УДК 519.714.7

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

А. А. Сапоженко, И. П. Чухров

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Основные направления исследований по минимизации булевых функций. Задача минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.) состоит в построении по произвольно заданной булевой функции реализующей ее формулы вида «дизъюнкция конъюнкций», содержащей минимальное число букв. Отдельные задачи, связанные с минимизацией д. н. ф., привлекали внимание специалистов по математической логике еще в XIX веке [127]. Однако актуальной задача минимизации стала лишь в 40—50 годах XX века, в связи с применением языка алгебры логики для синтеза управляющих устройств и электронных вычислительных машин. В 50—80 годах было создано большое число эвристических алгоритмов минимизации, возникли различные методы и приемы, механические и электронные устройства, минимизирующие карты и диаграммы для поиска минимальных нормальных форм булевых функций. Это направление, которое можно назвать «техническим», получило широкое распространение в СССР и за рубежом в связи с потребностями вычислительной техники и автоматики. С 1953 по 1986 гг. по данным реферативных журналов «Математика» и «Кибернетика» опубликовано около 800 работ, посвященных задаче минимизации. В создании алгоритмов и программ для построения минимальных д. н. ф. принимало участие большое число инженеров, специалистов по проектированию устройств автоматики и вычислительной техники, логиков, философов и математиков.

Математическое направление исследований в области д. н. ф. охватывает круг вопросов, касающихся алгоритмических трудностей, возникающих при минимизации, исследования числовых характеристик булевых функций и количественных связей между различными типами д. н. ф., классификации булевых функций и т. п. Математическое направление разрабатывалось главным образом усилиями советских ученых. Начало развития этого направления в СССР было положено статьей С. В. Яблонского [153], в которой систематизированы основные понятия и дан обзор методов минимизации, известных к тому времени. Существенным вкладом в математическую теорию д. н. ф. явились работы Ю. И. Журавлева, Ю. Л. Васильева, В. В. Глаголева и других советских математиков. Техническое направление, связанное с применением д. н. ф. в автоматике и вычислительной технике, развивалось в СССР под влиянием работ В. И. Шестакова, М. А. Гаврилова, Д. А. Закревского, Д. А. Поспелова и др.

Математическое направление в минимизации тесно связано с другими разделами математической кибернетики: теорией синтеза управляющих систем, теорией тестов, теорией кодирования, теорией автоматов и др. Задача минимизации может рассматриваться как частный случай задачи синтеза управляющих систем, а именно, как задача синтеза минимальных по сложности формул глубины 2 в базисе $\{\vee, \&, ^{-}\}$ (см. [96]). В связи с малой глубиной д. н. ф. имеют преимущества перед другими типами схем в плане надежности и быстродействия. Однако д. н. ф. существенно проигрывают им в плане схемной сложности. Последнее обстоятельство способствовало тому, что центр тяжести математических исследований по минимизации переместился с вопросов схемной реализации д. н. ф. на изучение вопросов, возникающих при рассмотрении минимизации д. н. ф. как дискретной экстремальной задачи. Известно (см., например [153]), что задача минимизации допускает тривиальное с классической точки зрения алгоритмическое решение, состоящее в построении конечного числа д. н. ф. и выборе среди них минимальной. Однако такое решение связано с большим объемом вычислений. Эта ситуация типична для многих задач, возникающих в различных разделах дискретной математики: в теории графов, целочисленном программировании, комбинаторике и др.

Характерными чертами задачи минимизации являются: возможность построения оптимального решения путем применения весьма простых упрощений локального характера (отбрасывание букв и конъюнкций из некоторой исходной д. н. ф.), ярко выраженная полиэкстремальность, наличие содержательной геометрической интерпретации.

Полиэкстремальность задачи состоит в том, что, как правило, имеется большое число локальных экстремумов, среди которых отыскиваются глобальные. Роль локальных экстремумов играют так называемые тупиковые или неизбыточные д. н. ф., а роль глобальных — минимальные по числу букв или конъюнкций. Построение того или иного локального экстремума осуществляется относительно просто, так что основная трудность заключается в выборе стратегии для отыскания глобальных экстремумов среди огромного числа локальных.

Геометрическая интерпретация задачи построения минимальных д. н. ф. связана с представлением булевых функций подмножествами вершин единичного n-мерного куба и рассмотрением комплексов, составленных из граней единичного куба. Задача минимизации трактуется как задача построения оптимального покрытия подмножества вершин единичного куба гранями. Геометрическая трактовка делает задачу наглядной, проясняет ее комбинаторную природу, оказывается полезной при выборе направления исследований.

Таким образом, являясь весьма частным случаем задачи синтеза управляющих систем, задача минимизации несет в себе характерные черты дискретных экстремальных задач и является удобной моделью для изучения трудностей, возникающих при их решении. Работы О. Б. Лупанова, Э. И. Нечипорука, К. Шеннона, С. В. Яблонского по синтезу оказали весьма существенное влияние на исследования по д. н. ф. Это проявилось в выборе постановок задач, в подходе, связанном с рассмотрением классов почти всех функций и поисках асимптотически оптимальных решений, в использовании некоторых технических приемов, в проблематике, связанной с поисками доказательства неустранимости перебора.

Другой областью, идейно близкой к задаче минимизации булевых функций, является теория тестов. Задача построения минимальных тестов для таблиц и минимизация являются разновидностями задачи о покрытии. Первые работы по теории тестов С. В. Яблонского и И. С. Чегис [142, 154] предшествовали математическим работам по д. н. ф. В этих работах предложены способы построения тестов, применимые и для построения д. н. ф. (см. § 3, 4). Затем в течение некоторого периода математические исследования по минимизации велись более интенсивно, чем исследования в теории тестов, в результате чего техника получения оценок, развитая в теории д. н. ф., нашла широкое применение в теории тестов. Впоследствии успешные приложения теории тестов в распознавании образов указали на возможность применения д. н. ф. в этой области [8, 38].

Применение д. н. ф. в распознавании образов связано с понятием отделимости [51], и с идеей построения простейшего логического отделителя двух подмножеств вершин n-мерного единичного куба (см. [7, 8]).

Изучение д. н. ф., а также кодов и тестов, стимулировало исследования геометрических свойств комплексов в единичном и мерном кубе и комбинаторных вопросов, связанных с задачей о покрытии и упаковке. В этом плане отметим связь задачи минимизации с задачей построения кодов. При решении обеих задач используются некоторые общие математические подходы, результаты теории кодирования используются при исследовании д. н. ф. [33, 151], и, наоборот, некоторые геометрические конструкции, возникшие при исследовании д. н. ф., нашли применение для построения кодов [14, 42].

Дизъюнктивные нормальные формы довольно часто используются в инженерной практике при построении схем для не всюду определенных функций, а также в тех случаях, когда при синтезе требуется обеспечить высокое быстродействие и надежность логических устройств. Программируемые логические матрицы (ПЛМ), нашедшие широкое применение в проектировании больших интегральных схем (БИС), представляют собой устройства, реализующие системы функций, заданных в виде д. н. ф. Задача минимизации площади ПЛМ соответствует построению кратчайшей д. н. ф. для системы булевых функций (см. [62]). Д. н. ф. употребляются также для предварительных упрощений при построении формул глубины больше чем 2. При построении тестов для схем часто используется прием, заключающийся в приведении исходной схемы к так называемой эквивалентной д. н. ф. Методы минимизации д. н. ф. применяются также при синтезе автоматов для уменьшения числа состояний. В связи с этими применениями главы по алгебре логики стали неотъемлимой частью учебников, предназначенных для студентов, специализирующихся в области вычислительной техники.

Данный обзор посвящен в основном математическим исследованиям по минимизации. Это направление исследований освещено достаточно полно. Работам, касающимся вопросам техники построения минимальных д. н. ф. и машинным алгоритмам, посвящен четвертый параграф. Эта часть обзора не претендует на полноту. Здесь предлагается классификация алгоритмов минимизации и приводятся примеры алгоритмов, принадлежащих различным классам.

Проблематика, связанная с минимизацией д. н. ф., затрагивается во многих монографиях и обзорных статьях, посвященных синтезу автоматов и релейных устройств (см., например, [34, 64, 129, 153]). Математическому направлению посвящены работы обзорного и учебного характера [18, 19, 44, 132, 153]. Из обзоров, посвященных техническому направлению, упомянем статью В. Г. Новоселова [114]. Предлагаемый обзор отличается от работ [18, 44, 132] более полным охватом литературы и отсутствием доказательств. Часть обзора, посвященная техническому направлению, отличается от содержания обзора [114], тем что в ней представлена литература, вышедшая в последнее время.

1.2. Определения и основные положения теории д. н. ф.

Определение 1. Элементарной конъюнкцией называется логическое произведение вида $K=x_{i_1}^{\sigma_1}\ldots x_{i_r}^{\sigma_r}$, в котором все i_j различны, $\sigma_i\in\{0, 1\}$, $i=1, 2, \ldots, r$. Число r называется рангом конъюнкции. В случае $r=0$ конъюнкция называется пустой и полагается равной 1. Символ $x_{i_j}^{\sigma_j}$, $j=1, 2, \ldots, r$, называется буквой или простым сомножителем конъюнкции K.

Определение 2. Дизъюнктивной нормальной формой (д. н. ф.) называется дизъюнкция $D=K_1\vee K_2\vee\cdots\vee K_m$ элементарных конъюнкций K_j, в которой все K_j различны. Конъюнкции K_j называются слагаемыми д. н. ф. D. Число слагаемых называется длиной д. н. ф. В случае $m=0$ д. н. ф. называется пустой и полагается равной 0. Число букв или, что то же, сумма рангов конъюнкций, входящих в д. н. ф., называется сложностью д. н. ф.

Определение 3. Д. н. ф., зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется совершенной, если каждое ее слагаемое имеет ранг n.

Функция алгебры логики может быть представлена в виде д. н. ф., вообще говоря, не единственным образом. В связи с этим возникает задача поиска «простейшей» реализации. Для этого на множестве всех д. н. ф. вводится мера сложности L — функционал, который удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Аксиома неотрицательности. Для любой д. н. ф. D $L(D)\geqslant 0$.

2. Аксиома монотонности (относительно умножения). Пусть $D=D_1\vee x_i^{\sigma}\cdot K$. Тогда $L(D)\geqslant L(D_1\vee K)$.

3. Аксиома выпуклости (относительно сложения). Пусть $D=D_1\vee D_2$. Тогда если $D_1\& D_2=0$, то $L(D)\geqslant L(D_1)+L(D_2)$.

4. Аксиома инвариантности (относительно изоморфизма). Пусть д. н. ф. D_2 получена из д. н. ф. D_1 путем переименования переменных без отождествлений. Тогда $L(D_1)=L(D_2)$.

Примерами мер сложности д. н. ф. являются следующие: мера сложности — число слагаемых в д. н. ф., которая называется длиной д. н. ф., мера сложности — число букв или, что то же, сумма рангов конъюнкций, входящих в д. н. ф., которая называется просто сложностью д. н. ф.

Определение 4. Д. н. ф., имеющая наименьшую меру сложности L среди всех д. н. ф. булевой функции f, называется минимальной относительно L д. н. ф. функции f (L-минимальной д. н. ф.).

Определение 5. Д. н. ф., минимальная относительно меры сложности — длина д. н. ф., называется кратчайшей д. н. ф. Д. н. ф., содержащая минимальное число букв, называется минимальной д. н. ф.

Определение 6. Множество всех двоичных наборов длины n называется n-мерным кубом и обозначается B^n, а сами наборы называются вершинами куба. Множество всех вершин, на которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обращается в единицу (в ноль), обозначается через N_f (соответственно $N_{\bar{f}}$). В частности, множество N_K всех вершин куба B^n, на которых элементарная конъюнкция K ранга r обращается в единицу, называется интервалом ранга r, соответствующим конъюнкции K. Интервал ранга r куба B^n является его $(n-r)$-мерной гранью. Если размерность куба задана, то задание ранга интервала (или конъюнкции) однозначно определяет размерность соответствующей грани.

Определение 7. Элементарная конъюнкция K, такая, что $N_K \subseteq N_f$ называется импликантом или допустимой конъюнкцией функции f, а интервал N_K называется интервалом функции f. Импликант функции f называется простым импликантом, если после удаления любой буквы получается конъюнкция, не являющаяся импликантом функции f. Простому импликанту соответствует максимальный интервал, т. е. интервал функции f, не содержащийся ни в каком другом интервале функции f. Дизъюнкция всех простых импликантов функции f называется ее сокращенной д. н. ф.

Определение 8. Тупиковой д. н. ф. функции f называется д. н. ф., реализующая f, но теряющая это свойство после удаления любой конъюнкции или буквы из конъюнкции.

Определение 9. Простой импликант K функций f называется ядровым, если д. н. ф., полученная из сокращенной д. н. ф. функции f путем отбрасывания K, не реализует f.

Справедливы следующие утверждения. Всякая минимальная д. н. ф. является тупиковой. Обратное, вообще говоря, неверно. Для всякой кратчайшей д. н. ф. существует тупиковая д. н. ф. такой же длины, как и кратчайшая. Всякая тупиковая д. н. ф. функции f может быть получена из сокращенной путем отбрасывания конъюнкций. Сокращенная д. н. ф. строится по функции f однозначно. Ядровые импликанты и только они входят во все тупиковые д. н. ф. булевой функции. Импликанты, поглощаемые дизъюнкцией ядровых импликантов функции f, не входят ни в одну из ее тупиковых д. н. ф. Доказательство этих утверждений можно найти, например в [44, 153].

Из этих утверждений вытекает возможность построения минимальных д. н. ф. состоящего из двух этапов. На первом этапе по функции строится сокращенная д. н. ф. На втором этапе путем отбрасывания слагаемых из сокращенной д. н. ф. строятся тупиковые д. н. ф., среди которых находятся кратчайшие, тупиковые и минимальные д. н. ф. Получение тупиковых д. н. ф. из сокращенной является ветвящимся процессом: отбрасывание различных конъюнкций д. н. ф. приводит к различным д. н. ф. Ветвящуюся часть процесса можно отдалить путем удаления конъюнкций, не входящих ни в одну тупиковую (или минимальную) д. н. ф. и выделения ядровых конъюнкций.

Задача минимизации допускает геометрическую трактовку, основанную на соответствии между вершинами n-мерного куба, входящими в множество N_f, и слагаемыми совершенной д. н. ф. функции f, с одной стороны, и между интервалами и импликантами с другой. Задаче построения кратчайшей д. н. ф. соответствует задача построения кратчайшего покрытия множества N_f интервалами функции f, т. е. нахождения минимального по мощности множества интервалов, такого, что каждая вершина из N_f содержится в некотором интервале из множества. Задаче построения минимальной д. н. ф. соответствует взвешенная задача о покрытии. Геометрическая трактовка проясняет комбинаторную природу задачи минимизации и облегчает поиски ее решения.

§ 2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Эта часть обзора посвящена оценкам числовых параметров, характеризующих сложность универсальных подходов к задаче минимизации. Оценки характеризуют число шагов, которое необходимо совершить при реализации того или иного алгоритма построения простейших д. н. ф. Они указывают на принципиальные трудности, которые возникают в общем случае и которые следует иметь ввиду при решении задачи минимизации в конкретных ситуациях. Для оценок в д. н. ф. характерно рассмотрение либо экстремальных (чаще всего максимальных) значений того или иного параметра, либо типичных его значений. Если $p(f)$ — некоторый числовой параметр функции f, то через $p(n)$ обозначается $\max_{f \in P_n} p(f)$, где P_n — множество всех булевых функций от n переменных. Говорят, что для почти всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ параметр $p(f)$ удовлетворяет неравенствам $\varphi(n) \leqslant p(f) \leqslant \psi(n)$, если доля тех функций f из P_n, для которых $p(f)$ удовлетворяет указанным неравенствам, стремится к 1 с ростом n.

2.1. Оценки совершенной и сокращенной д. н. ф. Длина совершенной д. н. ф. функции f равна мощности множества N_f. Максимальное ее значение для функций из P_n равно 2^n и достигается на функции, тождественно равной единице. Для почти всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливы неравенства (см. например, [29]):

$$2^{n-1} - \varphi(n)\sqrt{2^n} \leqslant |N_f| \leqslant 2^{n-1} + \varphi(n)\sqrt{2^n},$$

где $\varphi(n)$ — произвольная функция, такая, что $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Пусть $s(f)$ — длина сокращенной д. н. ф. функции f, а $s(n) = \max_{f \in P_n} s(f)$. С. В. Яблонским (см. [18]) построен пример функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, у которой длина сокращенной д. н. ф. в $(1{,}5)^{n(1-\varepsilon)}$ раз превышает длину совершенной д. н. ф. Эта оценка достигается на симметрической функции. Напомним, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если для любой перестановки π множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. А. П. Викулин [21] доказал неравенства $\frac{c_1 3^n}{n} \leqslant s(n) \leqslant \frac{c_2 3^n}{\sqrt{n}}$, где c_1, c_2 — константы, и указал симметрическую функцию n переменных, на которой достигается максимум $s(f)$ по множеству симметрических функций n переменных. Этот максимум асимптотически равен $\frac{3^{n+3/2}}{2\pi n}$. Существует предположение о том, что максимальное значение параметра $s(f)$ достигается на симметрических функциях. Однако попытки доказать или опровергнуть это предположение [69, 26] пока не привели к успеху. М. М. Гаджиев нашел значение $s(n)$ для $n=5, 6$ и указал функции, на которых эти оценки достигаются. Результаты подтверждают предположение о достижимости $s(n)$ на симметрических функциях. В. В. Глаголев [30] показал, что для булевых функций, у которых размерность интервалов не превышает единицы, максимальная длина сокращенной д. н. ф. асимптотически равна $\frac{1}{3}n\cdot 2^{n-1}$, причем максимум достигается на симметрических функциях. Если верхняя и нижняя оценки для $s(n)$ различаются значительно, то для значения $s(f)$ «типичных» функций получены оценки, близкие к окончательным. Достаточно полно изучено и распределение множества максимальных интервалов по их размерности. Основополагающими здесь были работы В. В. Глаголева [29, 32]. Изложение этих результатов имеется также в [18]. Большое число фактов, касающихся сокращенной д. н. ф. выводится из оценки для числа $i_k(f)$ интервалов размерности k для почти всех функций f. Имеет место следующее

Утверждение [29]. Для почти всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и произвольной числовой функции $\varphi(n)$ такой, что $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ справедливы неравенства:

$$C_n^k\left(2^{n-k-2^k}-\varphi(n)\sqrt{2^{n-k-2^k}}\right)<i_k(f)<$$
$$<C_n^k\left(2^{n-k-2^k}+\varphi(n)\sqrt{2^{n-k-2^k}}\right). \tag{1}$$

Из неравенств (1) вытекает ряд следствий. Именно, для почти всех функций

1) $|N_f|\sim 2^{n-1}$.

2) Максимальная размерность интервала не превосходит $k_0=\log_2 n+1$.

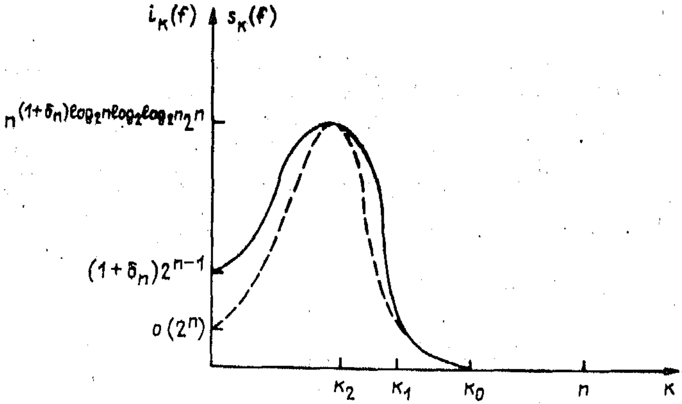
3) Интервалы, имеющие размерность больше, чем $k_1=\log_2\log_2 n+\log_2\log_2\log_2 n$ содержат в совокупности $\bar{o}(2^n)$ вершин множества N_f.

4) $\max\limits_k i_k(f)\sim\max\left\{C_n^k\cdot 2^{n-k-2^k},\ C_n^{k+1}\cdot 2^{n-k-1-2^{k+1}}\right\}$,

где $k=k_2=[\log_2\log_2 n]$.

В работе [32] показано, что для почти всех функций $s(f)=n^{(1+\delta_n)\log_2\log_2 n}\cdot 2^n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. Асимптотика величины $s(f)$, данная в [132], имеет вид: $s(f)\sim\bar{s}_{k_2}(n)+\bar{s}_{k_2+1}(n)$, где $\bar{s}_k(n)=$

$=C_n^k \cdot 2^{n-k-2k} \cdot \left(1-2^{-2^k}\right)^{n-k}$. Отметим, что утверждение 2) впервые было доказано Ю. И. Журавлевым [58]. Ряд средних значений параметров булевых функций вычислен в работе Милето и Путцолу [181]. На графике представлено поведение параметров $i_k(f)$ и $s_k(f)$ для почти всех функций (Через $s_k(f)$ обозначается число максимальных интервалов размерности k функции f). Заметим, что почти все максимальные интервалы имеют размерность либо $k_2=[\log_2 \log_2 n]$, либо k_2+1. Причем при одних n максимум $s_k(f)$ достигается на $k=k_2$, а при других — на $k=k_2+1$. При $k>k_2$ справедливо $i_k(f) \sim s_k(f)$, т. е. почти все интервалы являются максимальными. Поскольку как было сказано выше, интервалы, имеющие размерность, большую k_1, содержат в совокупности малую долю вершин из N_f, то основную роль при построении минимальных покрытий множества N_f для почти всех функций играют интервалы размерности, меньшей, чем k_1 и, в особенности, интервалы размерности близкие к k_1.



2.2. **Минимальные и кратчайшие д. н. ф.** Пусть $L(f)$ — сложность минимальной д. н. ф., а $l(f)$ — длина кратчайшей. Пусть $L(n)=\max\limits_{f \in P_n} L(f)$, $l(n)=\max\limits_{f \in P_n} l(f)$. Известно [96], что $L(n)=n \cdot 2^{n-1}$, $l(n)=2^{n-1}$. Оценки достигаются на функциях $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$.

Первой нетривиальной нижней оценкой $L(f)$ для почти всех функций была оценка Ю. И. Журавлева [58] вида $L(f) \geqslant 2^{n-2}$. Оценки вида

$$\frac{n \cdot 2^{n-1}}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \leqslant L(f) \leqslant \frac{n \cdot 2^n \log_2 \log_2 n}{\log_2 n}$$

для почти всех функций из P_n были получены В. В. Глаголевым [28], [29]. А. Д. Коршунов [77] и А. А. Сапоженко [135] получили более точную верхнюю оценку

$$L(f) \leqslant \frac{n \cdot 2^n}{\log_2 n}.$$

В работе [135] показано, что для почти всех функций f д. н. ф. сложности $\frac{n \cdot 2^n}{\log_2 n}$, реализующую f, можно получить с помощью довольно простого алгоритма. Этот алгоритм, называемый градиентным или алгоритмом наискорейшего спуска, заключается в следующем. На каждом шаге для покрытия множества N_f выбирается интервал, содержащий максимально возможное число непокрытых вершин. Такой выбор продолжается до тех пор, пока все множество N_f не будет покрыто. В работе Р. Г. Нигматуллина [111] оценивалось отношение длины покрытия, получаемого таким способом, к длине кратчайшего покрытия.

С. Е. Кузнецов [83] улучшил нижнюю оценку показав, что для почти всех функций $L(f) \geqslant \frac{n \cdot 2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$. Порядок сложности минимальной д. н. ф. для почти всех функций впервые ныл получен А. Д. Коршуновым [79, 80], который показал, бто при $n \to \infty$, $k = \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \log_2 n$, $\alpha = k - [k]$

$$L(f) \leqslant \frac{\ln 2 \cdot n \cdot 2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \left(2^{2\alpha - 1} + 3{,}57 \cdot 2^{\alpha - 2^\alpha}\right) \leqslant 2{,}63 \frac{n \cdot 2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}.$$

Вместе с результатами Р. Г. Нигматуллина [110] о существовании асимптотики длины, сложности у почти всех функций это позволяет утверждать, что существует такое $c_n > 0$, что при $n \to \infty$ $L(f) \sim c_n \cdot \frac{n \cdot 2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$, где $1 \leqslant c_n \leqslant 2{,}63$. А. Е. Андреев [4, 6] доказал, что $L(f) \leqslant 1{,}5 \frac{n \cdot 2^n}{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$ при $n \to \infty$ для почти всех функций. Алгоритмы, предложенные в [80, 6], имеют как ряд общих черт так и ряд отличий. Для обоснования эффективности алгоритма А. Д. Коршунова необходимо убедиться в справедливости ряда сложных утверждений технического характера. Алгоритм, предложенный в [6], является модификацией градиентного алгоритма и его обоснование опирается на технику, развитую в [135]. Модифицированный градиентный алгоритм описывается следующим образом. Множество переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ разбивается на непересекающиеся группы $X = X^1 \cup \ldots \cup X^k \cup Y$, таким образом, что $k = [\log_2 n]$, $|X^i| = \left[\frac{n}{\log_2 n}\right] = m$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Работа модифицированного алгоритма распадается на k шагов, на каждом из которых происходит преобразование функции $\hat{f}$, начиная с исходной $\hat{f} = f$, по следующим правилам. На i-ом шаге для каждой подфункции $\hat{f}_j$ функции $\hat{f}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{n-m}$, зависящей от переменных группы X^i, берется множество ее допустимых интервалов, образующих в некотором порядке градиентную последовательность, причем доля непокрытых этими интервалами единичных вершин $\hat{f}_j$ не превосходит $e^{-\sigma}$, а удаление последнего интервала из этой последовательности нарушает это условие. На наборах, покрываемых интервалами входящими в градиентные последовательности для подфункций $\hat{f}_j$, значения функции $\hat{f}$ изменяются и полагаются равными нулю, а на остальных наборах значения функции $\hat{f}$ не изменяются. После выполнения k шагов для получившейся функции $\hat{f}$ берется обычное градиентное покрытие. Доказательство эффективности такого модифицированного градиентного алгоритма для почти всех функций, представленное в [6], компактнее доказательства из [80], однако оно опирается на свойства независимости и одинаковой распределенности некоторых случайных величин, не доказываемые в работе.

Интересно сравнить сложность минимальной реализации булевых функций в классе д. н. ф. со сложностью минимальных реализаций в других классах управляющих систем, таких как формулы в базисе $\{\vee, \&, {}^{-}\}$, схемы из функциональных элементов, контактные схемы. Пусть $L_\pi(f)$, $L_\Phi(f)$, $L_k(f)$ — соответственно сложности минимальных формул, функциональных и контактных схем, реализующих функцию f, а $L_\pi(n)$, $L_\Phi(n)$, $L_k(n)$ — соответствующие максимальные по множеству P_n значения. Как показал О. Б. Лупанов (см. напр. [97])

$$L_\pi(n) \sim \frac{2^n}{\log_2 n}, \quad L_\Phi(n) \sim L_k(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Из приведенных оценок вытекает, что реализации в классе д. н. ф. существенно сложнее реализаций в других классах. Как уже говорилось, д. н. ф. являются формулами глубины два. О. Б. Лупанов [96] показал, что оценка сверху вида $L_\pi(n) \leqslant \frac{2^n}{\log_2 n}$ справедлива уже для формул глубины три в базисе $\{\vee, \&, {}^{-}\}$. Таким образом, большая сложность реализации в классе д. н. ф. является как бы платой за минимально возможную глубину. Отметим, что в случае минимизации частичных слабо определенных функций сложность минимальных д. н. ф. несущественно отличается от сложности реализации в других классах (см. [50]).

Еще одна особенность д. н. ф. заключается в следующем. Большинство известных задач синтеза характеризуются тем, что если $L_A(n) = \max\limits_{f \in P_n} L_A(f)$ в заданном классе реализаций, то почти все функции реализуются со сложностью, не меньшей $(1-\varepsilon) L_A(n)$ Для д. н. ф. это не так. Кроме того, хотя, скажем, в классе контактных схем почти все функции имеют сложность большую, чем $(1-\varepsilon)\cdot\frac{2^n}{n}$, $\varepsilon > 0$, эффективно указать самую сложную функцию (см. [153]) или даже достаточно сложную функцию не удается. В классе д. н. ф. самые сложные функции известны.

Отметим еще одно обстоятельство, касающееся построения минимальных д. н. ф. В принципе возможен тривиальный алгоритм минимизации произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заключающийся в последовательном построении д. н. ф., зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеющих сложность 1, 2, 3 и т. д. до тех пор, пока не встретится д. н. ф., реализующая данную функцию. Оценки сложности минимальных д. н. ф. показывают, что такой алгоритм и подобные ему алгоритмы переборного типа практически неосуществимы при сколько-нибудь больших значениях числа переменных.

2.3. Оценки числа минимальных и тупиковых д. н. ф. Пусть $\mu(f)$, $\tau(f)$ — соответственно, есть числа минимальных и тупиковых д. н. ф., а $\mu(n)$, $\tau(n)$ соответствующие максимальные по множеству P_n значения этих параметров. Параметр $\tau(f)$ характеризует сложность алгоритма минимизации, заключающегося в построении всех тупиковых д. н. ф. функции f, отношение $\chi^{-1}(f)=\mu(f)/\tau(f)$ характеризует вероятность получить минимальную д. н. ф. при случайном выборе тупиковой д. н. ф.

Оценкам перечисленных параметров посвящены работы Ю. И. Журавлева [54], Ю. Л. Васильева [13, 18], А. А. Сапоженко [132], И. П. Чухрова [145, 146, 147, 148]. Верхние оценки получаются из мощностных соображений и имеют вид $(2^{2^n})^{c''_n \cdot n}$, где $c''_n \to \log_2 \frac{3}{2}$ при $n \to \infty$. В работах [13, 18, 54, 132] улучшались нижние оценки $\tau(n)$ и $\mu(n)$. Было показано [18, 132], что для $\tau(n)$ и $\mu(n)$ справедливы нижние оценки:

$$(2^{2^n})^{c'_n \sqrt{n}} \leqslant \mu(n),\ \tau(n),\ \text{где } c'_n \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ при } n \to \infty,$$

причем оценки достигались на симметрических булевых функциях. Существовала гипотеза, что максимальные значения $\tau(f)$ и $\mu(f)$ достигаются на классе симметрических функций. В [145, 146] показано, что $\log_2 \mu_S(n) \sim n \cdot C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ и $\log_2 \chi_S(n) \gtrsim n \cdot C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, где $p_S(n)=\max p(f)$ и максимум берется по классу симметрических булевых функций зависящих от n переменных. Нижние оценки указанных параметров, по порядку роста логарифма совпадающие с верхними оценками, получены И. П. Чухровым. В [147] доказано, что $\tau(n) \geqslant (2^{2^n})^{c_1 n}$ и $\chi(n) \geqslant (2^{2^n})^{c_2 n}$, где $c_1 > 3 \cdot 2^{-7}$ и $c_2 > 3 \cdot 2^{-9}$, при достаточно больших n, то есть $\log_2 \tau(n) \asymp n \cdot 2^n$ и $\log_2 \chi(n) \asymp n \cdot 2^n$ при $n \to \infty$. В [148] получены оценки для числа д. н. ф. минимальных относительно класса мер сложности удовлетворяющих одному дополнительному свойству.

Определение. Будем говорить, что мера сложности L удовлетворяет усиленному своийтву инвариантности, если

$L(D \vee D_1) = L(D \vee D_2)$ для любых д. н. ф. D и D_1, где д. н. ф. D_2 получена из д. н. ф. D_1 путем переименования переменных без отождествлений. Через Q будем обозначать множество мер сложности, которые удовлетворяют усиленному свойству инвариантности.

Отметим, что все рассматриваемые меры сложности д. н. ф. (длина, сложность, линейные меры сложности) удовлетворяют усиленному свойству инвариантности. Если д. н. ф. D является L-минимальной д. н. ф. булевой функции f для любой меры сложности $L \in Q$, то д. н. ф. D называется абсолютно минимальной д. н. ф. булевой функции f (а. м. д. н. ф.). Заметим, что множество а. м. д. н. ф. булевой функции f может быть пусто, так как при $n \geqslant 5$ множество минимальных и кратчайших д. н. ф. могут не пересекаться (см. [90]). Пусть $\mu(L, f)$ — число L-минимальных д. н. ф., $\mu^*(f)$ — число а. м. д. н. ф. булевой функции f, а $\mu(L, n)$ и $\mu^*(n)$ соответствующие максимальные значения параметров на множестве булевых функций P_n. В [148] доказано, что $\mu^*(n) \geqslant (2^{2^n})^{cn(1-\delta_n)}$, где $c = (\sqrt{2} - 1)^2/(8e)$, $\delta_n \to 0$, при $n \to \infty$, то есть $\log_2 \mu^*(n) \asymp n \cdot 2^n$ при $n \to \infty$ и, как следствие, отсюда вытекает что для любой меры сложности $L \in Q$ $\log_2 \mu(L, n) \geqslant \log_2 \mu^*(n) \gtrsim n \cdot 2^n$ при $n \to \infty$.

Для почти всех функций первые оценки были получены В. В. Глаголевым [33], показавшим, что для почти всех функций f из P_n справедливо

$$2^{2^{n(1-\delta_n)}} \leqslant \tau(f) \leqslant \left(2^{2^{n-1}}\right)^{\log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n \cdot \left(1-\delta'_n\right)},$$

δ_n, $\delta'_n \to 0$ при $n \to \infty$.

А. Д. Коршунов [78] показал, что $\tau(f) \geqslant (2^{2^n})^{c \log_2 n}$. А. А. Сапоженко [134] получил асимптотическую оценку вида $\log_2 \tau(f) \sim 2^{n-1} \log_2 n \log_2 \log_2 n$. Оценки $\tau(f)$ показывают, что для почти всех функций f из P_n построение всех тупиковых д. н. ф. практически неосуществимо. Для числа минимальных (а также кратчайших) д. н. ф. у почти всех функций имеется верхняя оценка $\mu(f) \leqslant (2^{2^n})^{c \cdot (1+\delta_n)}$, $\delta_n \to 0$, $1 \leqslant c \leqslant 1{,}5$, вытекающая из оценок для $s(f)$ [29] и $L(f)$ [79, 80, 6]. Неизвестно никакой нетривиальной нижней оценки параметра $\mu(f)$ для почти всех функций. Неизвестно, например, существует ли хотя бы две минимальные д. н. ф. у почти всех функций. Из оценок для $\tau(f)$ и $\mu(f)$ вытекает, что $\tau(f)/\mu(f) \geqslant (2^{2^{n-1}})^{(1-\delta_n) \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n}$. Отсюда следует, что вероятность получить минимальную д. н. ф. при случайном выборе тупиковой д. н. ф. ничтожно мала. Из результатов работы [134] вытекает также, что у почти всех булевых функций почти все тупиковые д. н. ф. имеют длину, асимптотически равную длине совершенной д. н. ф. Таким образом, взятая наугад тупиковая д. н. ф. почти наверное асимптотически не отличается по длине и сложности от совершенной д. н. ф. Задача минимизации является полиэкстремальной задачей. Роль локальных экстремумов играют здесь тупиковые д. н. ф., а роль глобальных — минимальные и кратчайшие. Приведенные оценки показывают, что типичной является такая ситуация, когда число локальных экстремумов велико, а число глобальных относительно мало, при этом подавляющее число локальных экстремумов не дает выигрыша по сравнению с наихудшим решением. С другой стороны, весьма простыми алгоритмами типа градиентных [135, 6] можно получить экстремум, незначительно отличающийся от глобального.

2.4. Соотношение между сложностями д. н. ф. различных типов. Возникновение задач связанных с оценками соотношений между сложностями д. н. ф. различных типов явилось следствием активного развития теории и практических алгоритмов минимизации булевых функций. Рассматриваемые при этом параметры характеризуют эффективность различных методов, используемых в алгоритмах минимизации. В соответствии с определенными подходами к минимизации булевых функций эти параметры можно разделить на следующие типы:

— параметры, связанные с выбором некоторой тупиковой д. н. ф. вместо минимальной д. н. ф.;

— параметры, связанные с заменой д. н. ф. минимальной относительно одной меры сложности на д. н. ф. минимальную относительно другой меры сложности;

— параметры, связанные с упрощениями при переходе от одной к другой однозначно определяемой д. н. ф. булевой функции.

Кроме мер сложности l — длина д. н. ф. и L — сложность д. н. ф., при сравнении д. н. ф. различных типов рассматривались и линейные меры сложности. Пусть $k(D)$ — число знаков конъюнкции в д. н. ф. D, $s(D)$ — число знаков дизъюнкции в д. н. ф. D, α и β — некоторые действительные числа такие, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta > 0$. Линейная мера сложности $L_{\alpha,\beta}$ определяется как $L_{\alpha,\beta}(D) = \alpha k(D) + \beta s(D)$ для любой д. н. ф. D.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения: $T(f)$ — множество тупиковых д. н. ф. булевой функции f, $M(f, \mathscr{L})$ — множество минимальных относительно меры сложности $\mathscr{L}$ д. н. ф. булевой функции f.

Пусть $l_T(f)$ — длина самой длинной тупиковой д. н. ф. функции f. Некоторое время существовало предположение о том, что $l_T(f) \leqslant 2^{n-1}$ для произвольной функции f из P_n и что максимум $l_T(f)$ достигается на функции $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \oplus \sigma$. С. В. Яблонский опроверг эту гипотезу [151], построив функцию f, зависящую от семи переменных, для которой $l_T(f) > 2^6$. В работе [149] построена бесконечная последовательность функций $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $l_T(f_n) > 2^{n-1}$. В. В. Глаголев [31] показал, что $l_T(n) \sim 2^n$. Для почти всех функций f из P_n справедливо (см. [134]) $l_T(f) \sim 2^{n-1}$.

Ряд работ посвящен вопросу о том, как сильно могут различаться тупиковые д. н. ф. по сложности относительно заданной меры. Пусть $Y(f, \mathcal{L}) = \max\limits_{D_1, D_2 \in T(f)} \mathcal{L}(D_1)/\mathcal{L}(D_2)$ — величина называемая разбросом относительно меры сложности $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ — разброс) в множестве тупиковых д. н. ф. функции f, а $Y(n, \mathcal{L}) = \max\limits_{f \in P_n} Y(f, \mathcal{L})$. Ю. Л. Васильев [15] показал, что $2^{n-3\sqrt{n}} \leqslant Y(n, l) \leqslant 2^{n-\log_2 n}$ и $2^{n-3\sqrt{n}} \leqslant Y(n, L) \leqslant 2^n$. Он указал также на связь между $Y(f, l)$ и максимальной из размерностей интервалов функции f (эта величина обозначается через $\dim f$). Именно, справедливо неравенство $Y(f, l) \leqslant 2^{\dim f}$. Равенство достигается лишь для тех функций f, у которых $\dim f = 0$. Для линейных мер сложности оценки $Y(n, L_{\alpha,\beta})$ были получены К. Вебером. В [20] доказано что, если $\alpha > 0$ и $\beta \geqslant 0$, то для $Y(n, L_{\alpha,\beta})$ справедливы такие же оценки как и для $Y(n, L)$.

Для почти всех функций f из P_n

$$Y(f, L) \sim Y(f, l) \sim c_n \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n,$$

где c_n — удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{3} \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Эти соотношения вытекают из результатов работ [6, 80, 83, 110, 134]. Оценки разброса в множестве тупиковых д. н. ф. показывают сколь существенной может быть ошибка при выборе тупиковой д. н. ф. «наугад». Для типичной функции эта ошибка не столь велика, однако и в этом случае она растет с ростом n.

В ряде работ [57, 90, 20] изучалось взаимоотношение между множествами д. н. ф. булевой функции минимальных относительно различных мер сложности. Существовало мнение, что для всякой булевой функции всякая минимальная д. н. ф. является кратчайшей. Ю. И. Журавлев [57] построил пример функции от 11 переменных, опровергающий эту точку зрения. В [90] показано, что для функций с числом переменных n меньшем 4 множества кратчайших тупиковых и минимальных д. н. ф. совпадают. При $n=4$ эти множества либо совпадают, либо множества кратчайших содержит множество минимальных д. н. ф. При $n \geqslant 5$ множества кратчайших и минимальных д. н. ф. могут не пересекаться. Конструкции, предложенные в [90], используют как геометрические, так и аналитические построения. К. Вебер [20] рассматривал аналогичные вопросы для линейных мер сложности. В [20] показано, что для множеств $M(f, L)$ и $M(f, L_{\alpha,\beta})$ осуществимы все логические возможности: пересечение множеств может быть пустым, совпадать с одним из множеств или обоими или не совпадать ни с одним из них. Соответствующие примеры реализуются на функциях с числом переменных от 5 до 7.

Кроме того, в работах [90, 20] исследовалось различие в сложности д. н. ф. минимальных относительно различных мер сложности. При этом рассматривались следующие параметры для мер сложности $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$:

$m_{\mathscr{L}}(f, \mathscr{L}') = \max \mathscr{L}(D_1)/\mathscr{L}(D_2)$, где максимум берется по всем парам D_1, D_2 — $\mathscr{L}'$-минимальных д. н. ф. функции f,

$$\underline{m}_{\mathscr{L}}(f, \mathscr{L}') = \min \mathscr{L}(D_1)/\mathscr{L}(D_2)$$

и

$$\overline{m}_{\mathscr{L}}(f, \mathscr{L}') = \max \mathscr{L}(D_1)/\mathscr{L}(D_2),$$

где минимум и максимум берутся по всем парам д. н. ф. D_1 и D_2 таких, что $D_1 \in M(f, \mathscr{L}')$, $D_2 \in M(f, \mathscr{L})$. Величина $m_{\mathscr{L}}(f, \mathscr{L}')$ называется $\mathscr{L}$-разбросом в множестве $\mathscr{L}'$-минимильных д. н. ф. булевой функции f, а величины $\underline{m}_{\mathscr{L}}(f, \mathscr{L}')$ и $\overline{m}_{\mathscr{L}}(f, \mathscr{L}')$ соответственно минимальным и максимальным $\mathscr{L}$-разбросом в случае, когда $\mathscr{L}$-минимальная д. н. ф. заменена на $\mathscr{L}'$-минимальную д. н. ф. для булевой функции f. Через $m_{\mathscr{L}}(n, \mathscr{L}')$, $\underline{m}_{\mathscr{L}}(n, \mathscr{L}')$, $\overline{m}_{\mathscr{L}}(n, \mathscr{L}')$ будем обозначать максимальные значения этих параметров на множестве функций P_n. В [90] показано, что максимум отношения сложностей двух кратчайших д. н. ф. и различие в сложности между минимальными и кратчайшими д. н. ф. булевой функции может быть растущей с ростом числа переменных величиной, а именно $m_L(n, l) \sim \underline{m}_L(n, l) \sim \overline{m}_L(n, l) \sim \frac{n}{2}$ при $n \to \infty$. Для почти всех функций $m_L(f, l) \sim 1$. Этот факт, впервые обнаруженный Ю. И. Журавлевым [58], вытекает из того, что у почти всех функций не существует интервалов, размерности больше $\log_2 n + 1$ и, следовательно, импликантов ранга меньше $n - \log_2 n - 1$. Отношение между сложностями самой сложной кратчайшей и наименее сложной кратчайшей также асимптотически равно 1 у почти всех функций.

Вебер [20] исследовал данные параметры для линейных мер сложности. Для минимального и максимального $L_{\alpha,\beta}$-разброса в случае, когда $L_{\alpha,\beta}$-минимальная д. н. ф. заменяется на кратчайшую д. н. ф. получены оценки аналогичные оценкам для $\underline{m}_L(n, l)$, $\overline{m}_L(n, l)$:

$$\underline{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, l) \sim \overline{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, l) \sim \frac{n}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad n \to \infty.$$

В то же время, при замене $L_{\alpha,\beta}$-минимальной д. н. ф. на $L_{\alpha',\beta'}$-минимальную д. н. ф. разброс асимптотически равен константе:

$$\underline{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, L_{\alpha',\beta'}) \sim \overline{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, L_{\alpha',\beta'}) \sim \frac{1 + \max\{\lambda, \lambda'\}}{1 + \min\{\lambda, \lambda'\}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \lambda' = \frac{\beta'}{\alpha'},$$

где $\alpha > 0$ и $\alpha' > 0$, $n \to \infty$. Кроме того, в [20] показано, что и разброс по длине при замене кратчайшей д. н. ф. на $L_{\alpha,\beta}$ — минимальную может быть растущей величиной с ростом n:

$$\frac{n}{4+\lambda}\leqslant \underline{m}_l(n, L_{\alpha,\beta})\leqslant \overline{m}_l(n, L_{\alpha,\beta})\leqslant\frac{n}{1+\lambda}, \quad \lambda=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha>0.$$

Таким образом, сравнение д. н. ф. минимальных относительно различных линейных мер сложности показывает, что только при замене $L_{\alpha,\beta}$-минимальных д. н. ф. на $L_{\alpha',\beta'}$-минимальные д. н. ф., где $\alpha>0$, $\alpha'>0$, разброс имеет величину порядка константы. Во всех остальных случаях разброс является величиной порядка n.

В работах [85, 86, 87, 88] рассматривались параметры связанные с относительной длиной д. н. ф. различных типов. Пусть $D_X(f)$ — однозначно определяемая д. н. ф. булевой функции f типа X, где X может иметь одно из следующих значений:

S — совершенная д. н. ф.,

C — сокращенная д. н. ф.,

$\overline{C}$ — сокращенная д. н. ф. для отрицания функции,

Q — д. н. ф. Квайна,

$\bigcup T$ — д. н. ф. суммы тупиковых д. н. ф.,

$A_{\mathscr{L}}$ — д. н. ф., получаемая $A_{\mathscr{L}}$-алгоритмом (модификация A-алгоритма для линейных мер сложности $\mathscr{L}=L_{\alpha,\beta}$),

$\bigcup M\mathscr{L}$ — д. н. ф. суммы минимальных д. н. ф. относительно меры сложности $\mathscr{L}$. Кроме того, $D_{\mathscr{L}}(f)$ будет обозначать некоторую $\mathscr{L}$-минимальную д. н. ф. функции f. Очевидно, что выполняются следующие соотношения

$$D_{\mathscr{L}}(f)\subseteq D_{\bigcup_{M\mathscr{L}}}(f)\subseteq D_{A_{\mathscr{L}}}(f)\subseteq D_{\bigcup T}(f)\subseteq D_Q(f)\subseteq D_C(f).$$

Относительной $\mathscr{L}$-сложностью д. н. ф. типа X по д. н. ф. типа Y булевой функции f называется величина $\mathscr{L}_{X|Y}(f)=$ $=\mathscr{L}(D_X(f))/\mathscr{L}(D_Y(f))$. Максимальное значение $\mathscr{L}_{X|Y}(f)$ на множестве функций P_n называется относительной $\mathscr{L}$-сложностью д. н. ф. типа X по д. н. ф. типа Y и обозначается через $\mathscr{L}_{X|Y}(n)$.

Первая оценка для относительной длины $l_{C|S}(n)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n(1-\overline{o}(1))}$ была получена С. В. Яблонским (см. § 2.1). В [86] показано, что длина сокращенной д. н. ф. функции f из P_n может превосходить длину сокращенной д. н. ф. ее отрицания в $3^{n(1-\overline{o}(1))}$ раз. Для монотонных булевых функций n переменных это отношение может достигать величины $2^{n(1-\overline{o}(1))}$. Вопросы относительной длины д. н. ф. однозначно определяемых при минимизации всюду определенных функций рассматривались в работах [85, 87, 88]. Доказано, что $3^{n-O(\sqrt{n\log_2 n})}\leqslant l_{X|Y}(n)\lesssim\frac{3^n}{\sqrt{n}}$ для любых пар типов д. н. ф. таких, что $X, Y\in\{C, Q, \bigcup T, A_l, \bigcup Ml\}$ и $D_Y(f)\subseteq D_X(f)$, за исключением параметров $l_{C|Q}(n)$, $l_{Q|\bigcup T}(n)$, $l_{A_l|\bigcup Ml}(n)$. Для параметров $l_{C|Q}(n)$, $l_{A_l|l}(n)$, $l_{\bigcup Ml|l}(n)$ наилучшие известные оценки имеют вид

$$2^{n(1-\log_2 n/\sqrt{n})} \leqslant l_{A_l|l}(n), \quad l_{\bigcup M l|l}(n) \leqslant 3^{n(1-\bar{o}(1))},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-O(\log_2 n)} \leqslant l_{C|Q}(n) \leqslant 3^{n(1-\bar{o}(1))}.$$

Аналогичные оценки имеют место и в случае, если вместо длины рассматривается произвольная линейная мера сложности.

Для почти всех функций из P_n (см. [5]) длина сокращенной д. н. ф. равна длине д. н. ф. Квайна, длине д. н. ф. типа суммы тупиковых д. н. ф. и асимптотически равна длине д. н. ф., получаемой A-алгоритмом. Это означает, что для почти всех функций относительные длины соответствующих типов д. н. ф. равны или асимптотически равны 1 при $n \to \infty$.

Оценки сравнительной длины и сложности некоторых типов д. н. ф. получены в работах [161, 88, 89]. Сравнительной $\mathscr{L}$-сложностью д. н. ф. типа X по д. н. ф. типа Y называется величина $\mathscr{L}_{X:Y}(q) = \sup\limits_{f \in P(q, Y)} \mathscr{L}(D_X(f))$, где $P(q, Y)$ — множество булевых функций, у которых д. н. ф. типа Y имеет $\mathscr{L}$-сложность не более q. В отличие от относительной длины и сложности д. н. ф., где величина отношения выражается через количество переменных рассматриваемой булевой функции, сравнительная длина (сложность) д. н. ф. есть выражение длины (сложности) д. н. ф. определенного типа через длину (сложность) меньшей д. н. ф. той же булевой функции. Тем не менее для некоторых пар типов д. н. ф. получены экспоненциальные нижние оценки. Первая экспоненциальная оценка сравнительной длины сокращенной д. н. ф. имела вид [161] $3^{q/3} \leqslant l_{C:l}(q) \leqslant 2^q$. В [88] получены оценки $\frac{2}{3}\, 3^{q/2} \leqslant l_{\bigcup T:\bigcup M l}(q)$, $3^{q/3} \leqslant l_{\bigcup M l:l}(q)$, а также точное равенство $l_{C:\bigcup T}(q) = 2^q - 1$. Кроме того исследовался параметр $l_{MT:l}(q)$ — сравнительная длина самой длинной тупиковой д. н. ф. по сравнению с длиной кратчайшей д. н. ф. булевой функции, для которого получена нижняя оценка $l_{MT:l}(q) \geqslant \frac{3}{2}\, 2^{q/2} - 1$. Булевы функции, с использованием которых были получены нижние оценки для сравнительных длин, дают нижние оценки для сравнительны сложностей вида $2^{cq/\log_2 q}$. Более высокие нижние оценки получены А. А. Левиным в работе [89] с использованием операции склейки над булевыми функциями и д. н. ф. В этой работе доказано, что для д. н. ф. любого типа X: $L_{C:X}(q) \leqslant 3 \cdot 2^{[q/2]}$, и для параметров $L_{C:\bigcup T}(q)$, $L_{\bigcup T:\bigcup ML}(q)$, $L_{\bigcup ML:L}(q)$, $L_{MT:L}(q)$ имеют место нижние вида $c_0 q + c_1 q \cdot 2^{c_2 q}$, где c_0, c_1, c_2 — соответствующие положительные константы.

Приведенные оценки показывают, с одной стороны, что каждый из шагов в процессе минимизации (сокращенная д. н. ф.— д. н. ф. Квайна — д. н. ф. суммы тупиковых д. н. ф. — д. н. ф., получаемая A_z — алгоритмом, — д. н. ф. суммы минимальных д. н. ф.) может оказаться эффективным и привести к существенным упрощениям, а с другой стороны, существуют такие булевы функции, что даже после получения д. н. ф. суммы минимальных или кратчайших д. н. ф. можно и далее значительно упрощать д. н. ф. с помощью неоднозначных алгоритмов.

2.5. Классификация булевых функций. Один из подходов к задаче минимизации заключается в разбиении всех булевых функций на классы «одинаково минимизируемых» функций и решении задачи для одного представителя из каждого класса. Такой подход мог бы оказаться вполне плодотворным, если бы удалось найти классификацию, в которой число классов было существенно меньшим, чем число функций из P_n. Наиболее известными являются классификации Шеннона и Поварова (см. [153]). В одной из них классы образуются из функций, получающихся друг из друга перестановкой переменных. В другой классы составляются из функций, получающихся друг из друга подстановкой переменных и заменой переменных на отрицания. Первая из них разбивает функции из P_n на $(1+\bar{o}(1))\frac{2^{2^n}}{n!}$ классов, вторая — на $(1+\bar{o}(1))\times\frac{2^{2^n}}{2^n\cdot n!}$ классов (см. [(124, 153]). Широко известным примером классификации второго типа является гарвардский каталог [155], представляющий собой таблицу типов функций четырех переменных.

С. В. Яблонский предложил классификацию функций «по геометрической похожести», при которой две функции принадлежат одному классу, если между их простыми импликантами существует взаимно однозначное соответствие, порождающее взаимно однозначное соответствие между тупиковыми д. н. ф. В. В. Войтишек [22] дал описание этих классов для функций четырех переменных. Первая из указанных классификаций разбивает 65536 функций на 3986 классов, вторая — на 402 класса, третья — на 63 класса. А. А. Сапоженко [136] показал, что число геометрически подобных функций из P_n не меньше $2^{c\cdot t(n-2)}$, где $t(n)$ — максимальная длина цикла в единичном n-мерном кубе. С учетом результата А. А. Евдокимова [42] это дает не менее $2^{c\cdot 2^n}$ классов, где c — константа. Эта оценка показывает, что при больших n число классов геометрически подобных функций практически необозримо. Вопросам классификации посвящены также работы [139, 140, 205]. Работа И. Э. Страздиня [139] посвящена афинной классификации булевых функций. В этой работе приводится каталог 206 типов булевых функций пяти переменных относительно группы афинных преобразований, указываются представители и число функций. Аналогичное описание дано для 48 прототипов относительно так называемой обобщенной афинной группы. Обобщенная афинная группа состоит из преобразований, прибавляющих к результату афинного преобразования некоторую линейную функцию. Число классов эквивалентности относительно афинных преобразований невелико, однако, функции, принадлежащие одному классу, могут существенно различаться по параметрам, характеризующим процесс минимизации.

2.6. Геометрические свойства булевых функций. Геометрические свойства булевой функции f определяются строением так называемого интервального графа Γ_f, вершинами которого являются максимальные интервалы функции f, а ребрами — пары пересекающихся интервалов. Интерес представляют такие характеристики графа Γ_f как число компонент, распределение вершин по компонентам, диаметр наибольшей из компонент, называемый протяженностью функции f. Максимальное значение протяженности для функций f из P_n изучалось в работах Ю. Л. Васильева [14, 15], А. А. Евдокимова [42], В. В. Глаголева [27]. Максимальное значение протяженности по порядку равно 2^n и достигается на так называемых цепных функциях, граф которых представляет собой цепь, составленную из одномерных интервалов. А. А. Сапоженко [131, 133] показал, что протяженность почти всех функций f из P_n асимптотически равна $\frac{n}{\log_2 \log_2 n}$. Кроме того, в [133] показано, что почти все вершины графа Γ_f для почти всех функций f сосредоточены в одной компоненте, которая называется главной. Остальные компоненты представляют собой изолированные вершины, являющиеся нульмерными интервалами. Число компонент графа Γ_f у почти всех функций из P_n не превосходит произвольной числовой функции $\varphi(n)$, стремящейся к бесконечности при $n\to\infty$. В [131, 133] исследовались также свойства графа G_f, вершинами которого являются наборы из множества N_f, а ребрами — ребра n-мерного куба, обе вершины которых принадлежат множеству N_f. Доказано, что диаметр графа G_f для почти всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ равен $n+1$, а радиус $R(G_f)$ удовлетворяет неравенствам $n-2\leqslant R(G_f)\leqslant n-1$. Распределение вершин графа G_f по компонентам аналогично распределению их в графе Γ_f.

Томан в работе [141] изучал эволюцию строения графа G_f для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающих на вершинах n-мерного куба независимо значение 1 с вероятностью p и значение 0 — с вероятностью $1-p$. Показано, что с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n, граф G_f функции f устроен следующим образом: при всех $0<p\leqslant 1$ существует главная компонента, мощность которой асимптотически равна $p\cdot 2^n$. При этом если $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$, то граф G_f связен. Если $p=\frac{1}{2}$, то кроме главной компоненты имеется некоторое число изолированных вершин. Наконец, при $0<p<\frac{1}{2}$ кроме главной компоненты имеется еще

c^n, $1<c<2$, компонент мощность каждой из которых не превосходит некоторой константы, зависящей от p.

2.7. Метрические свойства не всюду определенных и случайных функций. Числовые характеристики не всюду определенных (частичных) булевых функций исследованы в меньшей степени, чем для всюду определенных. С одной стороны, это объясняется тем, что максимальные значения параметров и значения параметров почти всех не всюду определенных функций зависят не только от одного параметра n (числа переменных), а и от чисел u и v вершин единичного n-мерного куба, на которых функция обращается в единицу и ноль соответственно. Для различных множеств не всюду определенных булевых функций используются следующие обозначения: $\tilde{P}^n=\{f(x_1, \ldots, x_n)$ $f: B^n \to \{0, 1, —\}\}$ — множество всех не всюду определенных булевых функций n переменных, $\tilde{P}^n(u, v)=\{f \in \tilde{P}^n: |N_f|=u, |N_{\bar{f}}|=v\}$ — множество всех не всюду определенных булевых функций n переменных, которые обращаются в единицу на u наборах и в ноль на v наборах. Увеличение числа основных параметров порождает технические трудности и делает оценки менее обозримыми. С другой стороны, существует мнение, что принципиальные трудности минимизации не всюду определенных функций те же, что и в случае всюду определенных функций. Одной из первых работ, посвященных исследованию свойств д. н. ф. не всюду определенных булевых функций, была работа Ю. И. Журавлева [51]. В этой работе предложена общая схема алгоритмов минимизации не всюду определенных булевых функций, доказан критерий поглощения, показано, что при уменьшении мощности допустимой совокупности переменных сложность простейших отделителей может возрастать. (Совокупность Y переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется допустимой, если любые два вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1$, $f(\beta_1, \ldots, \beta_n)=0$, различаются на совокупности координат, соответствующих переменным из Y). В другой работе Ю. И. Журавлева [50] показано, что для почти всех не всюду определенных функций сложность минимальной реализации в классе дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм не превосходит

$$(1+\varepsilon)\cdot 2\cdot \min(u, v)\cdot \log_2 \max(u, v),$$

при условии, что $(u+v)^2=\bar{o}(2^n)$. Там же дана верхняя оценка для числа переменных в допустимой совокупности. Ф. Милето и Ж. Путцолу в работах [181, 182] вычислили ряд средних параметров не всюду определенных булевых функций. Л. А. Асланян в [7, 8] нашел асимптотическую оценку для среднего числа максимальных интервалов не всюду определенных булевых функций. А. А. Сапоженко [137] получил оценки для длины и числа тупиковых д. н. ф. для почти всех не всюду определенных булевых функций. Там же получена асимптотика логарифма длины сокращенной д. н. ф. Показано, что у почти всех функций f из $\tilde{P}^n(u, v)$ (при некоторых ограничениях на u и v) $\tau(f) \sim \sim \left(C_n^{[\log_2 v]}\right)^{u(1-\bar{o}(1))}$. У почти всех функций f из $\tilde{P}^n(u, v)$ почти все тупиковые д. н. ф. имеют длину, асимптотически равную u. Все максимальные интервалы почти всех функций при условии $\log_2 n = \bar{o}(v)$ имеют ранг асимптотически равный $\log_2 v$. Поэтому длины и сложности минимальных и кратчайших д. н. ф. асимптотически совпадают. Таким образом, ситуация аналогична той, что имеет место в случае почти всех всюду определенных функций. Отметим, что в случае слабо определенных функций т. е. при условии $u^2 + v^2 = \bar{o}(2^n)$ задание почти всех функций с помощью минимальных д. н. ф. существенно проще, чем табличное задание за счет большой размерности максимальных интервалов. Это вытекает из результата Ю. И. Журавлева [50].

Асимптотика длины сокращенной д. н. ф. для почти всех функций из $\tilde{P}^n(u, v)$ в зависимости от соотношений между n, u, v получены А. Е. Андреевым [4, 5]. Кроме того, в [4] получены оценки длины и сложности типичных функций из $\tilde{P}^n(u, v)$ при различных соотношениях между u и v. Пусть k_0 — такое максимальное натуральное число, что при $k = k_0$ выполнено неравенство $C_n^k (1 - v \cdot 2^{-n})^{2^k - 1} \geqslant 1$, а при $k > k_0$ это неравенство не выполняется. Показано, что для почти всех функций из $\tilde{P}^n(u, v)$ при $n \to \infty$

$$l(f) \asymp \left(\log_2 C_{u+v}^v\right) / \log_2 \left(v \cdot C_n^{k_0} / C_{u+v}^v\right),$$

если выполняется одно из следующих ограничений на u и v:

1) $\log_2 n \ll \log_2 (u + v) \leqslant n - \sqrt{\log_2 n}$, $\qquad \log_2 \frac{u}{v} \ll$ $\ll \log_2 \min \left(u + v, \dfrac{2^n}{u+v}\right)$,

2) $2n - \log_2 (u \cdot v) \ll \log_2 n$, $\log_2 \frac{u}{v} \ll \log_2 \min \left(u + v, \dfrac{2^n}{u+v}\right)$,

3) $\log_2 n \ll \log_2 (u + v) \lesssim \log_2 v$,

4) $2n - \log_2 (u \cdot v) \ll \log_2 n$, $\qquad n - \log_2 (u + v) \gtrsim 1$, $\qquad v \gg u$.

В последнем случае имеет место асимптотическое равенство. Кроме того, при условии $\log_2 v \gg \log_2 n$ для почти всех функций из $\tilde{P}^n(u, v)$ верно $L(f) \sim l(f) \cdot \log_2 v$, что дает соответствующие оценки сложности минимальных д. н. ф. типичных функций из $\tilde{P}^n(u, v)$. Если же $\log_2 (u + v) \lesssim \log_2 n$, то для почти всех функций из $\tilde{P}^n(u, v)$ $L(f) \asymp C_{u+v}^v / \log_2 n$ при выполнении одного из следующих условий

1) $\min(u, v) \gg \log_2 n$, $\left|\log_2 \frac{u}{v}\right| \ll \log_2 \dfrac{u+v}{\log_2 n}$,

2) $C_{u+v}^v \gg \log_2 n$.

Если же $u + v \asymp \log_2 n$, то $L(f) \asymp 1$, а при $\log_2 n - u - v \gg 1$, $L(f) = 1$.

Результаты работы [4] показывают, что для частичных функций из классов, удовлетворяющих указанным выше ограничениям, можно строить д. н. ф., отличающиеся от минимальных не более чем в 2 раза для почти всех функций.

В работах Л. М. Караханяна [73, 75, 76] проводилось сравнение сложностей д. н. ф. различных типов на множестве не всюду определенных функций $\tilde{P}^n$. В [76] получены асимптотические оценки максимального разброса сложности, то есть максимального отношения сложностей двух тупиковых д. н. ф., относительно линейных мер сложности для функций из $\tilde{P}^n$: при $n \to \infty$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\tilde{Y}(n, l) \sim 2^{n-1}$, $\tilde{Y}(n, L) \sim n \cdot 2^{n-1}$, $\tilde{Y}(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \frac{\alpha}{\beta} n \cdot 2^{n-1}$. Кроме того, в [76] а также в [75] получены оценки разброса сложности при замене д. н. ф. минимальных относительно одной меры сложности на д. н. ф. минимальную относительно другой меры сложности. Для большинства параметров получены асимптотики, а в ряде случаев получены точные значения параметров. При этом оказалось, что максимальные значения параметров на множестве $\tilde{P}^n$ больше, чем соответствующие максимальные значения на множестве P_n: при $n \to \infty$ и $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\lambda' = \frac{\beta'}{\alpha'}$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' > 0$

$$\tilde{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, l) = \frac{n-2+\lambda}{\lambda}, \quad \underline{\tilde{m}}_{L_{\alpha,\beta}}(n, l) \sim \tilde{\tilde{m}}_{L_{\alpha,\beta}}(n, l) \sim \frac{n}{\lambda},$$

$$\tilde{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, L_{\alpha',\beta'}) \sim \underline{\tilde{m}}_{L_{\alpha,\beta}}(n, L_{\alpha',\beta'}) \sim \tilde{\tilde{m}}_{L_{\alpha,\beta}}(n, L_{\alpha',\beta'}) \sim \frac{\max\{\lambda, \lambda'\}}{\min\{\lambda, \lambda'\}},$$

$$\tilde{m}_l(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \underline{\tilde{m}}_l(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \tilde{\tilde{m}}_l(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \frac{n}{1+\lambda}, \quad \beta \geqslant 0.$$

На множестве $\tilde{P}^n$ обнаружен еще один эффект, который связан с линейной мерой сложностью $L_{1,0}$, где $L_{1,0}(D) = k(D)$ — число знаков конъюнкции в д. н. ф. D. Для всюду определенных функций разброс при замене минимальных (а также $L_{\alpha,\beta}$-минимальных д. н. ф.) на k-минимальные д. н. ф. и наоборот ограничены сверху некоторой константой, а на множестве функций $\tilde{P}^n$ является величиной порядка n при $n \to \infty$: $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha > 0$

$$\tilde{m}_k(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \underline{\tilde{m}}_k(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \tilde{\tilde{m}}_k(n, L_{\alpha,\beta}) \sim \lambda n,$$

$$\underline{\tilde{m}}_{L_{\alpha,\beta}}(n, k) \sim \frac{\lambda n}{1+\lambda}, \quad \tilde{m}_{L_{\alpha,\beta}}(n, k) = \underline{\tilde{m}}_{L_{\alpha,\beta}}(n, k) = n-1.$$

Еще больший разброс имеет место при замене k-минимальных д. н. ф. на кратчайшие д. н. ф.

$$\tilde{m}_k(n, l) \sim \underline{\tilde{m}}_k(n, l) \sim \tilde{\tilde{m}}_k(n, l) \sim \frac{n^2}{4} \text{ при } n \to \infty,$$

в то время как на множестве функций P_n соответствующие параметры асимптотически равны n.

Таким образом, сравнение д. н. ф. минимальных относительно различных линейных мер сложности показывает, во-первых, что наибольший разброс получается при замене k-, $L_{\alpha,\beta}$-минимальных д. н. ф. на кратчайшие д. н. ф. и, во-вторых, что максимальные значения параметров на множестве не всюду определенных булевых функций $\tilde{P}^n$ могут быть по порядку больше соответствующих значений параметров на множестве всюду определенных функций P_n.

В работах [73, 76] исследовались параметры относительной $\mathscr{L}$-сложности для линейных мер сложности на множестве не всюду определенных булевых функций $\tilde{P}^n$. В этих работах показано, что для $\tilde{\mathscr{L}}_{\overline{C}|C}(n)$, а также для любых пар типов д. н. ф. X и Y таких, что $X, Y \in \{C, Q, \bigcup T, A_{\mathscr{L}}, \bigcup M\mathscr{L}\}$, $D_Y(f) \subseteq D_X(f)$, для линейных мер сложности $\mathscr{L} = L_{\alpha,\beta}$, $\alpha > 0$, за исключением параметра $\tilde{\mathscr{L}}_{A_{\mathscr{L}}|\bigcup M\mathscr{L}}(n)$ имеют место неравенства при $n \to \infty$ $3^n \lesssim \tilde{\mathscr{L}}_{X|Y}(n) \lesssim \sqrt{n} \cdot 3^n$. Кроме того, показано что при $n \to \infty$

$$\frac{2^n}{\sqrt{n}} \lesssim \tilde{\mathscr{L}}_{\bigcup M\mathscr{L}|\mathscr{L}}(n) \lesssim \sqrt{n} \cdot 3^n, \quad \frac{2^n}{n} \lesssim \tilde{\mathscr{L}}_{A_{\mathscr{L}}|\bigcup M\mathscr{L}}(n), \quad \tilde{\mathscr{L}}_{A_{\mathscr{L}}|\mathscr{L}}(n).$$

Для относительных длин на множестве не всюду определенных функций для всех допустимых пар типов д. н. ф. X и Y, за исключением двух параметров: $\tilde{l}_{A_l|\bigcup T}(n) = 1$, так как $D_{A_l}(f) = D_{\bigcup T}(f)$, и $\tilde{l}_{\bigcup Ml|l}(n)$, для которого известна лишь оценка $\frac{2^n}{\sqrt{n}} \lesssim \tilde{l}_{\bigcup Ml|l}(n) \lesssim \frac{3^n}{\sqrt{n}}$, справедливы неравенства $\frac{3^n}{n} \lesssim \tilde{l}_{X|Y}(n) \lesssim \frac{3^n}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$.

Оценки параметров почти всех булевых функций связаны с понятием случайной булевой функции. Используются две модели случайной булевой функции. Одна из них (называемая в дальнейшем комбинаторной моделью) состоит в том, что функция f задается путем выбора наугад некоторой функции $f \in P_n$, $P_n(u)$, $\tilde{P}^n(u, v)$. При этом обычно полагается, что все 2^{2^n} $\left(C_{2^n}^u, C_{2^n}^u \cdot C_{2^n-u}^v\right)$ исходов равновероятны. Другая модель (называемая в дальнейшем вероятностной моделью) состоит в том, что функция f задается путем выбора значения функции f на каждом наборе $\tilde{\alpha}$ из B^n, причем вероятность $Q(\tilde{\alpha}, n)$ события $f(\tilde{\alpha}) = 1$ равна p, а вероятность $\overline{Q}(\tilde{\alpha}, n)$ события $f(\tilde{\alpha}) = 0$ равна $q = 1 - p$, независимо от выбора значений на других наборах из B^n. Следует отметить, что многие оценки типичных параметров, полученные в комбинаторной модели при $u = p \cdot 2^n$, близки к тем, что получены на основе вероятностной модели при

$Q(\tilde{\alpha}, n)=p$. Однако эти модели не тождественны, поскольку легко указать свойство A булевых функций такое, что вероятности того, что случайная булева функция $f(\tilde{x}^n)$ обладает свойством A, в этих моделях различны. Например, в качестве свойства A можно взять такое: «$|N_f|$—простое число». Для комбинаторной модели смысл выражения «почти все функции f из P_n ($P_n(u)$, $\tilde{P}^n(u, v)$) обладают свойством A» состоит в том, что доля $\delta_n(A)$ тех $f(\tilde{x}^n)$ из P_n (соответственно из $\tilde{P}^n(u, v)$), которые обладают свойством A, стремится к 1 при $n\to\infty$. Для вероятностной модели смысл этого выражения состоит в следующем. Пусть вероятностное пространство P_p^n ($\tilde{P}_{p,q}^n$) задано множеством P_n (или $\tilde{P}^n$) всех всюду определенных (частичных) функций и вероятностью p (соответственно вероятностями p, q, $0\leqslant p$, $q\leqslant 1$, $0\leqslant p+q\leqslant 1$). Говорят, что почти все функции f из P_p^n (из $\tilde{P}_{p,q}^n$) обладают свойством A, если вероятность $Q_n(A)$ того, что f обладает свойством A стремится к 1 при $n\to\infty$.

Как правило, получение результатов в комбинаторной модели связано с преодолением существенных технических трудностей, возникающих при вычислении вероятностей или средних значений. В вероятностной модели эти трудности не столь значительны. Для сравнения можно указать работы [79, 80] и [6], где точная по порядку оценка длины кратчайших д. н. ф. получена в разных моделях, или работы [134] и [213], посвященные оценкам числа тупиковых д. н. ф. в разных моделях. В этих случаях, большая сложность доказательств для комбинаторной модели связана и с выбором конструкции.

Бóльшая часть результатов получена для вероятностной модели P_p^n. К. Вебер получил оценки многих параметров случайных функций в вероятностной модели P_p^n. В работе [210] получены оценки длины кратчайшей д. н. ф. для функций из P_p^n. Показано, что при $\log_2\log_2 n/\log_2 n\leqslant p\leqslant 1-1/\sqrt{\log_2 n}$ и $d_1=[\log_2\log_2 n+ +\log_2\log_2\log_2 n-\log_2\log_2\frac{1}{p}]$ для почти всех функций из P_p^n справедливы неравенства

$$p\cdot 2^{n-d_1}\leqslant l(f)\leqslant p\cdot 2^{n-d_1+1}d\cdot\ln 2.$$

В работе [211] получены оценки числа $i_k(f)$ k-мерных граней и числа $j_k(f)$ изолированных граней для почти всех функций из P_p^n. Указаны пороговые функции для свойств булевых функций из P_p^n «иметь k-мерные интервалы» и «иметь изолированные k-мерные интервалы». Найдены значения вероятности p, при которых все вершины из N_f содержатся в изолированных интервалах. Показано, что для любого целого $k\geqslant 0$, произвольного действительного x и $p=1-2^{-2^k}\left(1-k\cdot 2^{-k}\cdot\ln n/n+x\cdot 2^{-k}/n+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ число изолированных интервалов размерности k имеет асимптотически пуассоновское распределение со средним значением $\lambda=e^x(1-2^{-2^k})^{2^{-k}}/k!$.

В работе [212] получены асимптотические оценки длины $s(f)$ сокращенной д. н. ф. для почти всех функций из P_p^n. Доказано, что

а) при $n^{-\varepsilon_n}\leqslant p\leqslant 1-2^{-n/4}$, где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$ у почти всех функций f из $P_p^n s$ $(f)\sim\bar{s}_{k_2}+\bar{s}_{k_2+1}$, где $k_2=\left[\log_2\log_2 n-\right.$ $\left.-\log_2\log_2\frac{1}{p}\right]$, а s_k — математическое ожидание числа k-мерных максимальных интервалов.

б) при $np\to\infty$ и $\log_2\left(\frac{1}{p}\right)\sim\log_2 n$ у почти всех функций

$$s(f)\sim s_{k_2}+s_{k_2+1}+s_{k_2+2}.$$

в) при $p=\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ и $p\cdot 2^n\to\infty$ у почти всех функций $s(f)\sim s_0$.

В работе [213] получена асимптотика логарифма числа $\tau(f)$ тупиковых д. н. ф. для почти всех функций f из P_p^n. Показано, что почти всегда $\log_2\tau(f)\sim\left(d\log_2 n-(2^d-1)\log_2\frac{1}{p}\right)\cdot p\cdot 2^n$, где $d=$ $=k_2+1$

2.8. Способы получения оценок и существование асимптотических оценок. Все оценки рассматриваемые в метрической теории д. н. ф. можно разбить на два основных типа

а) оценки для экстремальных (максимальных или минимальных) значений параметров,

б) оценки типичных значений параметров.

Как правило, нижние оценки экстремальных значений параметров получаются в теории д. н. ф. прямым построением последовательностей функций, на которых эти значения достигаются. Если на начальном этапе развития метрической теории оценки параметров получались путем рассмотрения свойств функций из известных классов — симметрических, линейных и т. п., то позднее существенную роль стало играть конструирование функций с заданными параметрами из некоторого набора простых функций. Первыми конструкциями такого сорта были конструкции Ю. И. Журавлева, Ю. Л. Васильева, Лин Син—Ляна. Конструирование таких последовательностей основывается на использовании свойств симметрических, линейных, циклических и других видов функций, а также на применении операции суперпозиции д. н. ф. При этом обычно используются бесповторные суперпозиции, при которых множества переменных, от которых зависят д. н. ф., участвующие в суперпозиции, не пересекаются. Ю. Л. Васильев [15, 16] показал, что бесповторные суперпозиции сокращенных д. н. ф. дают сокращенную д. н. ф., а суперпозиция тупиковых — тупиковую. Э. Ш. Коспанов [81] показал, что бесповторная суперпозиция кратчайших (минимальных) д. н. ф., вообще говоря, не является кратчайшей (минимальной) д. н. ф. Это свидетельствует о том, что понятие минимальности является существенно более сложным, чем понятие тупиковости. Операция суперпозиции широко использовалась в работах Ю. Л. Васильева [15—17], Ю. И. Журавлева [54], А. А. Левина [85—89]. Оценки, полученные в [21, 31], основаны на использовании свойств симметрических функций. Верхние оценки получаются с помощью весьма специальных соображений мощностного характера. Таковы, например оценки $s(n)$, $l_T(n)$, $\mu(n)$, $\tau(n)$ (см. [18, 21, 31]). Примером получения нижних оценок с помощью неконструктивных методов с использованием утверждений типа теорем существования являются оценки для $\tau(n)$ и $\mu(n)$, полученные И. П. Чухровым в [147, 148]. Фактически, вместо построения экстремальной по числу тупиковых или минимальных д. н. ф. булевой функции, строится много различных д. н. ф. соответствующего типа, а в качестве нижних оценок $\tau(n)$ и $\mu(n)$ берутся средние значения этих параметров по множеству всех булевых функций.

Как уже говорилось, основным приемом получения оценок параметров почти всех функций является вычисление средних значений и использование неравенств типа неравенства Чебышева. Часто прямое вычисление средних значений провести не удается. Поэтому вычисляются средние значения некоторых вспомогательных параметров, а затем с помощью разного рода конструкций вычисляются значения основного параметра. Широкое применение этих приемов началось с работ В. В. Глаголева [28, 29, 32, 33]. Различного рода конструкции получения оценок для почти всех функций представлены в работах А. Д. Коршунова [77—80], А. А. Сапоженко [131, 134, 135], А. Е. Андреева [4, 5].

В работах [110, 112] Р. Г. Нигматуллиным изучался вопрос о существовании асимптотических значений параметров почти всех функций. Показано, что для ряда основных параметров, характеризующих процесс минимизации, существуют функции, которые задают асимптотические значения этих параметров для почти всех функций. Доказанные в этих работах оценки носят характер теорем существования. К настоящему времени для большинства параметров, рассматривавшихся в работах [110, 112], получен явный вид асимптотических оценок. Исключение составляет сложность минимальной (длина кратчайшей д. н. ф.). Результаты, полученные в [110, 112], тем не менее сохраняют принципиальный интерес, поскольку отличают ситуацию, характерную для д. н. ф., от той, что имеет место в других классах реализаций, например, в классе автоматов [117]. Результаты, полученные в [110, 112], основываются на верхних оценках вариации различных параметров на парах соседних функций (т. е. функций, значения которых отличаются ровно на одном наборе значений переменных).

§ 3. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ТРУДНОСТИ СИНТЕЗА МИНИМАЛЬНЫХ Д. Н. Ф. ТЕОРИЯ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

С. В. Яблонский [150, 152] доказал, что при некоторых естественных ограничениях на класс допустимых алгоритмов построение бесконечной последовательности самых сложных (в смысле реализации контактными схемами) булевых функций невозможно без построения всех булевых функций. Это было одним из первых утверждений, указывающих на неустранимость перебора при решении дискретных экстремальных задач такого типа как задача синтеза управляющих систем. Работы [150, 152] послужили толчком к исследованию алгоритмических трудностей, возникающих в задачах синтеза управляющих систем различных классов и, в частности, в задаче построения минимальных д. н. ф.

Изучению алгоритмических трудностей минимизации д. н. ф. посвящен цикл работ Ю. И. Журавлева по локальным алгоритмам. Отправным моментом для введения понятия локального алгоритма явились результаты Квайна и их трактовка с геометрической точки зрения. Квайн [199] сформулировал критерий вхождения простого импликанта булевой функции во все ее тупиковые д. н. ф. и достаточные условия невхождения ни в одну из тупиковых д. н. ф. Ю. И. Журавлев [45], [52, 58] ввел понятие окрестности порядка r максимального интервала (простого импликанта). Грубо говоря, окрестность порядка r максимального интервала M состоит из всех максимальных интервалов, отстоящих от M на расстоянии, не превышающем r. Расстояние между интервалами определяется как в графе, где вершинами являются максимальные интервалы, при этом две вершины смежны, если соответствующие интервалы пересекаются. Ю. И. Журавлев [58] показал, что критерий Квайна можно проверять, рассматривая лишь окрестность первого порядка исследуемой конъюнкции. Оказалось [58], что проверка условий невхождения простого импликанта произвольной булевой функции ни в одну из ее тупиковых д. н. ф. может быть осуществлена по окрестности второго порядка, но, вообще говоря, не может быть осуществлена по окрестности первого порядка. Таким образом проверка вхождения конъюнкции хотя бы в одну или во все тупиковые д. н. ф. может быть осуществлена по окрестности ограниченного, а именно, второго порядка. При распознавании свойства вхождения простого импликанта произвольной булевой функции хотя бы в одну ее минимальную д. н. ф. нельзя обойтись рассмотрением окрестности ограниченного порядка. Этот факт, установленный Ю. И. Журавлевым [49, 52], свидетельствует в пользу тезиса о невозможности решения задачи минимизации средствами, исключающими перебор.

Для более точной формулировки результата дадим содержательное описание понятия локального алгоритма. Локальный алгоритм упрощения преобразует сокращенную или некоторую другую д. н. ф., состоящую из простых импликант, в д. н. ф. с отметками над конъюнкциями. Эти отметки указывают на вхождение или невхождение соответствующих конъюнкций в д. н. ф. того или иного вида. Например, пометки могут нести информацию о вхождении конъюнкции во все или хотя бы в одну минимальную (тупиковую) д. н. ф. или указывать, что никакой информации о вхождении конъюнкции в тот или иной интересующий нас тип д. н. ф. не имеется. Обычно считается, что в начале работы алгоритма все отметки над конъюнкциями имеют неопределенное значение. В процессе работы алгоритм меняет отметки над данной конъюнкцией или оставляет их без изменений, руководствуясь лишь информацией о конъюнкциях, находящихся в окрестности некоторого порядка от рассматриваемой конъюнкции. Порядок этой окрестности задается индексом локального алгоритма. Число пометок над конъюнкциями, которые вычисляются в процессе работы, называются памятью локального алгоритма. Пусть Γ_f — граф, вершинами которого являются максимальные интервалы булевой функции f, а ребрами — пары пересекающихся интервалов. Протяженностью булевой функции f называется наибольший из диаметров компонент связности графа Γ_f. В [55] показано, что в классе локальных алгоритмов индекса k и памяти m вопрос о вхождении конъюнкции хотя бы в одну минимальную д. н. ф. функции f, вообще говоря, неразрешим, если $k \cdot m < p(f)$, где $p(f)$ — протяженность функции f. В связи с понятием локального алгоритма возникают вопросы о конечности числа шагов, совершаемых локальным алгоритмом, о зависимости результата работы от порядка просмотра конъюнкций, о существовании самого сильного (мажорантного) алгоритма индекса k и памяти m. Эти вопросы рассматривались в работах Ю. И. Журавлева [46, 47, 55, 56, 58] и других авторов [27, 37, 91, 92, 93, 116]. В [58] показано, что при некоторых естественных ограничениях на способ вычисления отметок локальный алгоритм всегда заканчивает работу за конечное число шагов и результат работы не зависит от порядка просмотра конъюнкций. В [58] введено также понятие A-алгоритма. Это локальный алгоритм индекса 2, позволяющий выделить все конъюнкции, входящие хотя бы в одну тупиковую д. н. ф., а также конъюнкции, входящие во все тупиковые д. н. ф. и, кроме того, указать некоторые из тех конъюнкций, которые не входят ни в одну из минимальных д. н. ф. Д. н. ф., получающаяся в результате работы A-алгоритма, называется сильно сокращенной. В [3] предложена машинная реализация A-алгоритма. В работе [85] приведены примеры функций, для которых A-алгоритм весьма существенно (в $3^{n(1-o(1))}$ раз) упрощает сокращенную форму. С другой стороны, в [85] показано, что существуют функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, у которых отношение длины сильно сокращенной д. н. ф. к числу конъюнкций, входящих хотя бы в одну минимальную д. н. ф. достигает $3^{n(1-\bar{o}(1))}$. Отметим, что для почти всех функций (см. [5]) длина сокращенной д. н. ф. совпадает с числом конъюнкций, входящих хотя бы в одну тупиковую д. н. ф. Из этого результата легко следует, что у почти всех функций длина сильно сокращенной д. н. ф. асимптотически равна длине сокращенной д. н. ф. В [2] изучаются локальные алгоритмы индекса 3. Вопросы существования и построения мажорантных алгоритмов индекса 1 рассматриваются в работах [91—93, 116]. В работе [93] указан общий вид условно мажорантного алгоритма с произвольной памятью для задачи о покрытии. В [92, 117] указаны наилучшие локальные алгоритмы минимального индекса для выделения конъюнкций, входящих хотя бы в одну тупиковую д. н. ф. В работе [2] предлагается обобщение понятия локального алгоритма и доказывается неразрешимость задачи о покрытии в этом классе алгоритмов.

Понятие локального алгоритма оказало стимулирующее влияние на изучение метрических свойств д. н. ф. и способствовало лучшему пониманию трудностей, возникающих при минимизации. В этой связи следует упомянуть работы Ю. Л. Васильева [14, 15], А. А. Евдокимова [42], В. В. Глаголева [27], А. А. Сапоженко [131] по изучению протяженности булевых функций, а также работу Ю. Л. Васильева [17], в которой строятся так называемые плотные функции, сочетающие в себе небольшую протяженность с ярко выраженными трудностями минимизации: большим числом тупиковых д. н. ф., большим разбросом, неупрощаемостью в классе простых локальных алгоритмов.

О вычислительной сложности задачи минимизации можно судить, сопоставив ее с другими дискретными экстремальными задачами. С. А. Кук [84] установил, что задача распознавания тождественной истинности д. н. ф. является так называемой NP-полной задачей. Содержательно это означает, что многие сложные в вычислительном отношении задачи имели бы простое решение, если бы для задачи распознавания тождественной истинности д. н. ф. существовал простой алгоритм. Отсюда вытекает, что даже построение некоторой тупиковой д. н. ф. с использованием критерия поглощения является довольно трудоемкой задачей, т. к. этот критерий сводится к проверке тождественной истинности некоторой д. н. ф. Задача построения кратчайшей д. н. ф. по таблице Квайна, эквивалентная задаче о покрытии, также является NP-трудной задачей.

Дополнительные трудности по сравнению с задачей о покрытии вносит то обстоятельство, что размер входной информации, как правило, зависит от основного параметра (числа переменных) экспоненциально. В сообщении [121] приводятся примеры задач минимизации, которые могут быть решены алгоритмами полиномиальной сложности. К ним относятся задачи построения сокращенной д. н. ф. по совершенной, построения некоторой тупиковой д. н. ф. по совершенной. Вместе с тем задача построения сокращенной д. н. ф. по произвольной д. н. ф. относится к так называемым NP-полным задачам.

В [5] показано, что следующие задачи для не всюду определенной булевой функции f:

— найти некоторую минимальную д. н. ф.;

— найти некоторую элементарную конъюнкцию, входящую в д. н. ф. типа сумма минимальных д. н. ф.;

— для элементарной конъюнкции K вычислить значение предиката «элементарная конъюнкция принадлежит д. н. ф. типа сумма минимальных д. н. ф.» функции f;

— найти сложность минимальной д. н. ф.

полиномиально эквивалентны, то есть их трудоемкость различается не более чем в $2^{c \cdot n}$ раз, где 2^n — длина входа. Этот факт объясняет обнаруженное Ю. И. Журавлевым отсутствие локального критерия распознавания предиката «вхождение в д. н. ф. типа суммы минимальных д. н. ф.», так как по сложности такое распознавание фактически совпадает с решением задачи минимизации.

В связи с тем, что точное решение задачи минимизации в общем случае наталкивается на непреодолимые вычислительные трудности, интерес представляют приближенные алгоритмы. Примером такого приближенного алгоритма является алгоритм наискорейшего спуска или градиентный алгоритм (см. [142]). Выше отмечалось, что такие алгоритмы удовлетворительно работают почти всегда [135]. Однако, существуют примеры [111], когда это не так. Интерес к приближенным алгоритмам минимизации увеличивается. Об этом можно судить по значительному числу публикаций, в которых предлагаются различные приближенные алгоритмы минимизации. Однако, в большинстве своем такие алгоритмы почти не исследованы теоретически. В частности, для большинства приближенных алгоритмов отсутствуют оценки сложности и величины отклонения получаемого результата от наилучшего.

§ 4. АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Число работ, в которых предлагаются эвристические алгоритмы минимизации, весьма велико. Поэтому было бы затруднительно даже перечислить все предлагавшиеся алгоритмы. Ниже предлагается классификация алгоритмов и даются примеры.

Алгоритмы минимизации по их назначению можно разделить на три типа:

1) алгоритмы построения сокращенной д. н. ф.; 2) алгоритмы построения кратчайших и минимальных д. н. ф.; 3) алгоритмы построения достаточно простых д. н. ф.

Последние два типа алгоритмов можно разделить на подтипы в зависимости от того, строится или не строится в процессе работы сокращенная д. н. ф.

По применимости к тем или иным классам булевых функций алгоритмы можно разделить на 1) применимые к всюду определенным булевым функциям; 2) ориентированные на минимизацию не всюду определенных булевых функций.

По способу реализации алгоритмы делятся на типы, предназначенные 1) для вычислений вручную; 2) для вычислений с использованием ЭВМ.

В зависимости от применения тех или иных математических средств и методов алгоритмы можно разделить на типы, использующие 1) диаграммы и минимизирующие карты; 2) алгебрологические преобразования; 3) численные методы; 4) методы теории графов; 5) методы линейного программирования; 6) прочие методы.

Алгоритмы можно классифицировать также по способу задания входной информации. Способ задания минимизируемых функций тесно связан с выбором средств и методов решения задачи минимизации. Наиболее распространенными являются задания булевых функций 1) совершенной д. н. ф., таблицами, числовыми кодами наборов, обращающих функцию в 1 (или в 0); 2) сокращенной д. н. ф.; 3) другими типами д. н. ф.

Описание ряда известных алгоритмов минимизации можно найти в [44, 129, 153], а также в [114], где дан обзор методов минимизации, известных к 1968 г.

4.1. Алгоритм построения сокращенной д. н. ф. Наиболее известным алгоритмом построения сокращенной д. н. ф., по-видимому, является алгоритм Блейка—Порецкого [127, 157], описанный во многих руководствах (см. [44, 153]). Этот алгоритм строит сокращенную д. н. ф. по д. н. ф. произвольного вида. Алгоритм состоит в применении к исходной д. н. ф. правила обобщенного склеивания $xA\vee\bar{x}B=xA\vee\bar{x}B\vee AB$ до тех пор, пока это возможно, и последующем применении правила поглощения $A\vee AB=A$. Считается, что преобразования выполняются слева направо. В целом ряде работ предлагались различные варианты улучшения и машинные реализации этого алгоритма [39, 60, 61, 127, 128].

Квайн [197, 198] предложил алгоритм построения сокращенной д. н. ф. по совершенной. Этот алгоритм аналогичен алгоритму Блейка—Порецкого и отличается тем, что вместо операции обобщенного склеивания применяется обычное склеивание $xA\vee\bar{x}A=A$. МакКласки [179] усовершенствовал процедуру путем разбиения множества конъюнкций совершенной д. н. ф. на классы по числу неинверсных вхождений переменных. При этом возможность склеивания проверялась только для элементов соседних классов. Это привело к существенному сокращению числа операций. Усовершенствования метода Квайна—

МакКласки предлагались различными авторами [160, 174, 188, 204].

Еще один алгоритм [121, 98, 99] построения сокращенной д. н. ф. по совершенной состоит в следующем (см. [98, 121]). Пусть $K=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ и $L=x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ — две конъюнкции. Конъюнкция M всех букв $x_i^{\alpha_i}$ таких, что $\alpha_i=\beta_i$, называется согласованной частью конъюнкций K и L. Алгоритм состоит из трех этапов. На первом этапе для каждой неупорядоченной пары (K, L) конъюнкций совершенной д. н. ф. строится согласованная часть. При этом рассматриваются и пары вида (K, K). На втором этапе вычеркиваются те согласованные части, которые не являются импликантами рассматриваемой функции. На третьем этапе к оставшимся конъюнкциям применяется правило поглощения $A\vee AB=A$. Отметим, что такой алгоритм имеет сложность порядка m^4, где m — длина совершенной д. н. ф.

В работе Нельсона [192] предложен алгоритм построения сокращенной д. н. ф. по произвольной конъюнктивной нормальной форме (к. н. ф.). Метод состоит в переходе от к. н. ф. к д. н. ф. с помощью раскрытия скобок и последующего применения правил $x\cdot\bar{x}=0$, $x\cdot x=x$, $A\vee AB=A$. Усовершенствования метода предлагались в [23, 208, 217].

Для построения сокращенной д. н. ф. «вручную» для функций, зависящих от небольшого числа переменных, удобным средством являются карты Карно [176] и диаграммы Вейтча [207]. Графико-механические и матричные способы получения сокращенной д. н. ф. предлагались в работах [104, 105, 155, 163, 175, 203]. Способ, опирающийся на геометрическое представление функций в n-мерном кубе, используется в [22]. Метод неопределенных коэффициентов для построения сокращенной д. н. ф. описан в [153]. В [24] предлагается метод непосредственного отбора конъюнкций, являющихся простыми импликантами. Метод масок для построения сокращенной д. н. ф. предлагался в [106]. В [120] предложен метод построения сокращенной д. н. ф. не всюду определенных функций. В работе [185] дан перечень алгоритмов построения сокращенной д. н. ф. Методы, ориентированные на машинную реализацию, рассматривались в [160, 188, 206]. В [167, 168] предлагались способы построения сокращенной д. н. ф. основанные на разложении функций по переменным.

4.2. Алгоритмы построения минимальных и кратчайших д. н. ф. Во многих известных алгоритмах построения кратчайших, минимальных и тупиковых д. н. ф. используется так называемая таблица Квайна (или таблица простых импликантов). Эта таблица представляет собой двоичную матрицу, столбы которой соответствуют конъюнкциям совершенной д. н. ф., а строки — простым импликантам. На пересечении i-го столбца и j-й строки этой матрицы стоит единица, если i-я конъюнкция из совершенной д. н. ф. поглощается j-м простым импликантом, и стоит ноль в противном случае.

Один из методов построения минимальных (кратчайших) д. н. ф. по таблице Квайна, основанный на сравнении всех тупиковых д. н. ф. состоит в следующем. На первом этапе таблице Квайна функции сопоставляется некоторая вспомогательная конъюнктивная нормальная форма K_f. Для этого каждой строке α_j таблицы сопоставляется вспомогательная переменная y_j. Столбцу с номером i сопоставляется дизъюнкция всех переменных, которые соответствуют строкам, имеющим единицу в пересечении с i-м столбцом. Конъюнкция всех таких дизъюнкций образует K_f. На втором этапе путем раскрытия скобок и применения правил $A\vee A=A$, $A\&A=A$, $A\vee AB=A$ к. н. ф. K_f приводится к д. н. ф., в которой отсутствуют элементарные поглощения. Каждое слагаемое $y_{i_1}\cdots y_{i_K}$ полученной д. н. ф. соответствует тупиковой д. н. ф. функции f, составленной из простых импликантов, соответствующих строкам таблицы Квайна. При этом каждой тупиковой д. н. ф. функции f соответствует ровно одно слагаемое д. н. ф. На последнем этапе тупиковые д. н. ф. сравниваются между собой по сложности (или длине) с целью выбора минимальных (кратчайших) д. н. ф. Этот метод, называемый иногда методом Петрика [195], а иногда методом Квайна—МакКласки [179], был предложен ранее в работах С. В. Яблонского и И. А. Чегис [154] в качестве процедуры построения тупиковых тестов для таблиц. Метод применим лишь для функций, имеющих небольшую по размеру таблицу простых импликантов.

В работе Газала [171] и Мотта [186] предлагалась модификация этого метода, при которой к. н. ф. K_f строится не по таблице Квайна функции f, а непосредственно по сокращенной д. н. ф. Алгоритмы Газала и Мотта работают по следующей схеме. Для каждого простого импликанта A выписываются все совокупности простых импликантов, дизъюнкция которых поглощает A. Если, например, A поглощается дизъюнкциями простых импликантов $B\vee C$, $B\vee D\vee F$, то импликанту A сопоставляется д. н. ф. вида $A\vee BC\vee BDF$. Затем составляется формула, представляющая собой конъюнкцию всех таких д. н. ф. После этого раскрываются скобки с применением правил $A\&A=A$, $(A\vee B)(A\vee C)=A\vee BC$, $(A\vee B)A=A$, $A\vee AB=A$ до получения д. н. ф., в которой отсутствуют элементарные поглощения. Каждому члену полученной д. н. ф. соответствует тупиковая д. н. ф. исходной функции.

Часто таблица Квайна может быть сокращена за счет следующих преобразований. Если один из столбцов содержит все единицы второго, то первый из них может быть вычеркнут из таблицы. Из нескольких одинаковых столбцов может быть оставлен только один. Эти преобразования соответствуют удалению регулярных точек из множества N_f (см. [58]). Если после вычеркивания столбцов оказалось, что некоторая строка содержит все единицы другой, то вторая может быть вычеркнута (при условии, что нас интересуют кратчайшие д. н. ф.). Все строки, соответствующие ядровым импликантам, можно вычеркнуть, занеся ядровые импликанты в д. н. ф. При вычеркивании строки удаляются все столбцы, имеющие с ней общие единицы. Одно упрощение часто влечет возможность применения других. Матрица, к которой неприменимо ни одно из выше указанных преобразований, называется циклической [179]. Кратчайшим покрытием столбцов бинарной матрицы называется минимальное по мощности множество ее строк такое, что каждый столбец имеет единицу в пересечении с некоторой строкой из этого множества. Основная трудность получения кратчайших д. н. ф. состоит в построении кратчайших покрытий матриц именно такого типа.

Большое число работ посвящено сокращению перебора при построении кратчайших и минимальных покрытий матриц и упрощению таблицы Квайна [36, 57, 66, 67, 120, 143, 173, 178, 180, 186, 189, 199, 209, 216]. Одной из основных идей сокращения таблицы Квайна является идея выделения ядра [36, 41, 57, 190, 191, 197, 198, 199]. Теоретическому обоснованию различного рода упрощений сокращенной д. н. ф. посвящен цикл работ Ю. И. Журавлева по локальным алгоритмам (см. § 3). Критерий поглощения доказан в [51, 58]. В [200, 201] предложен вариант критерия поглощения. В работе [172] доказано, что для всякой двоичной матрицы существует функция (возможно, не всюду определенная), для которой данная матрица служит таблицей Квайна. В работе [209] минимизация булевой функции сводилась к упрощению некоторой новой булевой функции, переменные которой соответствуют максимальным интервалам исходной функции.

4.3. Эвристические алгоритмы и алгоритмы построения «достаточно простых» д. н. ф. Алгоритмам построения «достаточно простых» д. н. ф. посвящено наибольшее число работ технического направления. При большом числе переменных точное решение задачи минимизации, как правило, требуют практически неосуществимого объема вычислений. Поэтому приближенные методы становятся единственно возможными. Такой вывод можно сделать исходя из анализа оценок д. н. ф. (см. § 2). Некоторые доводы в пользу этого тезиса приведены в [169]. Многие приближенные методы ориентированы на минимизацию не всюду определенных булевых функций.

Одним из широко распространенных приближенных методов является алгоритм пошаговой оптимизации. Алгоритмы такого сорта называют «жадными» или алгоритмами «наискорейшего спуска». В работе [135] алгоритм построения приближенного покрытия, выбирающий на очередном шаге интервал, покрывающий наибольшее число непокрытых вершин, назван «градиентным». Эффективность такого алгоритма достаточно хорошо изучена теоретически [7, 111, 135, 142, 149, 158]. Почти всегда градиентный алгоритм строит д. н. ф. близкие к минимальным [111, 135, 6]. Различные варианты градиентного метода предлагались в работах [65, 67, 143, 158, 179]. В работе [179] по таблице Квайна строится в качестве первого приближения тупиковое градиентное покрытие, а затем рассматриваются покрытия, соседние по отношению к полученному покрытию. В [158] на множестве максимальных интервалов вводится функция предпочтения. На каждом шаге выбирается простой импликант, максимизирующий значение этой функции.

Многие приближенные методы не требуют предварительного построения сокращенной д. н. ф. Один из таких методов, ориентированный главным образом на минимизацию не всюду определенных функций был предложен Акерсом [156]. Минимизируемая функция задается таблицей, составленной из тех наборов, на которых функция определена. Столбцы таблицы соответствуют переменным функции. Предполагается, что функция монотонна. Если это не так, то добавлением инверсий столбцов получают монотонную функцию. Алгоритм Акерса состоит из следующих этапов.

1. Таблица упрощается за счет исключения строк. Если $\alpha, \beta \in N_f$ и $\alpha \leqslant \beta$, то исключается строка β. Если $\alpha, \beta \in N_{\bar{f}}$ и $\alpha \leqslant \beta$, то исключается строка α, где отношение $\leqslant$ между двоичными наборами понимается как обычно: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i=1, 2, \ldots, n$.

2. Отмечаются так называемые обязательные единицы в наборах множества N_f, т. е. те единицы, замена которых на 0 приводит к нарушению монотонности функции.

3. Столбец считается существенным, если он не содержит обязательных единиц. Исключается некоторый несущественный столбец. Повторяется этап 1.

4. Если некоторая строка состоит только из обязательных единиц, то она соответствует так называемой обязательной конъюнкции. Такие конъюнкции заносятся в получаемую д. н. ф., а соответствующие строки вычеркиваются из таблицы. После вычеркивания строки повторяется этап 3.

5. Если ни один из этапов 1—4 невозможен, то некоторая необязательная единица заменяется на ноль. Повторяется этап 1.

Алгоритм заканчивает работу, когда все строки оказываются исключенными из таблицы. Алгоритм работает быстро, приспособлен к машинной реализации, применим к не всюду определенным функциям. Однако в результате может получиться д. н. ф., которая не является ни минимальной, ни даже тупиковой. В [138] показано, что для функций, зависящих от n переменных, отличие д. н. ф., получаемой алгоритмом Акерса, от минимальной может достигать величины $2^{n(1-\varepsilon_n)}$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Эти особенности алгоритма Акерса характерны для многих приближенных алгоритмов. Различные варианты и усовершенствования алгоритма Акерса предлагались в [12, 40, 177].

Еще один тип приближенных алгоритмов, предлагавшийся целым рядом авторов (см. [9, 35, 122, 164, 165, 168, 186]), основан на разложении функций по переменным. Эти алгоритмы подобны методу каскадов для синтеза контактных схем, который был предложен Г. Н. Поваровым [124].

Большое число работ посвящено минимизации слабо определенных булевых функций [65, 68, 94, 95, 122, 126, 166, 168, 177, 187, 215]. При рассмотрении слабо определенных функций становится актуальным вопрос о выделении допустимых совокупностей переменных.

В работах [72, 74, 138] исследовались вопросы эффективности алгоритмов минимизации, использующие в качестве одного из этапов такие приемы как исключение несущественных переменных, выбор простых импликантов минимального ранга и другие приемы пошаговой оптимизации. Проведение исключения несущественных переменных в качестве одного из этапов алгоритма минимизации представляется на первый взгляд вполне естественным и целесообразным, особенно, если речь идет о минимизации не всюду определенных булевых функций, зависящих от большого числа переменных. В практике часто ставится вопрос о минимизации числа входов схемы. Однако Ю. И. Журавлевым [51] было отмечено, что уменьшение числа элементов исходной совокупности переменных не всюду определенной функции может привести к усложнению д. н. ф., получаемой в результате. В [138] этот эффект исследуется с количественной стороны — каким может быть максимальное значение отношения сложностей или длин двух тупиковых д. н. ф. не всюду определенной функции, одна из которых зависит лишь от части переменных второй тупиковой д. н. ф. Показано, что максимальное значение отношения сложностей и длин на множестве не всюду определенных функций $\widetilde{P}_n$ асимптотически равно 2^{n-1} и, соответственно, 2^{n-2} при $n \to \infty$. Таким образом, исключение фиктивных переменных может приводить к экспоненциальному усложнению результата. Для всюду определенных функций удаление или введение фиктивных переменных ничего не дает с точки зрения возможности упрощения д. н. ф., поскольку сокращенная и все тупиковые д. н. ф. не содержат несущественных переменных [51]. Для конкретных алгоритмов, которые предлагались в [40, 41, 122, 156], использующих в качестве одного из этапов операцию исключения несущественных переменных, на примере алгоритма Акерса [156] показано, что использование такой операции приводит к д. н. ф. экспоненциально отличающейся от кратчайшей, минимальной д. н. ф.

В [72] проводится анализ эффективности другого класса приближенных алгоритмов минимизации не всюду определенных булевых функций, описанных в работах [68, 95]. Общность этих алгоритмов минимизации заключается в том, что на некотором этапе в результирующую д. н. ф. включаются такие простые импликанты функции, которые имеют минимальный ранг. Показано, что д. н. ф., получаемые в результате применения этих алгоритмов, могут быть нетупиковыми и иметь экспоненциальную длину и сложность, несмотря на то, что некоторая конъюнкция реализует исходную функцию. В [74] рассматривались вопросы эффективности алгоритмов, описанных в работах [64, 95, 158], которые используют градиентный алгоритм как основной этап при минимизации булевой функции. В этой работе доказано, что в результате применения этих алгоритмов к некоторым не всюду определенным булевым функциям получается д. н. ф., которая отличается от L-минимальной д. н. ф., где L — любая линейная мера сложности д. н. ф., по порядку в n или n^2 раз, в зависимости от меры сложности L.

Работы [98, 99, 101, 102, 103, 130, 180] посвящены задаче минимизации систем булевых функций. В [101] показано, что эта задача сводится к задаче минимизации одной функции путем введения дополнительных переменных.

Дальнейшие сведения по инженерным методам минимизации можно получить в работах обзорного характера и монографиях [11, 25, 34, 64, 129, 184, 194].

Задача минимизации д. н. ф. сводится к различным комбинаторным задачам. Часто это обстоятельство используется при разработке методов минимизации. В работах [9, 123, 144] задача построения минимальных д. н. ф. сводится к различным задачам теории графов: к задаче нахождения кратчайшей цепи, к задаче о минимальной раскраске вершин графа и т. п.

Переформулировка задачи минимизации в терминах целочисленного линейного программирования используется в работах [82, 100] для упрощения д. н. ф.

Вероятностные оценки и результаты статистических экспериментов в минимизации даются в работах [107, 108, 115, 181, 182, 183].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К настоящему времени в теории д. н. ф. решены многие проблемы, поставленные еще в 50-х годах. Построены алгоритмы получения различных д. н. ф.: сокращенных, тупиковых, минимальных. Исследованы трудности универсальных подходов к решению задачи минимизации как на качественном уровне (теория локальных алгоритмов), так и на количественном (метрическая теория). Накоплен большой запас «модельных» функций и конструкций, позволяющих строить булевы функции и д. н. ф. с заданными свойствами. Развиты методы получения оценок параметров почти всех функций и функций с экстремальными значениями параметров. Следует отметить, что подавляющее число математических результатов по минимизации булевых функций получено в работах советских математиков.

В области минимизации имеется ряд трудных нерешенных проблем. К таким проблемам в области метрической теории относятся: получение асимптотик максимальной длины сокращенной д. н. ф., сложности минимальной д. н. ф. для почти всех функций, уточнение оценки максимального числа тупиковых д. н. ф., получение нетривиальной нижней оценки числа минимальных д. н. ф. для почти всех функций и некоторые другие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агибалов Г. П.*, Минимизация числа аргументов булевых функций. В сб. «Проблемы синтеза цифровых автоматов». М.: Наука, 1967, 96—100 (РЖМат, 1969, 3В253)
2. *Андон Ф. И.*, Алгоритм упрощения д. н. ф. булевых функций. Кибернетика. 1966, № 6, 12—14 (РЖМат, 1967, 10В258)
3. —, О реализации на ЭЦВМ *А*-алгоритмов. В сб. «Вопросы теоретической кибернетики». Киев, 1965, 49—54 (РЖМат, 1966, 5В198)
4. *Андреев А. Е.*, О синтезе дизъюнктивных нормальных форм, близких к минимальным. Докл. АН СССР, 1983, *269*, № 1, 11—15 (РЖМат, 1983, 8В642)
5. —, К проблеме минимизации дизъюнктивных нормальных форм. Докл. АН СССР, 1984, *274*, № 2, 265—269 (РЖМат, 1984, 5Г47)
6. —, Об одной модификации градиентного алгоритма. Вестн. МГУ. Мат. Мех., 1985, № 3, 29—35 (РЖМат, 1985, 9Г93)
7. *Асланян Л. А.*, О сложности сокращенной д. н. ф. не всюду определенных булевых функций алгебры логики. I. Уч. зап. Ереван. ун-т, Естеств. н., 1974, № 1 (125), 11—18 (РЖМат, 1974, 11В516)
8. —, О сложности сокращенной д. н. ф. не всюду определенных булевых функций алгебры логики. II. Уч. зап. Ереван. ун-т, Естеств. н., 1974, № 3 (127), 16—23 (РЖМат, 1975, 6В609)
9. *Баринов А. К.*, Минимизация переключательных функций с помощью графов. «Приборы и системы автоматики. Респ. межведомств. темат. науч.-техн. сб.», 1973, вып. 28, 34—46 (РЖМат, 1973, 12В463)
10. *Богомолов А. М.*, Методы минимизации булевых функций с использованием теории графов. К новым успехам советской науки. Тезисы и сообщения. Научные конференции. Донецк, 1966, 205—206 (РЖМат, 1967, 4В230)
11. *Быкова С. В.*, Система алгоритмов кратчайшего покрытия. Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та при Томск. ун-те, 1973, вып. 64, 3—11 (РЖМат, 1974, 8В411)
12. *Валигурски С.*, Алгоритмы упрощения булевых выражений на вычислительной машине. Тр. Межд. Симпоз. по теории релейных устройств и конечных автоматов. 1962. Синтез релейных структур. М.: 1965, 328—331 (РЖМат, 1966, 3В187)
13. *Васильев Ю. Л.*, К вопросу о числе тупиковых и минимальных д. н. ф. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 2. Новосибирск, 1964, 3—9 (РЖМат, 1965, 1В208)
14. —, О длине цикла в *n*-мерном единичном кубе. Докл. АН СССР, 1963, *148*, № 4, 753—756 (РЖМат, 1963, 7В283)
15. —, О сравнении сложности тупиковых и минимальных д. н. ф. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 10. М.: Наука, 1963, 5—61 (РЖМат, 1964, 8В250)

16. —, О «суперпозиции» сокращенных д. н. ф. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 12. М.: Наука, 1964, 239—242 (РЖМат, 1965, 7В128)
17. —, Трудности минимизации булевых функций на основе универсальных подходов. Докл. АН СССР, 1966, *171*, № 1, 13—16 (РЖМат, 1967, 4В224)
18. —, *Глаголев В. В.*, Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм. Сб. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974, 99—206 (РЖМат, 1975, 5В569)
19. —, *Коробков В. К.*, Метрические исследования в дискретном анализе. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 27. М.: Наука, 1973, 63—73 (РЖМат, 1974, 5В502)
20. *Вебер К.*, О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 36. М.: Наука, 1979, 129—158 (РЖМат, 1980, 5В549)
21. *Викулин А. П.*, Оценка числа конъюнкций в сокращенной д. н. ф. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 29. М.: Наука, 1974, 151—156 (РЖМат, 1975, 4В520)
22. *Войтишек В. В.*, Об одном подходе к классификации булевых функций. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 8. Новосибирск, 1966, 35—41 (РЖМат, 1967, 5В179)
23. *Войшвилло Е. К.*, Метод упрощения выражения функций истинности. Научн. докл. высш. школы. Филос. науки, 1958, № 2, 120—135 (РЖМат, 1959, 5461)
24. *Гаврилов М. А.*, Минимизация булевых функций, характеризующих релейные цепи. Автоматика и телемеханика, 1959, *20*, № 9, 1217—1238 (РЖМат, 1962, 1В240)
25. —, Современное состояние теории релейных устройств. Сб. Структурная теория релейных устройств. Изд. АН СССР, М., 1963, 5—73 (РЖМат, 1964, 8В263)
26. *Гаджиев М. М.*, Максимальная длина сокращенной д. н. ф. для булевых функций пяти и шести переменных. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 18, Новосибирск, 1971, 3—24 (РЖМат, 1972, 3В343)
27. *Глаголев В. В.*, Верхняя оценка длины цикла в n-мерном единичном кубе. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 6. Новосибирск, 1966, 3—7 (РЖМат, 1966, 11В194)
28. —, Верхняя оценка сложности минимальной д. н. ф. для почти всех функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 5. Новосибирск, 1965, 3—8 (РЖМат, 1966, 4В106)
29. —, Некоторые оценки д. н. ф. булевых функций алгебры логики. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 19. М.: Наука, 1967, 75—94 (РЖМат, 1968, 7В307)
30. —, О длине сокращенной д. н. ф. для булевых функций размерности 1. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 22, Новосибирск, 1973, 29—33 (РЖМат, 1973, 11В550)
31. —, О длине тупиковой д. н. ф. Мат. заметки, 1967, № 6, 665—672 (РЖМат, 1968, 7В305)
32. —, Оценка сложности сокращенной д. н. ф. для почти всех функций алгебры логики. Докл. АН СССР, 1964, *158*, № 4, 770—773 (РЖМат, 1965, 3В119)
33. —, Оценка снизу числа тупиковых д. н. ф. для почти всех функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 3. Новосибирск, 1964, 31—40 (РЖМат, 1967, 2В239)
34. *Глушков В. М.*, Синтез цифровых автоматов. М.: Физматгиз, 1962
35. *Городецкий В. И.*, *Бояр В. А.*, Метод минимизации булевых функций. Сб. Стабильность и надежность информационных устройств и систем. Киев: «Техника», 1975, 43—50 (РЖМат, 1976, 1В721)
36. *Григорьян Ю. Г.*, Арифметический метод минимизации булевых функций. Семинар «Теория автоматов», Киев, 1964

37. *Гуревич И. Б.*, О невычислимости в классе локальных алгоритмов некоторых предикатов, связанных с задачей минимизации булевых функций. Кибернетика, 1974, № 2, 24—30 (РЖМат, 1974, 11В513)
38. —, *Журавлев Ю. И.*, Минимизация булевых функций и эффективные алгоритмы распознавания. Кибернетика, 1974, № 3, 16—20 (РЖМат, 1974, 11В467)
39. *Даниленко П. Я.*, *Уменский В. В.*, Метод минимизации функции алгебры логики. Сообщ. АН ГрузССР, 1969, *54*, № 1, 45—48 (РЖМат, 1970, 11В357)
40. *Диденко В. П.*, Некоторые методы минимизации булевых функций. В сб. «Структурная теория релейных устройств». М.: АН СССР, 1963, 148—162 (РЖМат, 1964, 7В298)
41. —, *Покудин К. П.*, Минимизация булевых функций выделением метаядра. В сб. «Автомат. устройства учета и контроля». Вып. 6, Ижевск, 1970, 50—71 (РЖМат, 1971, 4В481)
42. *Евдокимов А. А.*, О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе. Мат. заметки, *6*, № 3, 1969 (РЖМат, 1970, 4В336)
43. *Егиазарян Э. В.*, Количественные характеристики систем уравнений с частичными булевыми функциями. Докл. АН АрмССР, 1979, *68*, № 2, 74—78 (РЖМат, 1979, 11В567)
44. *Журавлев Ю. И.*, Алгоритмы построения минимальных д. н. ф. для функции алгебры логики. В сб. «Дискретная математика и математические вопросы кибернетики». М.: Наука, 1974, 67—82 (РЖМат, 1975, 5В569)
45. —, Алгоритмы упрощения дизъюнктивных нормальных форм конечного индекса. Докл. АН СССР, 1961, *139*, № 6, 1329—1331 (РЖМат, 1963, 10В216)
46. —, Локальные алгоритмы вычисления информации. I. Кибернетика, 1965, № 1, 12—19 (РЖМат, 1967, 1В174)
47. —, Локальные алгоритмы вычисления информации. II. Кибернетика, 1966, № 2, 1—11 (РЖМат, 1967, 3В233)
48. —, Об алгоритмах выделения совокупностей существенных переменных не всюду определенных функций алгебры логики. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 11, М.: Наука, 1964, 271—275 (РЖМат, 1966, 2В230)
49. —, Об алгоритмах упрощения дизъюнктивных нормальных форм. Докл. АН СССР, 1960, *132*, № 2, 260—263 (РЖМат, 1961, 4А83)
50. —, Об одном классе не всюду определенных функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 2. Новосибирск, 1964, 23—27 (РЖМат, 1965, 2В331)
51. —, Об отделимости подмножеств вершин n-мерного единичного куба. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1958, *51*, 143—157 (РЖМат, 1959, 8890)
52. —, О невозможности построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики в одном классе алгоритмов. Докл. АН СССР, 1960, *132*, № 3, 504—506 (РЖМат, 1961, 4А84)
53. —, О несущественных переменных не всюду определенных функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 1. Новосибирск, 1963, 28—31 (РЖМат, 1964, 1В273)
54. —, Оценки для числа тупиковых дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики. Сиб. мат. ж., 1962, *3*, № 5, 802—804 (РЖМат, 1963, 9А82)
55. —, Оценки сложности алгоритмов построения минимальных д. н. ф. для функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 3. Новосибирск, 1964, 41—47 (РЖМат, 1966, 12В240)
56. —, Оценки сложности локальных алгоритмов для некоторых экстремальных задач на конечных множествах. Докл. АН СССР, 1964, 158, № 5, 1018—1021 (РЖМат, 1965, 2В123)
57. —, О различных понятиях минимальности д. н. ф. Сиб. мат. ж., 1960, *1*, № 4, 609—611 (РЖМат, 1961, 5А72)
58. —, Теоретико-множественные методы в алгебре логики. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 8. М., Физматгиз, 1962, 5—44 (РЖМат, 1963, 10В217)

59. —, *Коган А. Ю.*, Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи. Докл. АН СССР, 1985, *285*, № 4, 795—799 (РЖМат, 1986, 4Г66)
60. *Журавлева Л. А.*, О некоторых алгоритмах построения сокращенной д. н. ф. для функций алгебры логики от *n* переменных. В сб. «Некотор. вопр. автоматиз. программир.», Новосибирск: Наука, 1970, 109—124 (РЖМат, 1971, 3В352)
61. —, Построение сокращенной д. н. ф. методом Блека. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 10, Новосибирск, 1967, 23—38 (РЖМат, 1968, 3В298)
62. *Закревский А. Д.*, Логический синтез каскадных схем. М.: Наука, 1981, 414 с. (РЖМат, 1982, 1В888К)
63. —, К минимизации дизъюнктивных нормальных форм булевых функций. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 4, 102—104 (РЖМат, 1971, 1В381)
64. —, Алгоритмы синтеза дискретных автоматов. М.: Наука, 1971
65. —, Новые алгоритмы минимизации слабо определенных булевых функций. Кибернетика, 1969, № 5, 21—28 (РЖМат, 1970, 5В362)
66. —, О сокращении переборов при решении некоторых задач синтеза цифровых автоматов. Радиофизика, 1964, *7*, № 1, 166—174 (РЖМат, 1964, 8В246)
67. —, *Островский В. И.*, Оптимизация поиска кратчайшего покрытия. Сб. «Проблемы синтеза цифровых автоматов». 1967, М.: Наука, 84—95 (РЖМат, 1968, 7В301)
68. *Казаков В. Д.*, Минимизация логических функций большого числа переменных. Автоматика и телемеханика. 1962, *23*, № 9, 1237—1242 (РЖМат, 1963, 2В243)
69. —, Нахождение максимального числа простых импликантов произвольной логической функции *n* переменных. В сб. «Автомат. управление». М., АН СССР, 1960, 330—338 (РЖМат, 1962, 6А59)
70. —, Нахождение минимальных нормальных форм логической функции методом ограниченного перебора. В сб.: «Структурная теория релейных устройств». М., АН СССР, 1963, 145—147 (РЖМат, 1964, 11В196)
71. *Казначеев В. И., Муравьев Н. П., Муравьева Н. В.*, Аналитический метод минимизации булевых функций. Тр. НИИ гражд. авиации. 1973, вып. 83, 31—41 (РЖМат, 1973, 11В546)
72. *Караханян Л. М.*, Об эффективности выделения простых импликантов минимального ранга. В сб. «Комбинаторно-алгебр. методы в прикл. мат.», Горький, 1982, 66—75 (РЖМат, 1983, 5В643)
73. —, Относительная сложность однозначно определяемых д. н. ф. частичных функций алгебры логики. В сб.: «Оптимизация и управление». М.: МГУ, 1983, 85—97
74. —, Об относительной эффективности градиентного алгоритма минимизации частичных булевых функций. В сб.: «Мат. обеспеч. автоматиз. информационных систем», М.: МГУ, 1984, 97—116
75. —, Метрическое сравнение минимальных в различном смысле д. н. ф. частичных функций алгебры логики. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, 1982, № 38, 19—36 (РЖМат, 1983, 9В670)
76. —, *Сапоженко А. А.*, Оценки параметров не всюду определенных (частичных) функций алгебры логики. В сб. «Комбинаторно-алгебраич. методы в прикл. мат.» Горький, 1979, 48—56 (РЖМат, 1980, 9А77)
77. *Коршунов А. Д.*, Верхняя оценка сложности кратчайших д. н. ф. для почти всех булевых функций. Кибернетика, № 6, 1969, 1—8 (РЖМат, 1970, 11В323)
78. —, Сравнение сложности длиннейших и кратчайших д. н. ф. и нижняя оценка числа тупиковых д. н. ф. для почти всех булевых функций. Кибернетика, 1969, № 4, 1—11 (РЖМат, 1970, 3В355)
79. —, О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм булевых функций. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, 1981, № 37, 9—41 (РЖМат, 1982, 10В586)

80. —, О сложности кратчайших дизъюнктивных нормальных форм случайных булевых функций. Сб. тр. Ин-т СО АН СССР, 1983, № 40, 25—53 (РЖМат, 1984, 8Г40)
81. *Коспанов Э. Ш.*, О произведении кратчайших д. н. ф. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 18. Новосибирск, 1971, 35—40 (РЖМат, 1972, 3В342)
82. *Краковская О. С., Майстрова Т. Л.*, Об одном способе минимизации нормальных форм булевых функций. В сб. «Формальная логика и методология науки». М., 1964, 269—300 (РЖМат, 1965, 3В111)
83. *Кузнецов С. Е.*, О нижней оценке длины кратчайшей д. н. ф. почти всех булевых функций. Вероятност. методы и кибернет. (Казань), 1983, № 19, 44—47 (РЖМат, 1983, 8В643)
84. *Кук С. А.*, Сложность процедур вывода теорем. Кибернет. сб. (новая серия), 1975, № 12, 5—15 (РЖМат, 1974, 3В888)
85. *Левин А. А.*, Об относительной сложности сокращенной д. н. ф. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 15, Новосибирск, 1969, 25—34 (РЖМат, 1970, 11В329)
86. —, Об отношении сложности д. н. ф. функции к сложности д. н. ф. ее отрицания. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 16, Новосибирск, 1970, 77—81 (РЖМат, 1971, 5В462)
87. —, Сложность д. н. ф. суммы тупиковых относительно д. н. ф. суммы минимальных. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 24, Новосибирск, 1974, 50—68 (РЖМат, 1975, 2В598)
88. —, Сравнительная сложность д. н. ф. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, 1981, № 36, 23—38 (РЖМат, 1981, 12В961)
89. —, Склейка булевых функций и ее применение при оценках сравнительной сложности ДНФ. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, Новосибирск, 1983, № 40, 54—71 (РЖМат, 1984, 8Г39)
90. *Лин Син-Лян*, О сравнении сложностей минимальных и кратчайших дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. В сб.: «Пробл. кибернетики», Вып. 18. М.: Наука, 1967, 11—44 (РЖМат, 1967, 12В297)
91. *Лосев Г. Ф.*, Наилучший локальный алгоритм индекса 1 для построения суммы тупиковых д. н. ф. булевой функции. Докл. АН СССР, 1973, *212*, № 4, 816—817 (РЖМат, 1974, 3В419)
92. —, Наилучший локальный алгоритм для построения суммы тупиковых д. н. ф. булевой функции, использующий окрестности минимального порядка. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, *14*, № 2, 470—478 (РЖМат, 1974, 10В414)
93. —, Условно-мажорантные локальные алгоритмы с произвольной памятью для задач синтеза минимальных покрытий. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, *14*, № 3, 744—745 (РЖМат, 1974, 10В477)
94. *Лосев И. Р.*, Минимизация слабоопределенных булевых функций на основе выделения семейств наборов. В сб. «Автомат. устройства учета и контроля». Вып. 6. Ижевск, 1970, 3—10 (РЖМат, 1971, 4В479)
95. —, *Тептин Ю. Л.*, О некоторых алгоритмах минимизации слабоопределенных булевых функций. В сб. «Автомат. устройства учета и контроля». Вып. 6. Ижевск, 1970, 32—49 (РЖМат, 1971, 4В478)
96. *Лупанов О. Б.*, О реализации функций алгебры логики формулами конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе «И», «ИЛИ», «НЕ». В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 6. М.: Физматгиз, 1961, 5—14 (РЖМат, 1962, 5В321)
97. —, О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. Проблемы кибернетики, вып. 10, М.: Физматгиз, 1963, 63—97 (РЖМат, 1964, 7В280)
98. *Любченко Г. Г., Подлипенский В. С.*, Алгоритмы минимизации многоместных переключательных функций. В сб. «Средства автоматиз. передачи и обраб. информ.». Киев; «Техника», 1974, 35—43 (РЖМат, 1975, 5В617)

99. —, —, Метод нахождения минимальных нормальных форм функций алгебры логики. Вестник Киев. политех. ин-та. Сер. автоматика и электроприборостр., 1974, № 11, 184—189 (РЖМат, 1974, 10В480)
100. *Майстрова Т. Л.*, Линейное программирование и задача минимизации нормальных форм булевых функций. В сб.: «Пробл. передачи информ.» Вып. 12. М.: АН СССР, 1962, 5—15 (РЖМат, 1963, 10В218)
101. *Макаренков С. В.*, Совместная минимизация булевых функций в классе решетчатых д. н. ф. с помощью частотной матрицы отношений. В сб. «Экон.-мат. методы и программир. план. — эконом. задач». М., 1972, 40—48 (РЖМат, 1973, 1В627)
102. *Марковский А. В.*, Минимизация систем булевых функций в классе д. н. ф. В сб. «Абстрактн. и структур. теория релейных устройств». М.: Наука, 1972, 167—181 (РЖМат, 1973, 1В620)
103. —, Приближенная минимизация систем слабоопределенных булевых функций в классе д. н. ф. Информ. материалы. Научный совет по комплекс. пробл. «Кибернетика» АН СССР. 1971, № 7 (54), 115—116 (РЖМат, 1972, 5В348)
104. *Мацюлявичус С. П.*, Матричный метод минимизации булевых функций. В сб. «Вопр. синтеза логики ЦВМ». Ч. 1. Вильнюс, 1974, 86—91 (РЖМат, 1974, 11В517)
105. *Медведев С. С.*, Восьмеричные карты для минимизации булевых функций. Теория автоматов. Семинар. Вып. 1. Киев, 1966, 54—69 (РЖМат, 1967, 11В280)
106. *Михеева Л., Салум Х.*, Построение сокращенной д. н. ф. методом масок. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат., 1969, *18*, № 4, 458—460 (РЖМат, 1970, 6В417)
107. *Можаров Р. В.*, О статистическом исследовании минимизации булевых функций. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 5. Новосибирск, 1965, 31—33 (РЖМат, 1966, 3В202)
108. —, Исследование минимизации случайных булевых функций. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. транспорта. Вып. 209, 1965, 182—183 (РЖМат, 1966, 9В162)
109. *Нгуен Ким Ань.*, О некоторых характеристиках алгоритмов минимизации булевых функций. Докл. АН СССР, 1982, *267*, № 5, 1058—1062 (РЖМат, 1983, 9В671)
110. *Нигматуллин Р. Г.*, Вариационный принцип в алгебре логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 10. Новосибирск, 1967, 69—89 (РЖМат, 1968, 4В290)
111. —, Метод наискорейшего спуска в задачах на покрытие. В сб. «Вопросы точности и эффективности алгоритмов (Тр. симпозиума)». Киев, 1969, вып. 5, 116—126 (РЖМат, 1970, 4В384)
112. —, О вариации сложности кратчайшей дизъюнктивной нормальной формы на единичной сфере. В сб. «Дискретный анализ». Мып. 6. Новосибирск, 1966, 69—80 (РЖМат, 1966, 11В193)
113. —, Метод последовательного упрощения булевой функции. Тезисы укр. республ. конф. молодых исследователей по теоретической кибернетики. Киев, 1965, 27—39
114. *Новоселов В. Г.*, Минимизация булевых функций (обзор). В сб. «Итоги исследований по кибернетике». Томск, 1968, 40—60 (РЖМат, 1969, 8В243)
115. —, Статистические оценки эффективности методов минимизации булевых функций. В сб. «Автоматы, гибридн. и управляющ. машины». М.: Наука, 1972, 96—104 (РЖМат, 1972, 7В387)
116. *Нурлыбаев А. Н.*, Об упрощении нормальных форм *к*-значной логики. Сб. работ по математической кибернетике. Вып. 1. 1976, ВЦ АН СССР, 56—68 (РЖМат, 1976, 3В524)
117. *Орлов В. А.*, Алгоритмическая неразрешимость задачи нахождения асимптотического поведения функции Шеннона при реализации ограниченно детерминированных операторов схемами в произвольном базисе. Докл. АН СССР, 1971, *196*, № 5, 1036—1039 (РЖМат, 1971, 7В560)

118. *Пастухов А. В.*, О минимизации булевых функций декодированием. В сб. «Вопр. вычисл. техн.». М., 1969, 45—54 (РЖМат, 1971, 10В264)
119. *Пашев С.*, Един метод за минимизация на булева функции при синтеза цифрови устройства. Физ.-мат. списание, 1964, 7, № 2, 134—143 (РЖМат, 1965, 8В133)
120. *Перчеклий И. И.*, Нахождение простых импликант, входящих в некоторые минимальные д. н. ф. недоопределенных булевых функций. В сб. «Материалы докл. V Научно-техн. конференции Кишиневского политехн. ин-та, Кишинев, 1969, 237—238 (РЖМат, 1970, 12В372)
121. —, Полиномиальная разрешимость некоторых алгоритмических проблем, касающихся д. н. ф. Тезисы докладов 3-ей Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1974, 115—116 (РЖМат, 1974, 12А64)
122. *Першеев В. Г.*, Минимизация булевых функций большого числа переменных. Тр. Моск. ин-та ж.-д. трансп., 1970, вып. 367, 293—299 (РЖМат, 1971, 4В480)
123. *Петренко А. Ф., Фрицнович Г. Ф.*, Построение кратчайших тупиковых д. н. ф. булевых функций. В сб. «Дискретные системы. Т. 1». Рига: «Зинатне», 1974, 193—204 (РЖМат, 1975, 4В519)
124. *Поваров Г. Н.*, К математической теории синтеза контактных (1, *к*)-полюсников. Докл. АН СССР, 1956, *111*, № 1, 102—104 (РЖМат, 1957, 3858)
125. —, Метод минимизации булевых функций. Изв. АН СССР Техн. кибернетика, 1982, № 4, 198—201 (РЖМат, 1982, 12В722)
126. *Попов В. А., Мокляк Н. Г., Скибенко И. Т.*, Об одном методе минимизации булевых функций. Самолетостр. Техн. возд. флота. Респ. межвед. темат. научн.-техн. сб., 1974, вып. 33, 34—39 (РЖМат, 1974, 8В415)
127. *Порецкий П. С.*, О способе решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Собр. протоколов заседаний секции физ.-мат. наук Об-ва испытателей природы при Казанском университете. Т. 2, 1884
128. *Поспелов Д. А.*, Вопросы минимизации нормальных форм функций алгебры логики на современных вычислительных машинах дискретного действия. Тр. Междунар. симп. по теории рел. структур, М., 1965, 328—331 (РЖМат, 1966, 3В187)
129. —, Логические методы анализа и синтеза схем. Энергия, 1974
130. *Потепалов Ю. Н., Сазонов А. В.*, Минимизация системы слабоопределенных булевых функций в классе д. н. ф. В сб. «Мат. обеспеч. электронно-вычисл. машин». № 1, М., 1973, 116—119 (РЖМат, 1974, 6В547)
131. *Сапоженко А. А.*, Геометрическое строение почти всех функций алгебры логики. В сб. «Пробл. кибернетики», Вып. 30, М., Наука, 1975, 227—261 (РЖМат, 1975, 9В383)
132. —, Дизъюнктивные нормальные формы. Метрическая теория. Спецкурс. Изд-во МГУ, 1975
133. —, Метрические свойства почти всех функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ» Вып. 10. Новосибирск, 1967, 91—119 (РЖМат, 1968, 4В291)
134. —, О наибольшей длине тупиковой дизъюнктивной нормальной формы у почти всех булевых функций. Мат. заметки, 1968, *4*, № 6, 649—658 (РЖМат, 1969, 7В270)
135. —, О сложности дизъюнктивных нормальных форм, получаемых с помощью градиентного алгоритма. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 21. Новосибирск, 1972, 62—71 (РЖМат, 1973, 6В427)
136. —, О числе классов функций алгебры логики. В сб. «Дискретный анализ». Вып. 9. Новосибирск, 1967, 59—66 (РЖМат, 1967, 8В232)
137. —, Оценка длины и числа тупиковых д. н. ф. для почти всех не всюду определенных функций. Мат. заметки, 1980, *28*, № 2, 279—300 (РЖМат, 1980, 11В605)

138. —, *Караханян Л. М.,* Об отрицательных эффектах, связанных с исключением несущественных переменных. Автомат. и вычисл. техн., 1981 № 3, 28—35 (РЖМат, 1981, 10В631)
139. *Страздинь И. Э.,* Афинная классификация булевых функций пяти переменных. Автомат. и вычисл. техн., 1975, № 1, 1—9 (РЖМат, 1975, 7В490)
140. —, *Страздиня Д. П.,* О возможности укрупнения гарвардской классификации булевых функций. В сб. «Теория конеч. автоматов и ее прил.» Вып. 2. Рига: «Зинатне», 1973, 24—30 (РЖМат, 1974, 7В604)
141. *Томан Э.,* Геометрическое строение случайных булевых функций. В сб. «Пробл. кибернет.». Вып. 35. М.: Наука, 1979, 111—132 (РЖМат, 1979, 6В431)
142. *Чегис И. А., Яблонский С. В.,* Логические способы контроля работы электрических схем. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1958, *51*, 270—360 (РЖМат, 1959, 10905)
143. Чернышев Ю. О., Насекин В. Я., К решению задач о покрытии градиентным алгоритмом. Кибернетика, 1976, № 4, 85—88 РЖМат, 1976, 2В421)
144. —, —, Сведение задачи выбора максимальных интервалов к нахождению кратчайшего пути. Изв. высш. уч. заведений. Электромеханика, 1974, № 3, 235—238 (РЖМат, 1975, 1В640)
145. *Чухров И. П.,* Оценки числовых характеристик поясковых функций. 5-я Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибнернетики. Тезисы докладов. Новосибирск, 1980, 179—180
146. —, Оценки числа минимальных дизъюнктивных нормальных форм для поясковой функции. I. Сб. тр. Ин-т мат. СО АН СССР, 1981, № 36 74—92 (РЖМат, 1981, 12В962)
147. —, О числе тупиковых дизъюнктивных нормальных форм. Докл. АН СССР, 1982, *262*, № 6, 1329—1332 (РЖМат, 1982, 6В758)
148. —, О числе минимальных дизъюнктивных нормальных форм. Докл. АН СССР, 1984, *276*, № 6, 1335—1339 (РЖМат, 1984, 10Г34)
149. *Шимко Н. А.,* Об оценке сложности тупиковых д. н. ф. В сб. «Проблемы кибернетики». Вып. 19. М., Наука, 1967, 311—315 (РЖМат, 1968, 7В300)
150. *Яблонский С. В.,* О невозможности элиминации перебора всех функций из P_2 при решении некоторых задач теории схем. Докл. АН СССР, 1959, *124*, № 1, 44—47 (РЖМат, 1960, 8705)
151. —, К вопросу об оценке длины тупиковых д. н. ф. В сб. «Проблемы кибернетики». Вып. 7. М., 1962, 229—232
152. —, Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем. В сб.: «Пробл. кибернетики». Вып. 2. М., 1959, 75—121 (РЖМат, 1961, 5А299)
153. —, Функциональные построения в k-значной логике. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1958, *51*, 5—142 (РЖМат, 1959, 9704)
154. — *Чегис И. А.,* О тестах для электрических схем. Успехи мат. наук, 1955, *10*, № 4, 182—184 (РЖМат, 1956, 5143)
155. *Aiken H. H.* and staff of the Computation laboratory, Harvard Univ., Synthesis of electronic computing and control circuits. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951
156. *Akers S. B.,* A truth table method for the synthesis of combinational logic. IRE Trans. Electronic Comput., 1961, *10*, № 4, 604—615 (РЖМат, 1963, 11В287)
157. *Blake A.,* Canonical expression in Boolean algebra. Dissertation, Chicago, 1937
158. *Bowman P. M., McVey E. S.,* A method for the last approximate solution of large prime implicant charts. IEEE Trans. Comput. 1970, *19*, № 2, 169—173 (РЖМат, 1970, 11В325)
159. *Burwick H.* Erregung der irredundanten Normalformenaussagen logischer Ausdrücke. Electron Rechenanlag., 1963, *5*, № 3, 108—117 (РЖМат, 1965, 10В173)

160. *Centkowsky G.*, Minimizacia form boolowskich metoda liezb strukturalnych. Pr. nauk. P. Wars., 1975, № 19, 47—63 (РЖМат, 1976, 2В581)
161. *Chandra A. K.*, *Markowsky G.*, On the number of prime implicants. Discrete Math., 1978, *24*, № 1, 7—11 (РЖМат, 1979, 4В457)
162. *Chang D. M.*, *Mott T. N.*, Computing irredundant normal forms from abbreviated presence functions. IEEE Trans., EC—14, № 3, 1965 (РЖМат, 1966, 4В186)
163. *Choudhury A. K.*, *Basu M. S.*, A mechanized chart for simplification of switching functions. IRE Trans. Electronic Comput., 1962, *11*, № 5, 713—714 (РЖМат, 1963, 7В284)
164. —, —, On the minimization of Boolean functions. Indian. J. Phys., 1962, *36*, № 1, 1—12 (РЖМат, 1963, 11В247)
165. —, *Das S. R.*, Direct determination of all the minimal prime implicant covers of switching functions. I. Electr. Contr., 1964, v. 17, № 5, 553—576 (РЖМат, 1965, 9В143)
166. *Chu J. T.*, Some methods for simplifying switching circuits using «don't care» conditions. J. Assoc. Comput. Machinery, 1961, *8*, № 4, 497—512 (РЖМат, 1963, 5В306)
167. *Das S. R.*, *Choudhury A. K.*, Maxterm type expressions of switching functions and their prime implicants. IEEE Trans. on EC, 1965, EC—14, № 6, 920—923 (РЖМат, 1967, 1В221)
168. —, —, *Roy K. K.*, Symplification of switching functions, involving a very large number of don't care states. Intern. J. Control, 1966, *3*, № 1, 17—18 (РЖМат, 1967, 12В299)
169. *Dunham B.*, *Fridshal R.*, The problem of simplifying logical expressions. J. Symbol. Log., 1959, *24*, № 1, 17—19 (РЖМат, 1961, 2А44)
170. *Even S.*, On correspondence between simplest disjunctive and conjunctive forms and simplest stroke and dagger functions. IRE Trans. Circuit Theory, 1961, v. CT—8, № 4, 489 (РЖМат, 1964, 7В295)
171. *Gazala M. J.*, Irredundant disjunctive and conjunctive forms of a Boolean function. IBM J. Res. Dev., 1957, *1*, № 2, 171—176
172. *Gimpel J.*, A reduction technique for prime implicant tables. IEEE Trans., 1965, EC—14, № 4, 534—541 (РЖМат, 1966, 6В151)
173. *Hockney R.*, An intersection algorithm diving all irredundant normal forms from a prime implicant list. IRE Trans. Electronic Comput., 1962, *11*, № 2, 289—290 (РЖМат, 1963, 12В399)
174. *Hwa H. R.*, A method for generating prime implicants of a boolean expressions. IEEE Trans., 1974, EC—23, № 6, 637—641 (РЖМат, 1975, 1В643)
175. *Jakobschuk A.*, Graphical simplification of switching functions with more than four variables. Electr. Letters, 1969, № 22, 566 (РЖМат, 1970, 5В365)
176. *Karnaugh M.*, The map method for synthesis of combinational logic circuits. Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, *72*, № 1, 593—599 (РЖМат, 1955, 3442)
177. *Klahn J. B.*, *Roth C. H.*, Evaluation of Akers method for simplification of switching functions. IEEE Trans., 1969, EC—18, № 10, 959—960 (РЖМат, 1970, 5В367)
178. *Kudielka V.*, Ein Verfahren zur Ermittlung aller nicht redundanten zweistufigen Darstellungen einer logischen Function. Electron. Rechenanlag., 1963, *5*, № 1, 11—21 (РЖМат, 1964, 9В136)
179. *McCluskey E. J., Jr.*, Minimization of Boolean functions. Bell Syst. Techn. J., 1956, *35*, № 6, 1417—1444 (РЖМат, 1958, 2782)
180. —, *Schorr H.*, Essential multiple-output prime implicants. Microwave Res. Inst. Symp. ser. 12, 1962, 437—457 (РЖМат, 1965, 1В215)
181. *Mileto F.*, *Putzolu G.*, Average values of quantities appearing in Boolean function minimization. IEEE Trans., 1964, EC—13, № 2, 87—92 (РЖМат, 1964, 12В231)
182. —, —, Average values of quantities appearing in multiple-output Boolean minimization. IEEE Trans., 1965, EC—14, № 4, 542—552 (РЖМат, 1967, 1В205)

183. —, —, Statistical complexity of algorithms for Boolean function minimization. J. ACM, *12*, № 3, 364—375 (РЖМат, 1966, 6В152)
184. *Morreale E.*, Partitioned list algorithms for prime implicant determination from canonical forms. IEEE Trans. 1967, EC—16, № 5, 611—620 (РЖМат, 1969, 5В358)
185. —, Rekursive operators for prime implicant and irredundant normal form determination. IEEE Trans., 1970, EC—19, № 6, 504—509 (РЖМат, 1971, 3А73)
186. *Mott T. H.*, Determination of the irredundant normal forms of a truth function by itterated consensus of the prime implicants. IRE Trans. Electronic Comput., 1960, *9*, № 2, 245—252 (РЖМат, 1962, 12В267)
187. —, An algorithm for determining minimal forms of an incomplete truth function. Commun. and Electron., 1961, № 53, 73—76 (РЖМат, 1963, 12В405)
188. —, *Carrol C. C.*, Numerical procedures for Boolean function minimization. IEEE Trans., 1964, EC—13, № 4, 470—471 (РЖМат, 1966, 1В227)
189. *Mukherjee T., Sarkar P. K.*, On a method of finding the irredundant forms of a Boolean functions. J. Electron. and Control, 1963, *14*, № 5, 563—580 (РЖМат, 1964, 1В276)
190. *Mukhopadhyay A.*, A method of determination of all the minimal forms of Boolean functions. Proc. Inst. Electr. Engrs, 1961, *C*, № 487E, 6 pp. (РЖМат, 1962, 11В245)
191. —, A method of determination of all the minimal forms of Boolean functions. Proc. Instr Electr. Engrs, 1962, *C109*, № 15, 250—255 (РЖМат, 1962, 11В246)
192. *Nelson R. J.*, Simplest normal truth functions. J. Symbol. Log., 1955, *20*, № 2, 105—108 (РЖМат, 1957, 2841)
193. *Papp B.*, Procede pour determiner les formes normales minimales des fonctions booleenes en utilisant les regles de minimization de la fonction de cout. Acta cybern., 1972, *1*, № 4, 241—250 (РЖМат, 1973, 6В433)
194. *Pasztor-Varga K.*, On some minimizing algorithm of Boolean functions. Acta techn. acad. sci. hung., 1972, *73*, № 3—4, 349—362 (РЖМат, 1973, 6В432)
195. *Petrick S. R.*, A direct determination the irredundant forms of a Booleanfunction from the selot prime implicans. AFCR 56—10, 1956
196. *Pyne I. B., McCluskey E. J.*, The reduction of redundancy in solving prime implicant tables. IRE Trans. Electronic Comput., 1962, *11*, № 3, 473—482 (РЖМат, 1963, 5В308)
197. *Quine W. V.*, A way to simplify truth functions. Amer. Math. Mon., 1955, *62*, № 9, 627—631 (РЖМат, 1956, 8533)
198. —, The problem of simplifying truth functions. Amer. Math. Mon., 1952, *59*, 521—531
199. —, On cores and prime implicants of truth functions. Amer. Math. Mon., 1959, *66*, № 9, 755—760 (РЖМат, 1961, 5А71)
200. *Samson E. W., Calabi L.*, On the theory of Boolean formulas: minimal including sums. I. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, *11*, № 2, 212—223 (РЖМат, 1964, 5В269)
201. —, —, On the theory of Boolean formulas: minimal including sums. II. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1963, *11*, № 2, 224—234 (РЖМат, 1964, 5В269)
202. *Spencer J.*, Asymptotically good coverings. Pacif. J. Math., 1985, *118*, № 2, 575—586 (РЖМат, 1986, 3В684)
203. *Svoboda A.*, Graphico-mechanical aids for the synthesis of relay circuits. Ber. Intern. Math.-Kolloq., 1955 (1957), 43—50 (РЖМат, 1958, 2780)
204. —, Ordering of implicants. IEEE Trans., 1967, EC—16, № 1, 100—105 (РЖМат, 1968, 6В337)
205. *Troye N. C.* Classification and minimization of switching functions. Philips Res. Repts, 1959, *14*, № 2, 151—193; № 3, 250—292 (РЖМат, 1962, 2В342)

206. *Urbano R. H., Mueller R. K.*, A topological method for the determination of the minimal forms of a Boolean function. IRE Trans. Electronic Comput., 1956, *5*, № 3, 126—132 (РЖМат, 1958, 1060)
207. *Veitch E. W.*, A chart method for simplifying truth functions. Proc. Assoc. Comp. Machinery, 1952, 127—133
208. *Waligorsky S.*, Calculation of prime implicants of truth functions. Algorithmy, 1963, *1*, № 2, 127—133 (РЖМат, 1965, 1В216)
209. —, Calculation of the Quine's table for truth functions. Prace ZAM PAN, 1961, *A2*, № 15, 5 pp. (РЖМат, 1963, 11В289)
210. *Weber K.*, The length of random Boolean functions. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1982, *18*, № 12, 659—668 (РЖМат, 1983, 10В463)
211. —, Subcubes of random Boolean functions. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 7—8, 365—374 (РЖМат, 1984, 7В8)
212. —, Prime implicants random Boolean functions. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 9, 449—458 (РЖМат, 1984, 5В287)
213. —, Irredundant disjunctive normal forms of random Boolean functions. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 10—11, 529—534
214. —, *Klipps B.*, Boolean functions of maximum length and Sperner type conditions about the set of faces of the *n*-cube. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1983, *19*, № 3, 187—193 (РЖМат, 1983, 11В560)
215. *Weitrsch F.*, Minimalisierung einiger Verknupfungsklassen der logischen Algebra. Arch. elektr. Übertrag., 1963, *17*, № 10, 453—460 (РЖМат, 1964, 4В239)
216. *Zander H. J.*, Zur Minimizierung von partiellen Booleschen Funktionen bei gegebener nichtkanonischer Normalform. Electron. Informationsverarb. und Kybernet., 1973, *9*, №1—2, 67—79 (РЖМат, 1974, 4В409)
217. —, *Wagner W.*, Methode zur Berechnung der Primkonjunktionen unvollständig bestimmter Boolescher Funktionen. Electron. Informationsverarb. und Kybernet., 1972, *8*, 2—3, 115—127 (РЖМат, 1973 2В385)