Н. М. Гулевич, Оценка удаленности множества неподвижных точек,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 1993, том 208, 182–185

Н.М.Гулевич

ОЦЕНКА УДАЛЕННОСТИ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

В работе [I] была доказана

ТЕОРЕМА А. Пусть B – ограниченное выпуклое тело в равномерно гладком банаховом пространстве X и $T: X \longrightarrow X$ – нерастягивающее отображение. Если для некоторого натурального числа m величина

$$\varepsilon = d(T^m(\overline{ext}\, B), X \setminus B)$$

больше нуля, где $\overline{ext}\, B$ – замыкание совокупности крайних точек множества B, то $Fix\, T = \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$.

Цель заметки – оценить удаленность множества неподвижных точек $Fix\, T$ от множества B.

Пусть: $(X, \|\cdot\|)$ – банахово пространство; $V(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| \leq r\}$; $S(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| = r\}$; $S(X) = S(0,1)$; ∂M – граница множества $M \subset X$; $d(M)$ – диаметр M; $\overline{co}\, M$ – замкнутая выпуклая оболочка M; $d(x,M) = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$; $d(N,M) = \inf\{\|x-y\| : x \in N, y \in M\}$; $\lambda(M) = \sup\{d(x,M) : x \in \overline{co}\, M\}$ – мера невыпуклости M; $G(X) = \sup\{\lambda(M) : M \subset X, d(M) = 1\}$.

Отображение $T: X \longrightarrow X$ называется нерастягивающим, если $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ для любых $x, y \in X$.

Банахово пространство X называется равномерно гладким, если $\lim\limits_{t \to 0+0} \frac{\rho(t)}{t} = 0$, где $\rho(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \|y\| \leq 1\right\}$ – модуль гладкости пространства X.

Нам понадобится следующая простая

ЛЕММА I. Пусть X – равномерно гладкое банахово пространство. Тогда для любых $t > 0$, $x \in S(0,1)$ и $y \in V(0,1)$ справедливы неравенства

$$t\varphi_x(y) \leq \|x + ty\| - \|x\| \leq t\varphi_x(y) + 2\rho(t), \qquad (I)$$

где $\varphi_x \in S(X^*)$ и $\varphi_x(x) = \|x\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению величины $\rho(t)$, для $t > 0$, $x \in S(0,1)$ и $y \in V(0,1)$ имеем

$$\|x + ty\| + \|x - ty\| \leq 2 + 2\rho(t).$$

Отсюда, так как $1 \pm t\varphi_x(y) = \varphi_x(x \pm ty) \leq \|x \pm ty\|$, получаем (I). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Доказательство теоремы I из [I] можно упростить, если вместо леммы об отделимости множеств применить лемму I.

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда для любого $x \in Fix\, T$ справедливы утверждения:

(а) $d(x,B) \leq G(X)\, d(B)/\eta\left[\frac{\varepsilon}{2G(X)d(B)}\right]$, где $\eta(\cdot)$ – функция, обратная к функции $\frac{\rho(t)}{t}$;

(в) $d(x,B) \leq \frac{[d(B)]^2}{4\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}$, если X – гильбертово пространство;

(с) $d(x,B) \leq \frac{n-1}{n}\frac{[d(B)]^2}{4\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}$, если X – n-мерное ($n \geq 2$) гильбертово пространство;

(d) $x \in B$, если $\overline{ext\, B} = \partial B$ (в частности, это имеет место в одномерном пространстве X).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть $x \in Fix\, T$ и $x \notin B$. Так как $B = \overline{co}\, A$, где $A = \overline{ext\, B}$ – слабый компакт, найдется элемент $b \in \partial B$ такой, что $\|x - b\| = d(x,B)$. Для любого $a \in A$ $\|x-a\| \geq \|T^m x - T^m a\| = \|x - T^m a\| \geq \|x - b\| + \varepsilon$. Отсюда $\varepsilon \leq \|x-a\| - \|x - b\|$, в частности, $\varepsilon \leq \|a - b\|$. Следовательно, если $\overline{ext\, B} = \partial B$, то $x \in B$ и утверждение (d) доказано. Из неравенства $\varepsilon \leq \|x-a\| - \|x-b\|$, применяя (I), получаем $\varepsilon \leq \leq \varphi(b-a) + 2\|z\|\,\rho\left(\frac{\|b-a\|}{\|z\|}\right)$ для любого $a \in A$, где $z = x - b$ и $\varphi = \varphi_{z/\|z\|}$.

Покажем, что гиперплоскость $\Gamma = \{y \in X : \varphi(b-y) = 0\}$ разделяет множество B и шар $V = V(x, \|b-x\|)$, причем $\varphi(b-a) \geq 0$ для любого $a \in B$. Действительно, $b \in \Gamma$ и $\varphi(b-y) = \varphi(b-x) + \varphi(x-y) \leq \leq \varphi(b-x) + \|x-y\| \leq \varphi(b-x) + \|b-x\| = 0$ для любого $y \in V$. Отсюда $V \subset \{y \in X : \varphi(b-y) \leq 0\}$, и Γ касается V в точке b. Существует гиперплоскость Γ_1, разделяющая B и V, причем $b \in \Gamma_1$ (см. [3]). Значит Γ_1 также касается V в точке b. Так как X – гладкое пространство, гиперплоскости Γ_1 и Γ совпадают, поэтому $A \subset \{y \in X : \varphi(b-y) \geq 0\}$.

Пусть $A_n = \{a \in A : 0 \leq \varphi(b-a) \leq 1/n\}$. Для каждого $n = 1,2,3,\ldots$ выберем $a_n \in A_n$ так, чтобы $d(b, A_n) \leq \|b - a_n\| \leq \leq d(b,A_n) + 1/n$. Тогда $\varepsilon \leq \varphi(b-a_n) + 2\|z\|\,\rho\left(\frac{\|b-a_n\|}{\|z\|}\right) \leq \frac{1}{n} + + 2\|z\|\,\rho\left(\frac{\|b-a_n\|}{\|z\|}\right)$. Отсюда $\varepsilon \leq 2\|z\|\,\rho\left(\lim_{n\to\infty} d(b,A_n)/\|z\|\right)$.

Так как $b \in \overline{co} A_n$, для любого $n=1,2,3,\ldots$, $d(b,A_n) \leq \lambda(A_n) \leq G(X) d(A_n) \leq$
$\leq G(X) d(B)$, поэтому $\varepsilon \leq 2\|z\| \rho(G(X)\cdot d(B)/\|z\|)$. Откуда вытекает требуемое в (а) неравенство.

(в). В гильбертовом пространстве $(X,(\cdot,\cdot))$ $\varphi_x(y) = \dfrac{(x,y)}{\|x\|}$ и $\rho(t) = \sqrt{1+t^2} - 1$, поэтому для любых $t>0$, $x \in S(0,1)$ и $y \in V(0,1)$, причем $\varphi_x(y) \geq 0$, справедливы неравенства

$$0 \leq \| x+ ty\| - \|x\| \leq t\varphi_x(y) + \rho(t) . \tag{2}$$

Из (2) и того факта, что $\eta(t) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, получаем

$$d(x,B) \leq G(X)\cdot d(B)/\eta\left[\frac{\varepsilon}{G(X)d(B)}\right] = \frac{[G(X)\cdot d(B)]^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} . \tag{3}$$

Поскольку $G(X)$ совпадает с константой Юнга пространства X (см. [2]), то $G(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ для бесконечномерного гильбертова пространства и $G(X) = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ для n -мерного гильбертова пространства X (см., например, [4]). Подставляя $G(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ в формулу (3), получаем требуемое в (в) неравенство. Отметим, что неравенство (3) корректно, так как $d(B) \geq 2\varepsilon$.

(с). Так как X конечномерное пространство, множество A - компакт, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} d(b,A_n) = d(b, A\cap\Gamma)$ и $b \in \overline{co}(A\cap\Gamma)$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} d(b,A_n) \leq \lambda(A\cap\Gamma) \leq G(\Gamma) d(B)$. Подставляя $G(\Gamma) = \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$ в (3), получаем требуемое в (с) неравенство. Теорема доказана.

Литература

1. Г у л е в и ч Н.М., К о н я г и н С.В., Р а х м а н к у л о в Р.В. Неподвижные точки и дифференцируемость нормы. - Мат.сб., 1988, 136, № 8, с.468-477.
2. Г у л е в и ч Н.М. Мера невыпуклости и константа Юнга. - В наст.сб.
3. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
4. П и ч у г о в С.А. Константа Юнга пространства L_p. - Мат. заметки, 1988, 43, вып.5, с.604-614.

Gulevich N.M. An estimation of deviation of fixed point set.

Let X be a (real) Banach space with norm $\|\cdot\|$. A mapping $T: X \longrightarrow X$ is said to be nonexpansive if $\|Tx - Ty\| \leqslant \|x - y\|$ for any $x, y \in X$. A space X is said to be uniformly smooth if $\lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{\rho(t)}{t} = 0$, where $\rho(t) = \frac{1}{2} \sup\{\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2 ; \|x\| = 1, \|y\| \leqslant 1\}$ is the modulus of smoothness of the space X.

The main result is the following. Let B be a nonempty closed bounded convex body in a uniformly smooth Banach space X and $T: X \longrightarrow X$ be a nonexpansive mapping such that for some positive integer n the value

$$\varepsilon = dist\,(T^n(ext\,B), X \setminus B) > 0 .$$

Then $F(T) = \{x \in X : Tx = x\}$ is nonempty set and

$$\sup\{dist(x,B) : x \in F(T)\} \leqslant \frac{G(X) \cdot diam\,B}{\eta\left(\frac{\varepsilon}{2G(X) \cdot diam\,B}\right)} .$$

Here $ext\,B$ is the set of extremal points of B; $G(X) = \sup\{\lambda(A) : A \subset X,\ diam\,A = 1\}$, $\lambda(A)$ is a measure of nonconvexity of A; $\eta(t)$ is the inverse function for $\frac{\rho(t)}{t}$.

For a Hilbert space X the estimation of deviation of the set $F(T)$ from the body B is

$$\sup\{dist(x,B) : x \in F(T)\} \leqslant \frac{(diam\,B)^2}{4\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} .$$

If X is m-dimensional Hilbert space $(m \geqslant 2)$, then

$$\sup\{dist(x,B) : x \in F(T)\} \leqslant \frac{m-1}{m} \frac{(diam\,B)^2}{4\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} .$$