Л. Туулметс (см. [22]). Вводя корепер $\{\tilde{\xi}^i; \tilde{\xi}^\alpha\}$, дуальный реперу $\{\vec{e}_i; \vec{e}_\alpha\}$, запишем деривационные уравнения семейств этих реперов и кореперов:

$$\begin{cases} d\vec{e}_i = \omega_i{}^s\vec{e}_s + \omega_i^\sigma\vec{e}_\sigma, \\ d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^s\vec{e}_s + \omega_\alpha^\sigma\vec{e}_\sigma, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} d\tilde{\xi}^i = -\omega_s{}^i\tilde{\xi}^s - \omega_\sigma^i\tilde{\xi}^\sigma, \\ d\tilde{\xi}^\alpha = -\omega_s^\alpha\tilde{\xi}^s - \omega_\sigma^\alpha\tilde{\xi}^\sigma. \end{cases}$$

Условия интегрируемости уравнений (31) имеют вид

$$\begin{cases} d\omega_j{}^i - \omega_j{}^s\wedge\omega_s{}^i - \omega_j^\sigma\wedge\omega_\sigma^i = 0, \\ d\omega_j^\alpha - \omega_j{}^s\wedge\omega_s^\alpha - \omega_j^\sigma\wedge\omega_\sigma^\alpha = 0, \\ d\omega_\alpha^i - \omega_\alpha^s\wedge\omega_s{}^i - \omega_\alpha^\sigma\wedge\omega_\sigma^i = 0, \\ d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^s\wedge\omega_s^\alpha - \omega_\beta^\sigma\wedge\omega_\sigma^\alpha = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Если семейство реперов таково, что пары подпространств, натянутых на векторы $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}_\alpha\}$, порождают все многообразие $M_{2(m+1)(n-m)}$ m-пар пространства P_n, то формы ω_i^α и ω_α^i в совокупности линейно независимы и могут быть взяты за формы корепера во внутренней геометрии многообразия $M_{2(m+1)(n-m)}$. Этот корепер $\{\omega_i^\alpha; \omega_\alpha^i\}$ будем называть адаптированным; он возникает в связи с тем способом задания m-пар пространства P_n, который осуществляется с помощью «скомпонованного» (по терминологии А. П. Нордена) репера $\{\vec{e}_i; \vec{e}_\alpha\}$ пространства L_{n+1}. При преобразовании скомпонованного репера

$$\vec{e}_{i'} = A_{i'}^s\vec{e}_s, \quad \vec{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}^\sigma\vec{e}_\sigma$$

формы адаптированного корепера испытывают преобразование

$$\omega^{\binom{\alpha'}{i'}}=A_{\sigma}^{\alpha'}A_{i'}^{s}\omega^{\binom{\sigma}{s}},\quad \omega^{\binom{i'}{\alpha'}}=A_{\alpha'}^{\sigma}A_{s}^{i'}\omega^{\binom{s}{\sigma}}.$$

Мы обозначили формы ω_i^{α} и ω_{α}^{i} через $\omega^{\binom{\alpha}{i}}$ и $\omega^{\binom{i}{\alpha}}$, вводя составные индексы $\binom{\alpha}{i}$ и $\binom{i}{\alpha}$. Тогда второе и третье из уравнений (32) можно записать в виде

$$\begin{cases} d\omega^{\binom{\alpha}{i}}-\omega^{\binom{\sigma}{s}}\wedge(\delta_i{}^s\omega_{\sigma}^{\alpha}-\delta_{\sigma}^{\alpha}\omega_i{}^s)=0,\\ d\omega^{\binom{i}{\alpha}}-\omega^{\binom{s}{\sigma}}\wedge(\delta_{\alpha}^{\sigma}\omega_s{}^i-\delta_s{}^i\omega_{\alpha}^{\sigma})=0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что в многообразии $M_{2(m+1)(n-m)}$ возникает аффинная связность без кручения, формы θ_B^A которой относительно корепера $\left\{\omega^{\binom{\alpha}{i}};\ \omega^{\binom{i}{\alpha}}\right\}$ имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{cases} \theta_{\binom{\beta}{j}}^{\binom{\alpha}{i}}=\delta_i{}^j\omega_{\beta}^{\alpha}-\delta_{\beta}^{\alpha}\omega_i{}^j,\\ \theta_{\binom{j}{\beta}}^{\binom{i}{\alpha}}=\delta_{\alpha}^{\beta}\omega_j{}^i-\delta_j{}^i\omega_{\alpha}^{\beta}. \end{cases}\tag{33}$$

Из (33) и (32) следует, что формы кривизны Ω_B^A рассматриваемой связности имеют отличные от нуля компоненты

$$\Omega_{\binom{\beta}{j}}^{\binom{\alpha}{i}}=-(\delta_i{}^j\delta_{\beta}^{\sigma}\delta_{\tau}^{\alpha}\delta_s{}^t+\delta_{\beta}^{\alpha}\delta_i{}^t\delta_s{}^j\delta_{\tau}^{\sigma})\,\omega^{\binom{\tau}{t}}\wedge\omega^{\binom{s}{\sigma}},$$

$$\Omega_{\binom{j}{\beta}}^{\binom{i}{\alpha}}=(\delta_j{}^t\delta_s{}^t\delta_{\alpha}^{\sigma}\delta_{\tau}^{\beta}+\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\tau}^{\sigma}\delta_s{}^i\delta_j{}^t)\,\omega^{\binom{\tau}{t}}\wedge\omega^{\binom{s}{\sigma}}.$$

Поэтому отличные от нуля компоненты тензора кривизны в рассматриваемом корепере таковы:

$$\begin{aligned} R^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\tau}{t}\binom{s}{\sigma}\binom{\beta}{j}}&=-\delta_i{}^j\delta_s{}^t\delta_{\beta}^{\sigma}\delta_{\tau}^{\alpha}-\delta_s{}^j\delta_i{}^t\delta_{\tau}^{\sigma}\delta_{\beta}^{\alpha},\\ R^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{\tau}{t}\binom{s}{\sigma}\binom{j}{\beta}}&=\delta_j{}^i\delta_s{}^t\delta_{\alpha}^{\sigma}\delta_{\tau}^{\beta}+\delta_s{}^i\delta_j{}^t\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\tau}^{\sigma}. \end{aligned}\tag{34}$$

Мы видим, что в многообразии $M_{2(m+1)(n-m)}$ существует интегрируемая структура почти произведения со структурным аффинором f_B^A, имеющим ненулевые компоненты

$$f_{\binom{\beta}{j}}^{\binom{\alpha}{i}}=\delta_{\beta}^{\alpha}\delta_i{}^j,\quad f_{\binom{j}{\beta}}^{\binom{i}{\alpha}}=-\delta_{\alpha}^{\beta}\delta_j{}^i.\tag{35}$$

Использование форм (33) показывает, что многообразие $M_{2(m+1)(n-m)}$ обладает также римановым метрическим тензором нулевой сигнатуры g_{AB} с ненулевыми компонентами в адаптированном корепере

$$g_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\beta}}=\delta_j{}^i\delta_\alpha^\beta, \tag{36}$$

ковариантно постоянным в построенной связности. Следовательно, в этой связности будет ковариантно постоянен и бивектор $f_{AB}=f_A^D g_{DB}$ с ненулевыми компонентами

$$f_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\beta}}=-f_{\binom{i}{\alpha}\binom{\beta}{j}}=\delta_\alpha^\beta\delta_j{}^i. \tag{37}$$

Сказанное означает, что многообразие m-пар $M_{2(m+1)(n-m)}$ является вещественной моделью унитарного пространства над алгеброй двойных чисел. В случае $m=0$ мы убедились, что это — унитарное пространство постоянной кривизны. При $m>0$ возникает несколько более сложная ситуация. Наличие метрического тензора g_{AB} позволяет построить ковариантные компоненты тензора кривизны, из которых отличны от нуля

$$R_{\binom{\tau}{i}\binom{s}{\sigma}\binom{\beta}{j}\binom{l}{\alpha}}=-\delta_i{}^j\delta_s{}^l\delta_\beta^\sigma\delta_\tau^\alpha-\delta_s{}^j\delta_i{}^l\delta_\tau^\sigma\delta_\beta^\alpha. \tag{38}$$

Введем в $M_{2(m+1)(n-m)}$ тензорное поле S_{ABCD}, построенное по правилу (30):

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(g_{AC}g_{BD}-g_{BC}g_{AD}+f_{BD}f_{CA}-f_{AD}f_{CB}-2f_{AB}f_{CD}\right). \tag{39}$$

Нетрудно проверить, что из компонент тензора S_{ABCD} отличны от нуля в адаптированном репере только компоненты вида

$$S_{\binom{\tau}{i}\binom{s}{\sigma}\binom{\beta}{j}\binom{l}{\alpha}}=-\delta_{ij}\delta_{ls}\delta_{\beta\alpha}\delta_{\tau\sigma}-\delta_{sj}\delta_{il}\delta_{\sigma\beta}\delta_{\tau\alpha}.$$

Из сравнения с (38) следует, что

$$R_{ABCD}=\tilde{S}_{ABCD}, \tag{40}$$

где знак $\sim$ означает операцию, определяемую в адаптированном корепере перестановкой любой пары родственных (т. е. одновременно греческих или латинских) индексов, стоящих на одном уровне. Эта операция определяется инвариантным образом по отношению к преобразованию адаптированного репера. Операция $\sim$ перестановочна с операцией абсолютного дифференцирования в связности (33), а потому из (39) и (40) следует, что пространство $M_{2(m+1)(n-m)}$ симметрично в смысле Картана (см. [19]).

Если m-плоскости, определяемые векторами $\vec{e}_i$, пробегают все грассманово многообразие m-плоскостей пространства P_n, а каждой такой m-плоскости ставится в соответствие дополнительная $(n-m-1)$-плоскость m-пары, то в деривационных уравнениях (31) формы ω_i^α должны быть линейно независимыми.

Предполагая, что с каждой m-плоскостью некоторой области нормализованного грассманова многообразия $N_{(m+1)(n-m)}$ ассоциирован определенный репер $\{\vec{e}_i; \vec{e}_\alpha\}$, мы получим, что все остальные формы в уравнениях (31) должны выражаться линейно через $\omega_i^\alpha = \omega^{\binom{\alpha}{i}}$. В частности, обозначая $\omega_\alpha^{i'} = \omega_{\binom{\alpha}{i}}$, получим

$$\omega_{\binom{\alpha}{i}} = p_{\binom{\alpha}{i}\binom{\sigma}{s}} \omega^{\binom{\sigma}{s}}. \tag{41}$$

Формы $\omega^{\binom{\alpha}{i}}$ образуют корепер в нормализованном грассмановом многообразии $N_{(m+1)(n-m)}$. Вторая серия условий (32), записанных в виде

$$d\omega^{\binom{\alpha}{i}} - \omega^{\binom{\sigma}{s}} \wedge (\delta_i{}^s \omega_\sigma^\alpha - \delta_\sigma^\alpha \omega_i{}^s) = 0,$$

показывает, что формы

$$\theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}} = \delta_i{}^j \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_i{}^j \tag{42}$$

определяют аффинную связность без кручения в многообразии $N_{(m+1)(n-m)}$. Эта связность была впервые указана Э. Г. Нейфельдом (см. [10]) и впоследствии нашла значительные применения в теории композиций А. П. Нордена (см. [16]). К связности (42) можно прийти также следующим образом. Если записать уравнения (31) в виде

$$\delta\vec{e}_i = \omega_i^\sigma \vec{e}_\sigma, \quad \delta\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^s \vec{e}_s,$$

используя формы связности $\omega_j{}^i$ и ω_β^α для абсолютного дифференцирования специальных векторов скомпонованного репера, и ввести «девиатор» (см. [16])

$$B^\alpha_{i\binom{\beta}{j}} = \delta_\beta^\alpha \delta_i{}^j,$$

с помощью которого первое из уравнений (31) представится в виде

$$\delta\vec{e}_i = B^\alpha_{i\binom{\sigma}{s}} \omega^{\binom{\sigma}{s}} \vec{e}_\alpha,$$

то формы связности Нейфельда (42) определятся из условия ковариантного постоянства девиатора:

$$dB^\alpha_{i\binom{\beta}{j}} - \omega_i{}^s B^\alpha_{s\binom{\beta}{j}} - \theta^{\binom{\sigma}{s}}_{\binom{\beta}{j}} B^\alpha_{i\binom{\sigma}{s}} + \omega_\sigma^\alpha B^\sigma_{i\binom{\beta}{j}} = 0.$$

Как и в случае нормализованного проективного пространства, можно выделить тот случай, когда формы $\overset{*}{\omega}{}^{\binom{\alpha}{i}} = \omega_{\binom{\alpha}{i}} =$

$=\omega^i_\alpha$ линейно независимы. Третья серия условий (32) может быть тогда записана в виде

$$d\overset{*}{\omega}{}^{\binom{\alpha}{i}}-\overset{*}{\omega}{}^{\binom{\sigma}{s}}\wedge(\delta^\sigma_\alpha\omega_s{}^i-\delta_s{}^i\omega^\sigma_\alpha)=0,$$

и это показывает, что в корепере $\left\{\overset{*}{\omega}{}^{\binom{\alpha}{i}}\right\}$ формы

$$\Xi^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}}=\delta^\beta_\alpha\omega_j{}^i-\delta_j{}^i\omega^\beta_\alpha$$

также определяют связность без кручения. Вводя собирательные индексы и обозначая формы (42) через $\overset{1}{\theta}{}^A_B$, пересчитаем формы связности Ξ^A_B к кореперу $\{\omega^A\}$, обозначив их там через $\overset{2}{\theta}{}^A_B$; учитывая, что согласно (41)

$$\overset{*}{\omega}{}^A=P^A_B\omega^B,\quad \omega^A=\tilde{P}^A_B\overset{*}{\omega}{}^B,$$

где

$$P^A_B=p_{AB},\quad \tilde{P}^A_B=\tilde{p}^{AB},$$

$$p_{AC}\tilde{p}^{CB}=\delta^B_A,\quad p_{CA}\tilde{p}^{BC}=\delta^B_A,$$

мы получим

$$\overset{2}{\theta}{}^A_B=\sum_{(C,D)}\tilde{p}^{AD}p_{CB}\Xi^D_C+\tilde{p}^{AC}dp_{CB},$$

откуда

$$dp_{AB}-\overset{1}{\theta}{}^C_Ap_{CB}-\overset{2}{\theta}{}^C_Bp_{AC}=0.$$

Таким образом, как и в случае нормализованного проективного пространства, мы приходим к паре связностей, находящихся в сопряженности относительно тензора p_{AB}.

В настоящее время Е. М. Кузнецова (см. [8], [9]) исследует вопрос о том, как указанные выше положения переносятся на многообразия голоморфных m-пар проективного пространства над алгеброй; ряд основных фактов был здесь установлен с помощью другой методики Э. Г. Нейфельдом (см. [11], [12]).

В качестве одного из применений связности Нейфельда укажем релятивную линейчатую геометрию аффинного пространства (см. [26]). Пусть в аффинном пространстве A_{n+1} задана гиперповерхность M_n и зафиксирована точка O, взятая за начальную. Радиусы-векторы точек гиперповерхности (индикатрисы) берутся за направляющие векторы ориентированных прямых пространства A_{n+1}, и каждая такая прямая определяется своим направляющим вектором $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ и касательным вектором $\overrightarrow{MM_1}=\vec{v}$ индикатрисы, где M_1—точка пересечения прямой с касательной гиперплоскостью к индикатрисе в точке M. Другими словами, ориентированная прямая пространства A_{n+1} задается элементом $(\vec{r}, \vec{v})$ касательного расслоения $T(M_n)$ индикатрисы. Оснащая индикатрису $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\vec{r}(u^1, \ldots, u^m)$ ее радиусом-вектором $\vec{r}$, определим из деривационных уравнений

$$\nabla_j \vec{r}_i = b_{ij}\vec{r}$$

внутреннюю эквипроективную связность Γ^i_{jk} индикатрисы с тензором кривизны

$$R_{pqj}{}^{i} = -b_{qj}\delta_p{}^i + b_{pj}\delta_q{}^i, \tag{43}$$

где b_{ij} — асимптотический тензор, удовлетворяющий условию Кодацци

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = 0.$$

Те свойства линейчатой геометрии пространства A_{n+1}, которые находят естественное истолкование с точки зрения геометрии касательного расслоения индикатрисы, составляют содержание релятивной линейчатой геометрии.

Осуществляя в пространстве A_{n+1} инфинитезимальное параллельное перенесение с постоянным вектором мгновенной скорости $\vec{a}=\mu^s\vec{r}_s+\lambda\vec{r}$, мы получим инфинитезимальное преобразование во множестве прямых, порождающее векторное поле $\vec{\xi}$ в касательном расслоении $T(M_n)$. Вводя в $T(M_n)$ индуцированные локальные координаты u^i, u^{n+i} $(\vec{v}=\overrightarrow{MM_1}=u^{n+s}\vec{r}_s)$, мы представим $\vec{\xi}$ в виде

$$\vec{\xi}=\mu^s \frac{\partial}{\partial u^{n+s}}. \tag{44}$$

При этом постоянство вектора $\vec{a}$ влечет соотношения

$$\nabla_j\mu^i + \lambda\delta_j{}^i = 0, \quad \lambda_j + b_{js}\mu^s = 0. \tag{45}$$

Введем в $T(M_n)$ аффинную связность без кручения $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, построенную по правилу

$$\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta\gamma} = {}^C\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - {}^C b_{\beta\sigma} w^\sigma f^\alpha_\gamma - {}^C b_{\gamma\sigma} w^\sigma f^\alpha_\beta + {}^V b_{\beta\gamma} w^\alpha, \tag{46}$$

где ${}^C\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — полный лифт связности Γ^i_{jk} в касательное расслоение, ${}^C b_{\alpha\beta}$ и ${}^V b_{\alpha\beta}$ — полный и вертикальный лифты асимптотического тензора b_{ij} в $T(M_n)$, а $\vec{w}=u^{n+s}\frac{\partial}{\partial u^{n+s}}$ — векторное поле Лиувилля (поле слоевой гомотетии) в $T(M_n)$. Тогда простые подсчеты с учетом (44), (45) и (46) показывают, что векторное поле $\vec{\xi}$ определяет инфинитезимальную аффинную коллинеацию связности $\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta\gamma}: L_{\vec{\xi}}\mathcal{E}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$. Таким образом, параллельные переносы пространства A_{n+1} индуцируют в касательном расслоении $T(M_n)$ аффинные коллинеации связности (46). Ясно, что связность (46) сохраняется и при тех центроаффинных преобразованиях пространства A_{n+1}, которые переводят в себя индикатрису. В этом смысле можно сказать, что указанная связность определяет релятивную линейчатую геометрию пространства A_{n+1}. Впервые связность (46) была определена В. А. Юрьевым [27] для евклидова пространства E_{n+1}, когда роль индикатрисы играла гиперсфера с центром в 0. В дальнейшем обнаружилось, что эта связность является специальным случаем связности Нейфельда и определяется соответствием, относящим прямой пространства A_{n+1} несобственную гиперпрямую касательной гиперплоскости к индикатрисе. В последнее время релятивная линейчатая геометрия аффинного пространства исследуется Е. Н. Сосовым (см. [20], [21]). При $n=2$ связность (46) всегда риманова, конформно-евклидова. Если же $n>2$, то даже в случае евклидова пространства E_{n+1}, когда в качестве индикатрисы выбрана гиперсфера с центром в O, эта связность перестает быть римановой. Однако линейчатая геометрия неевклидовых пространств постоянной кривизны обладает инвариантной псевдоримановой метрикой (см. [15], [19], [12]). При этом на примере пространства Лобачевского $Л_{n+1}$ с радиусом кривизны R можно показать, что при $R\to\infty$ инвариантная псевдориманова метрика линейчатой геометрии пространства $Л_{n+1}$ переходит в метрику сферического отображения для ориентированных прямых пространства E_{n+1}, т. е. вырождается, а соответствующая риманова связность переходит в связность (46) В. А. Юрьева.

§ 3. Нормализованные расслоения проективного пространства

Предположим, что векторное (центроаффинное) пространство L_{n+1} расслоено на m-параметрическое семейство $(n-m+1)$-мерных конусов, так что каждый ненулевой вектор некоторой области пространства L_{n+1} принадлежит единственному конусу семейства, а сами эти конусы могут быть отображены на точки соответствующей области m-мерного многообразия M_m с помощью «отображения проекции» π. В точке конуса с радиусом-вектором $\vec{r}$ рассмотрим $n-m$ векторов $\vec{e}_\alpha$, касательных к конусу, и m векторов $\vec{e}_i$. Будем предполагать, что векторы $\{\vec{r};\ \vec{e}_i;\ \vec{e}_\alpha\}$ образуют репер пространства L_{n+1}. Кроме того, предположим, что при перенормировке $\vec{r}\to\lambda\vec{r}$ векторы $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_i$ умножаются на тот же множитель λ, причем дифференциал проекции π_* отображает векторы $\vec{e}_i$ в векторы $\underset{0}{\vec{e}_i}$ репера многообразия

$M_m: \underset{0}{\vec{e}_i} = \pi_* \vec{e}_i$. Обозначим через $\{\underset{0}{\omega^i}\}$ корепер, дуальный реперу $\{\underset{0}{\vec{e}_i}\}$. Тогда можно записать разложение

$$d\vec{r} = \omega\vec{r} + \omega^s\vec{e}_s + \omega^\sigma\vec{e}_\sigma,$$

где $\omega^i = \pi^* \underset{0}{\omega^i}$. Если предположить, что $\{\vec{r};\ \vec{e}_i;\ \vec{e}_\alpha\}$—указанное выше поле реперов в L_{n+1}, согласованное с расслоением пространства L_{n+1} на семейство $(n-m-1)$-мерных конусов, то в M_m мы получим поле кореперов $\{\underset{0}{\omega^i}\}$, для которого будут иметь место соотношения вида

$$d\underset{0}{\omega^i} = \frac{1}{2} b^i_{pq} \underset{0}{\omega^p} \wedge \underset{0}{\omega^q},$$

где b^i_{pq}—функции на M_m. Такие же соотношения будут иметь место и для форм $\omega^i = \pi^* \underset{0}{\omega^i}$, т. е. внешние дифференциалы этих m форм должны разлагаться по внешним произведениям этих же m форм. Запишем деривационные уравнения для поля реперов $\{\vec{r};\ \vec{e}_i;\ \vec{e}_\alpha\}$:

$$\begin{cases} d\vec{r} = \omega\vec{r} + \omega^s\vec{e}_s + \omega^\sigma\vec{e}_\sigma, \\ d\vec{e}_i = \omega_i\vec{r} + \omega_i^s\vec{e}_s + \omega_i^\sigma\vec{e}_\sigma, \\ d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha\vec{r} + \omega_\alpha^s\vec{e}_s + \omega_\alpha^\sigma\vec{e}_\sigma. \end{cases} \tag{47}$$

Естественно предполагать далее, что $\vec{r}$ является радиусом-вектором гиперповерхности, трансверсально пересекающей прямолинейные образующие m-мерных конусов. Тогда формы ω^i, ω^α будут линейно независимы, а остальные формы в уравнениях (47) можно по ним разложить. В частности, мы будем иметь

$$\omega = l_s\omega^s + l_\sigma\omega^\sigma, \quad \omega_j{}^i = L^i_{js}\omega^s + L^i_{j\sigma}\omega^\sigma. \tag{48}$$

Из условий интегрируемости уравнений (47) отметим следующие:

$$d\omega^i - \omega\wedge\omega^i - \omega^s\wedge\omega_s{}^i - \omega^\sigma\wedge\omega^i_\sigma = 0.$$

Учитывая (48) и тот факт, что внешние дифференциалы форм ω^i должны разлагаться по внешним произведениям этих же форм, получим отсюда:

$$d\omega^i - \omega^p\wedge(L^i_{pq} - \delta_p{}^i l_q)\,\omega^q = 0. \tag{49}$$

При изменении корепера $\{\underset{0}{\omega^i}\}$ в M_m по правилу $\underset{0}{\omega^{i'}} = A^{i'}_s \underset{0}{\omega^s}$ формы ω^i тоже преобразуются по этому же правилу, а потому формы

$$\theta_j{}^i = (L^i_{js} - \delta_j{}^i l_s)\,\omega^s$$

преобразуются так же, как формы связности на базисном многообразии M_m. Однако коэффициенты

$$г^i_{jk}=L^i_{jk}-\delta_j{}^i l_k \tag{50}$$

в общем случае зависят не только от базисных, но и от слоевых переменных. Если они зависят лишь от базисных переменных, то на многообразии слоев возникает аффинная связность $г^i_{jk}$, и из условий (49), записанных в виде

$$d\omega^i-\omega^s\wedge\theta_s{}^i=0,$$

следует, что эта связность не имеет кручения.

Чтобы дать истолкование указанной связности без кручения на базе M_m, сравним уравнения (47) с уравнениями (26) для нормализованного проективного пространства. Мы видим, что если точке $M(\vec{r})$ пространства P_n поставить в соответствие гиперплоскость, натянутую на точки, определяемые векторами $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_\alpha$, то в P_n возникнет проективно-евклидова связность, определяемая по отношению к кореперу $\{\omega^i;\ \omega^\alpha\}$ формами связности

$$\Xi^A_B=\omega^A_B-\omega\delta^A_B=г^A_{BC}\omega^C \quad (A, B, C=1, \ldots, n). \tag{51}$$

Указанное выше семейство конусов задает локальное расслоение пространства P_n на семейство $(n-m)$-мерных поверхностей, и уравнения $\omega^\alpha=0$ задают в P_n распределение трансверсальных к слоям «горизонтальных» площадок. Мы приходим к расслоению с проективно-евклидовой связностью (51), в котором задана инфинитезимальная связность Δ системой уравнений Пфаффа $\omega^\alpha=0$, т. е. к специальному случаю ситуации, рассматривавшейся в статье [23]. Дадим истолкование условию независимости величин (50) от слоевых координат с точки зрения понятия проектируемости аффинной связности в расслоении в смысле К. М. Егиазаряна (см. [1]—[6]). Рассмотрим на базе M_m два векторных поля $\vec{X}$, $\vec{Y}$ с координатами X^i, Y^i относительно корепера $\{\overset{0}{\omega^i}\}$. Горизонтальные лифты ${}^H\vec{X}$, ${}^H\vec{Y}$ этих полей в P_n будут иметь в корепере $\{\omega^i;\ \omega^\alpha\}$ координаты $(X^i;\ 0)$, $(Y^i;\ 0)$. Абсолютная производная

$$\nabla_{{}^H\vec{X}}{}^H\vec{Y}=\{X^s\partial^\omega_s Y^i+г^i_{ms}Y^mX^s;\ г^\alpha_{ms}Y^mX^s\}$$

тогда и только тогда при любом выборе полей $\vec{X}$, $\vec{Y}$ проектируется на базу в векторное поле, когда величины (50) не зависят от слоевых координат, и в таком случае эти величины $г^i_{jk}$ определяют спроектированную связность на базе. Итак, независимость величин (50) от слоевых координат равносильна проектируемости проективно-евклидовой связности (51) на базу с помощью инфинитезимальной связности Δ.

Произведем указанные выше построения в локальных координатах (u^i; u^α), где u^i — локальные координаты на базе M_m, а u^α — слоевые координаты. Специализируем выбор форм допустимого корепера, положив

$$\{\omega^i = du^i;\ \omega^\alpha = du^\alpha + l^\alpha_s du^s\} \tag{52}$$

(здесь для краткости пишется du^i вместо $\pi^* du^i$). Тогда дифференциал гладкой функции f в P_n будет иметь вид

$$df = \partial_i f du^i + \partial_\alpha f (\omega^\alpha - l^\alpha_s du^s) = (\partial_i f - l^\sigma_i \partial_\sigma f)\,\omega^i + \partial_\sigma f \omega^\sigma.$$

Поэтому пфаффовы производные $\partial^\omega_i f$ и $\partial^\omega_\alpha f$ имеют строение

$$\partial^\omega_i f = \partial_i f - l^\sigma_i \partial_\sigma f, \quad \partial^\omega_\alpha f = \partial_\alpha f.$$

В соответствии с деривационными уравнениями (47), которые мы теперь запишем в виде

$$\begin{cases} d\vec{r} = \omega\vec{r} + \omega^s \vec{e}_s + \omega^\sigma \vec{e}_\sigma, \\ d\vec{e}_i = \omega\vec{e}_i + \tilde{\omega}_i{}^s \vec{e}_s + \tilde{\omega}^\sigma_i \vec{e}_\sigma + \omega_i \vec{r}, \\ d\vec{e}_\alpha = \omega\vec{e}_\alpha + \tilde{\omega}^s_\alpha \vec{e}_s + \tilde{\omega}^\sigma_\alpha \vec{e}_\sigma + \omega_\alpha \vec{r}, \end{cases} \tag{53}$$

где $\omega = l_s \omega^s + l_\sigma \omega^\sigma$, имеем:

$$\begin{cases} \vec{e}_i = \partial^\omega_i \vec{r} - l_i \vec{r}, \\ \vec{e}_\alpha = \partial^\omega_\alpha \vec{r} - l_\alpha \vec{r}. \end{cases} \tag{54}$$

Полагая

$$\tilde{\omega}_j{}^l = \varepsilon^l_{js}\omega^s + \varepsilon^l_{j\sigma}\omega^\sigma = \theta_j{}^l + \varepsilon^l_{j\sigma}\omega^\sigma,$$

из условий $d\omega^A - \omega^B \wedge \tilde{\omega}^A_B = 0$ получим симметрию величин ε^l_{jk} по нижним индексам. Покажем, как подсчитываются величины ε^l_{jk}, если вместо пфаффовых производных использовать только частные производные по локальным координатам. Уравнения (54) расписываются так:

$$\vec{e}_i = \partial_i \vec{r} - l^\sigma_i \partial_\sigma \vec{r} - l_i \vec{r} = \partial_i \vec{r} - l^\sigma_i \vec{e}_\sigma - l^\sigma_i l_\sigma \vec{r} - l_i \vec{r} =$$
$$= \partial_i \vec{r} - (l_i + l^\sigma_i l_\sigma)\vec{r} - l^\sigma_i \vec{e}_\sigma, \quad \vec{e}_\alpha = \partial_\alpha \vec{r} - l_\alpha \vec{r}.$$

Полагая $\overset{*}{l}_i = l_i + l^\sigma_i l_\sigma$, $\overset{*}{l}_\alpha = l_\alpha$, имеем:

$$\begin{cases} \vec{e}_i = \partial_i \vec{r} - \overset{*}{l}_i \vec{r} - l^\sigma_i \vec{e}_\sigma, \\ \vec{e}_\alpha = \partial_\alpha \vec{r} - \overset{*}{l}_\alpha \vec{r}. \end{cases} \tag{55}$$

В первой из формул (53) теперь $\omega = \overset{*}{l}_A du^A = l_s \omega^s + l_\sigma \omega^\sigma$. Запишем разложения

$$\partial_A \vec{e}_i = \overset{*}{l}_A \vec{e}_i + \Gamma^B_{iA} \vec{e}_B + p_{iA} \vec{r}. \tag{56}$$

Тогда

$$\overrightarrow{de_i}=\omega\overrightarrow{e_i}+\Gamma^B_{iA}du^A\overrightarrow{e_B}+\omega_i\overrightarrow{r}=$$
$$=\omega\overrightarrow{e_i}+\Gamma^B_{is}\omega^s\overrightarrow{e_B}+\Gamma^B_{i\sigma}(\omega^\sigma-l^\sigma_s\omega^s)\overrightarrow{e_B}+\omega_i\overrightarrow{r}=$$
$$=\omega\overrightarrow{e_i}+(\Gamma^B_{is}-\Gamma^B_{i\sigma}l^\sigma_s)\,\omega^s\overrightarrow{e_B}+\Gamma^B_{i\sigma}\omega^\sigma\overrightarrow{e_B}+\omega_i\overrightarrow{r}.$$

Сравнивая со второй из формул (53), находим:

$$\tilde{\omega}_j{}^i=(\Gamma^i_{js}-\Gamma^i_{j\sigma}l^\sigma_s)\,\omega^s+\Gamma^i_{j\sigma}\omega^\sigma,$$

Откуда

$$z^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{j\sigma}l^\sigma_k. \tag{57}$$

Если величины z^i_{jk} не зависят от слоевых координат, то возникает аффинная связность без кручения на базе, которая находит применения в проективно-дифференциальной геометрии и в геометрии пространств над алгебрами (см. [24], [25]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егиазарян К. М.*, О проектировании инвариантных связностей на главных расслоенных пространствах. Изв. вузов. Математика, 1978, № 7, 97—101 (РЖМат, 1979, 3А591)
2. —, Многообразия аффинной связности почти произведения. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1979, № 11, 29—55 (РЖМат, 1980, 7А665)
3. —, Аффинные связности на грассмановом многообразии. Изв. вузов. Мат., 1980, № 5, 76—78 (РЖМат, 1980, 11А769)
4. —, Спроектированные инвариантные аффинные связности. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1980, № 12, 27—37 (РЖМат, 1981, 7А660)
5. —, Аффинные связности на вещественной модели грассманова многообразия над алгеброй. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1981, № 13, 12—20 (РЖМат, 1982, 1А925)
6. —, *Широков А. П.*, Проектирование связностей в расслоениях и его приложения к геометрии пространств над алгебрами. Дифференц. геометрия (Саратов), 1979, № 4, 132—140 (РЖМат, 1980, 6А765)
7. *Картан Э.*, Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Перев. с фр. Казань, Казанск. ун-т, 1962, 210 стр. (РЖМат, 1965, 2А618К)
8. *Кузнецова Е. М.*, Аффинные связности на многообразиях m-пар n-мерного проективного пространства. Казан. ун-т. Казань, 1983. 10 с. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 14 июля 1983 г., № 3951—83 Деп.) (РЖМат, 1983, 11А831 ДЕП.)
9. —, Аффинные связности на многообразиях пар точек одномерного проективного пространства P_1 над алгеброй $\mathfrak{A}$. Казан. ун-т. Казань, 1984. 15 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 16 апр. 1984 г., № 2340—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 8А766 ДЕП.)
10. *Нейфельд Э. Г.*, Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. Изв. вузов. Математика, 1976, № 11, 48—55 (РЖМат, 1977, 6А540)
11. —, Геометрия поверхности в проективном пространстве над алгеброй. Геометрия обобщен. пространств. Уфа, 1982, 32—51 (РЖМат, 1983, 5А582)

12. —, О геометриях, определяемых поляритетом в проективном пространстве над алгеброй. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1983, № 15, 64—66 (РЖМат, 1984, 5А682)
13. —, Нормализованное семейство плоскостей и геометрия второго рода поверхности. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 69—81 (РЖМат, 1985, 5А610)
14. *Норден А. П.*, Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976,
15. —, О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. Изв. вузов. Математика, 1972, № 12, 84—94 (РЖМат, 1973, 5А675)
16. —, Теория композиций. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Сер. Пробл. геометрии, 1978, *10*, 117—145 (РЖМат, 1979, 5А638)
17. *Розенфельд Б. А.*, Об унитарных и расслоенных пространствах. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1949, вып. 7, 260—275
18. —, Проективная геометрия как метрическая геометрия. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1950, вып. 8, 328—354
19. —, Симметрические пространства и их геометрические приложения. В кн. Э. Картан: «Геометрия групп Ли и симметрические пространства». М., 1949, 331—368
20. *Сосов Е. Н.*, Замечание о релятивной линейчатой геометрии. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1982, № 13, 91—94 (РЖМат, 1983, 6А665)
21. —, О релятивной линейчатой геометрии аффинного пространства. Казан. ун-т. Казань, 1984. 20 с. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1 июня 1984 г., № 3619—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 10А596)
22. *Туулметс Л.*, О геометрии однородного пространства m-пар и его многообразии. Уч. зап. Тартус. ун-та, 1978, № 464,/22, 98—115 (РЖМат, 1978, 12А1059)
23. *Шапуков Б. Н.*, Связности на дифференцируемых расслоениях. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии, 1983, *15*, 61—93 (РЖМат, 1984, 5А725)
24. *Широков А. П.*, О нормализациях в проективном пространстве с заданным расслоением. Изв. вузов. Математика, 1974, № 5, 216—221 (РЖМат. 1975, 1А776)
25. —, Метод нормализации Нордена и вещественные модели проективных пространств над алгебрами. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1975, № 8, 145—152 (РЖМат, 1976, 2А810)
26. —, К вопросу о релятивной линейчатой геометрии. Дифференц. геометрия (Саратов), 1977, № 3, 69—81
27. *Юрьев В. А.*, Инвариантная связность многообразия прямых n-мерного евклидова пространства. Сб. аспирантск. работ. Казан. ун-т. Точн. науки. Мат., 1970, вып. 1, 148—157 (РЖМат, 1971, 6А679)