A. A. Borichev, A. L. Vol'berg, Uniqueness theorems for almost analytic functions,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 1, 146–177

А. А. Боричев, А. Л. Вольберг

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОЧТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе изучаются классы почти аналитических функций в единичном круге, т. е. классы функций, подчиненных неравенству $|\bar\partial f(z)| \leqslant C_f w(1-|z|)$, где $\int\limits_0 \log\log w(x)^{-1}\,dx = \infty$. Для таких функций, удовлетворяющих к тому же ограничению на рост $|f(z)| \leqslant w(A(1-|z|))^{-1}$, доказывается (теорема 5.2) аналог теоремы Лузина—Привалова: не существует ненулевой функции, имеющей нулевые угловые граничные значения на подмножестве единичной окружности положительной меры. Рассматриваются также вопросы факторизации (§ 6) почти аналитических функций, суммируемости логарифма модуля их граничных значений (§ 5), а также роль условий регулярности роста функции w (§ 7).

Для непрерывной функции f на границе $\mathbb{T}$ единичного круга $\mathbb{D}$, имеющей ряд Фурье вида $f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat f(n) e^{in\theta}$, справедливы следующие теоремы единственности:

(а) $f=0$ на дуге I, $I \subset \mathbb{T}$, $\Rightarrow f \equiv 0$;

(б) $f=0$ на множестве положительной меры на $\mathbb{T} \Rightarrow f \equiv 0$;

(в) $\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\theta)|\,d\theta = -\infty \Rightarrow f \equiv 0$.

Такая функция может быть продолжена до аналитической в $\mathbb{D}$ функции f, и (а), (б), (в) превращаются в основные теоремы единственности теории аналитических функций. Ясно, что (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а), а (в) является следствием субгармоничности функции $\log|f|$ для аналитической f:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f|\,d\theta \geqslant \log|f(0)|.$$

(Это неравенство называется неравенством Йенсена [10]).

Теоремы единственности можно доказывать не только для аналитических в $\mathbb{D}$ функций, непрерывных вплоть до $\mathbb{T}$.

С одной стороны, можно ослабить «граничные» условия, требуя по-прежнему аналитичности. Наиболее известный результат — аналог (б) — теорема Лузина—Привалова [10, 13]: аналитическая в $\mathbb{D}$ функция, имеющая нулевые угловые граничные значения (см. [13]) на множестве положительной меры на $\mathbb{T}$, тождественно равна нулю.

С другой стороны, утверждения (а), (б), (в) остаются справедливыми не только для аналитических функций, но и для тех функций f, у которых коэффициенты Фурье $\hat f(-n)$, $n>0$, убывают достаточно быстро.

Ключевые слова: почти аналитические функции, теоремы единственности, суммируемость логарифма модуля.

Первые такие результаты были получены Н. Левинсоном и М. Картрайт (аналог (а)) [19, 23, 24] и А. Бёрлингом (аналог (б)). (Бёрлинг опубликовал свою работу лишь в 1961 г. в [14]).

Аналог утверждения (в) был получен в [3, 4].

Дальнейшее обсуждение теоремы о суммируемости логарифма см. в работах [21, 17] и в недавно вышедшей книге [22].

Основная цель данной работы — обобщение вышеупомянутых теорем единственности сразу в обоих направлениях. А именно для «функций» вида $f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ таких, что последовательность $\{|\hat{f}(n)|\}_{n \geqslant 0}$ возрастает, $\{|\hat{f}(-n)|\}_{n \geqslant 0}$ быстро убывает, будут доказаны (соответствующим образом интерпретированные) утверждения вида (а), (б), (в).

Такого рода постановки вызваны к жизни некоторыми задачами спектрального синтеза и теории полиномиальной аппроксимации (см. § 1).

Важно отметить, что, если результаты работ [14, 19, 23, 24] получались с использованием различных методов, в данной работе предложен вариант единого подхода. В общих чертах идея такого подхода заключается в следующем. Сначала мы продолжаем, используя конструкцию Дынькина [8], функцию $f_- \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n<0} \hat{f}(n) e^{in\theta}$ до функции F в $\mathbb{D}$ такой, что

$$\int^{1} \log \log \left(\max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\bar{\partial} F(re^{i\theta})| \right)^{-1} dr = +\infty. \qquad (*)$$

Затем рассматривается следующая функция Φ в круге

$$\Phi(re^{i\theta}) = f_+(re^{i\theta}) + F(re^{i\theta}) = \sum_{n \geqslant 0} \hat{f}(n) r^n e^{in\theta} + F(re^{i\theta})$$

и исследуется ее «множество малых значений»

$$\{re^{i\theta} : |\Phi(re^{i\theta})| \leqslant |\bar{\partial}\Phi(re^{i\theta})|\}.$$

Решающим для доказательства теорем единственности оказывается тот факт, что это множество достаточно «редкое» вблизи $\mathbb{T}$ при условии $(*)$.

Предварительный вариант статьи опубликован в [16].

§ 1. Введение

В работе систематически изучаются классы «почти аналитических» функций в круге и в особенности теоремы единственности для таких классов.

Функцию f будем называть почти аналитической, если

$$|(\bar{\partial} f)(z)| \leqslant c_f w(1 - |z|), \quad \int_0 \log \log w(x)^{-1} dx = \infty.$$

Естественно рассматривать классы таких функций, как «малые возмущения» соответствующих классов аналитических функций.

Чтобы очертить круг вопросов, в которых эти классы естественно возникают и где получающиеся результаты находят приложение, начнем с классической теории квазианалитичности.

Теорему Данжуа—Карлемана [18] о вещественно квазианалитических (I) классах можно интерпретировать как некоторое утверждение о невозможности аналитического продолжения через дугу окружности $\mathbb{T}$.

Теорема. *Пусть* $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$; $g(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$, $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$,

$|a_n| \leqslant e^{-p(|n|)}$, *где* $\{p(n)\}_{n\geqslant 0}$ — *вогнутая последовательность такая, что* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{p(n)}{n^2}=\infty$.

Если g *продолжается до* f *через дугу окружности* $\mathbb{T}$, *то* $f=g=0$.

В этом утверждении f непрерывна вплоть до $\mathbb{T}$. Однако в работах Картрайт и Левинсона [23, 19, 24] было показано, что в действительности квазианалитическая ненулевая в $\hat{\mathbb{C}}\setminus\bar{\mathbb{D}}$ функция не может быть продолжена через дугу $\mathbb{T}$ в круг до ограниченной или даже до не очень быстро растущей функции $f\in A(\mathbb{D})$:

$$|f(z)|<v(1-|z|)^{-1},\quad v\uparrow,\quad \int\limits_0 \log\log v(x)^{-1}dx<\infty.^1$$

Встает естественный вопрос: возможно ли вообще такое продолжение, и если возможно, то при каком росте f?

Ответ на этот вопрос будет дан (до некоторой степени) в нашей статье. В следующем утверждении рассматриваются продолжения не только через дугу, но и с помощью угловых пределов через множество положительной меры.

Теорема 1.1. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz^n$, $z\in\mathbb{D}$; $g(z)=\sum\limits_{n<0}a_nz^n$, $z\in\hat{\mathbb{C}}\setminus\bar{\mathbb{D}}$, $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{\log|a_n|}{p(|n|)}=-\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{\log|a_n|}{p(n)}<+\infty$, *где* $\{p(n)\}_{n\geqslant 0}$ — *вогнутая последовательность*, $\sum n^{-2}p(n)=\infty$, *и* $\exists\varepsilon>0: n^{-\varepsilon}p(n)\uparrow$,

Если f *имеет на множестве положительной меры на* $\mathbb{T}$ *угловые граничные значения, совпадающие со значениями* g, *то* $f=g=0$.

Отметим, что это утверждение обобщает теорему Картрайт—Левинсона для достаточно регулярных $\{p(n)\}$ и v, поскольку очевидно, что

$$\left\{f(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n:\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|a_n|}{p(n)}<\infty\right\}=\left\{(f:\exists c,\ c_1,\ |f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))^{-1}\right\}.$$

Здесь вес w определяется по последовательности $\{p(n)\}$ с помощью преобразования Лежандра:

$$w(x)=\exp\left(-\sup_n(p(n)-nx)\right). \tag{1.1}$$

При этом (см. [15])

$$\sum_{n\geqslant 1}n^{-2}p(n)=\infty\Leftrightarrow\int\limits_0\log\log w(x)^{-1}dx=\infty. \tag{1.2}$$

Существенным элементом нашего метода является построенное Е. М. Дынькиным [7, 8] продолжение (квазианалитически) гладких во внешности круга функций до почти аналитических в круге.

Если имеется пара функций: одна — квазианалитическая в $\hat{\mathbb{C}}\setminus\bar{\mathbb{D}}$ и другая — растущая в $\mathbb{D}$, то первую можно продолжить в круг и сложить там со второй. В условиях теоремы 1.1 сумма будет лежать в пространстве Q,

$$Q=\{f:\exists c,\ c_1:|f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))^{-1},$$
$$\forall c\exists c_1:|\bar\partial f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))\}.$$

Каждый элемент f из Q допускает разложение

---

[1] $v(1-|z|)^{-1}=\dfrac{1}{v(1-|z|)}$.

$$f(z)=a_f(z)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}\,dm_2(\zeta)\overset{\mathrm{def}}{=}a_f(\zeta)+b_f(\zeta).$$

Здесь dm_2 — мера Лебега на плоскости.

Первое слагаемое в правой части есть функция, аналитическая в круге $\mathbb{D}$, второе — квазианалитически гладкая аналитическая во внешности круга функция. Множество всех $f\in Q$, которые при этом разложении порождают пару (0, 0), в точности совпадает с

$$J=\{f\in Q:\forall c\exists c_1:|f(z)|\leqslant c_1 w(c(1-|z|))\}.$$

Теорема 1.1 может быть переформулирована следующим образом: *если функция f, $f\in Q$, имеет угловые граничные значения на множестве положительной меры, равные нулю, то $f\in J$.*

Таким образом, этот результат является «почти аналитическим» обобщением теорем (а) и (б), сформулированных в самом начале статьи.

Теорема единственности для аналитических в круге функций, f, $g\in A(\mathbb{D})$, $f\cdot g=0\Rightarrow f=0$ или $g=0$, также допускает обобщение.

Теорема 1.2. *Если f, $g\in Q$, $f\cdot g\in J$, то либо f, либо g лежит в J, если w достаточно регулярна.*

Отметим, что (для достаточно регулярной w) Q есть алгебра относительно поточечного умножения, J — ее идеал и теорема 1.2 фактически утверждает, что алгебра Q/J не имеет делителей нуля.

Теоремы 1.1 и 1.2 доказываются в § 3.

Теорема (в) из начала статьи была обобщена А. Л. Вольбергом [3] на случай достаточно регулярного w и H^1-функции f.

Для быстро растущих функций f из Q уже не существует граничных значений на $\mathbb{T}$. Можно предложить два варианта обобщения (в):

$$\text{(в1)}\quad \lim_{r\to 1-0}\int\limits_{r\mathbb{T}}\log|f|\,dm=-\infty\Rightarrow f\in J,$$

$$\text{(в2)}\quad \lim_{r\to 1-0}\int\limits_{\mathbb{T}}\log|a_f(r\zeta)+b_f(\zeta)|\,dm=-\infty\Rightarrow f\in J. \tag{1.3}$$

При правильной интерпретации пределов оба эти утверждения верны (см. § 5, теоремы 5.1, 5.2, 5.5). Результаты § 3, 5 основываются на ряде утверждений, характеризующих редкость множеств малости функций f из $Q\setminus J$:

$$E_w(f)\overset{\mathrm{def}}{=}\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leqslant w(1-|z|)\},$$

устанавливаемых в § 2, 4.

При этом доказательства пересекаются с классической теорией квазианалитичности лишь по соотношению (1.2).

Теорема о факторизации, которой посвящен § 6 работы, утверждает, что (для достаточно регулярной w)

$$Q=Q_+\cdot Q_-+J,$$

где

$$Q_+=Q\cap A(\mathbb{D}),\quad Q_-=\{f\in Q:f(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}\,dm_2(\zeta)\}.$$

Из этого результата вытекают все теоремы единственности, сформулированные выше. В то же время доказательство теоремы о факторизации содержит все существенные шаги, встречающиеся в доказательствах теорем единственности.

В § 7 обсуждается точность (в различных смыслах) полученных результатов.

Интересным приложением теоремы 1.2 является доказательство возможности спектрального синтеза в некоторых пространствах последовательностей. Пусть

$$\mathfrak{A} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log|a_n|}{p(n)} < \infty, \quad \lim_{n\to-\infty} \frac{\log|a_n|}{p(|n|)} = -\infty \right\}, \tag{1.4}$$

где $\{p(n)\}_{n\geqslant 0}$ — вогнутая последовательность положительных чисел, $\sum n^{-2}p(n)=\infty$, $p(n)=o(n)$, $\exists\varepsilon>0 : n^{-\varepsilon}p(n)\uparrow$. В $\mathfrak{A}$ вводится естественная топология суммы проективного и индуктивного пределов.

Тогда $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ — сверточная алгебра. Из теоремы Хана—Банаха следует эквивалентность наличия нетривиальных замкнутых 2-инвариантных подпространств E оператора сдвига τ в $\mathfrak{A}$:

$$\tau E = E, \quad \tau\{a_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_{n+1}\}$$

и наличия делителей нуля в соответствующей алгебре Q/J.

Поскольку $\mathfrak{A}$ не содержит экспоненциально-полиномиальных последовательностей, отсутствие делителей нуля в Q/J эквивалентно выполнению в Q/J спектрального анализа-синтеза (см. [12]).

Теорема о факторизации (§ 6) играет важную роль при описании 1-инвариантных (право-инвариантных, $\tau E \underset{\neq}{\subset} E$, лево-инвариантных, $\tau^{-1}E \underset{\neq}{\subset} E$) подпространств пространства $\mathfrak{A}$. Подробнее об этом см. [1, 2].

Другим важным приложением результатов о почти аналитических функциях является проблема полиномиальной аппроксимации.

Если μ — конечная (положительная, борелевская) мера с компактным носителем на плоскости $\mathbb{C}$, то через $H^2(\mu)$ обозначаем замыкание полиномов от z в пространстве $L^2(\mu)$.

Обозначим $L_a^2(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mu)\cap A(\operatorname{int}(\operatorname{supp}\mu))$. Рассмотрим один специальный класс мер вида

$$d\mu = w(1-|z|)\,dm_2(z) + h(z)\,dm(z),$$

где h — неотрицательная функция на $\mathbb{T}$, $h\in L^1(dm)$.

В некоторых случаях можно получить простое описание пространства $H^2(\mu)$ для таких мер μ.

Предположим, что

$$x\log w(x)^{-1}\uparrow\infty, \quad x\downarrow 0, \quad \exists I : \int_I h^{-1}dm < \infty.$$

Т е о р е м а. *При этом условии на* w, h,

$$H^2(\mu) = L_a^2(w(1-|z|)\,dm_2(z)) \oplus L^2(hdm) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} \log h dm =$$

$$= -\infty \ \& \int_0 \log\log w(x)^{-1}dx = \infty.$$

Авторы хотели бы выразить благодарность Н. К. Никольскому и В. П. Хавину за полезные обсуждения.

§ 2. Множества малых значений почти аналитических функций

На протяжении этого параграфа мы будем рассматривать функции $f\in C^1(\mathbb{D})$ и веса w такие, что

$$|\bar\partial f(z)| \leqslant w(1-|z|), \quad w\uparrow, \quad \int_0 \log\log w(x)^{-1}dx = \infty, \tag{2.1}$$

и изучать их множества малых значений

$$E_w(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{z : |f(z)| \leqslant w(1-|z|)\}.$$

В качестве примера приведем утверждение из [4].

Теорема. *Если функция f ограничена, f и w удовлетворяют условиям* (2.1), $f \mid \mathbb{T} \neq 0$, *то множество $E_w(f)$ не может содержать кривой, выходящей на $\mathbb{T}$.*

Доказательство этого факта опиралось на теорему Картрайт—Левинсона. Здесь мы докажем ряд утверждений следующего вида: можно выделить такое подмножество $R_w \subset [0, 1]$, что если множество $r\mathbb{T} \cap E_w(f)$, $r \in R_w$ достаточно массивно (в том или ином смысле), то найдется такое число $R(r)$, что $R(r)\mathbb{T} \subset E_w(f)$; $R(r) \to 1$ при $r \to 1$. Тем самым получим, что при $f \notin J$ множества $r\mathbb{T} \cap E_w(f)$, $r \in R_w$, «малы».

Утверждения этого типа будем называть леммами о распространении.

Для дальнейших приложений важно отметить те случаи, когда в качестве R_w удается взять весь отрезок $[0, 1]$, его достаточно «густое» подмножество или когда приходится брать в качестве R_w всего лишь счетный набор точек $R_w = \{r_k\}$, $r_k \to 1$. (Характер множества R_w в наибольшей степени зависит от регулярности w).

Для доказательства первой леммы о распространении понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Существуют такие c_1, $c_2 > 0$, что для любых x, y, $h > 0$ таких, что $2x \leqslant y < c_1$, $h \leqslant y^4$, $A \subset (1-x)\mathbb{T}$, $|A| \geqslant 1/10$, если $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{1-x > |z| > 1-2y\}$, $B \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in (1-y)\mathbb{T} : \omega(z, A, \Omega) \geqslant h\}$, то $|B| - |A| \geqslant c_2 y \log \frac{1}{h}$ или $|B| = 1$.*

Доказательство. Пусть $I_1^x, I_2^x, \ldots, I_{1/y}^x$ — дуги длины y, составляющие окружность $(1-x)\mathbb{T}$. Назовем хорошими те дуги I_j^x, для которых $|I_j^x \cap A| \geqslant h^{1/2}$, а плохими — остальные.

Для соответствующих дуг $I_1^y, I_2^y, \ldots, I_{1/y}^y$ на окружности $(1-y)\mathbb{T}$ рассмотрим объемлющие их дуги $J_1^y, J_2^y, \ldots, J_{1/y}^y$ длины $(2c_3)^{-1} y \log 1/h$ (где c_3 будет выбрано позже).

Заметим, что если дуга I_y^x хорошая, то

$$\forall z \in J_j^y, \quad \omega(z, A, \Omega) \geqslant h. \tag{2.2}$$

Действительно,

$$\omega(z, A, \Omega) \geqslant \omega(z, A \cap I_j^x, \Omega) \geqslant \frac{1}{y} \int_{A \cap I_j^x} e^{-\frac{c_4}{y}|\arg z - \arg \zeta|} |d\zeta| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{y} |A \cap I_j^x| \cdot e^{-\frac{c_4}{y}|J_j^y|} = h$$

при $c_3 = c_4$; здесь c_4 — абсолютная константа из оценки гармонической меры. Осталось узнать, сколько имеется хороших дуг.

Оценим сверху число плохих дуг n:

$$1/10 \leqslant nh^{1/2} + (1/y - n)y \Rightarrow ny \leqslant 9/10 (1 + 2y).$$

Теперь может представиться два случая: либо все дуги хорошие, либо не все.

В первом случае $|B| = 1$.

Во втором случае

$$|B| = m\{z : \omega(z, A, \Omega) \geqslant h\} \geqslant \frac{1}{10} - \frac{9}{10} \cdot 2y + \frac{2}{c_3} y \log \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{10} + c_2 y \log \frac{1}{y}$$

при достаточно малых y, $y < c_1$. ●

Замечание. Фактически, условие $|A| \geqslant 1/10$ можно заменить на $|A| \geqslant y$; c_1 и c_2 зависят лишь от w.

Лемма 2.2. *Пусть ограниченная функция f и вес w удовлетворяют условиям* (2.1),

$$y^5 \log w(2y)^{-1} \geqslant \log w(4y)^{-1} \quad \textit{при} \quad y < c_5 \quad (c_5 > 0). \tag{2.3}$$

Пусть далее $A \stackrel{\text{def}}{=} E_{2w(4x)}(f) \cap (1-x)\mathbb{T}$, $B \stackrel{\text{def}}{=} E_{2w(4x)}(f) \cap (1-y)\mathbb{T}$, *где* $x < y/2$. *Тогда из того, что* $|A| \geqslant 1/10$ *следует, что либо* $|B| - |A| \geqslant c_2 y \log \frac{\log w(2y)}{\log w(4y)}$, *либо* $|B| = 1$.

Доказательство. Поскольку $|f(z)| \leqslant 2w(4x)$ при $z \in A$, $|f^*_{2y}(z)| \leqslant 2w(4x) + w(2y) \leqslant 3w(2y)$, $z \in A$.[2] Для $z \in (1-y)\mathbb{T}$

$$\log |f^*_{2y}(z)| < \omega(z, A, \Omega) \log 3w(2y). \tag{2.4}$$

Положим $h = \frac{\log w(4y)}{\log 3w(2y)}$. По условию $h \leqslant y^4$.

Применим лемму 2.1. Тогда получим, что либо мера множества $B' = \left\{z \in (1-y)\mathbb{T} : \omega(z, A, \Omega) \geqslant \frac{\log w(4y)}{\log 3w(2y)}\right\}$ не меньше, чем $|A| + c_2 y \log \frac{\log 3w(2y)}{\log w(4y)}$, либо $|B'| = 1$. В то же время из (2.3) немедленно следует, что если $z \in B'$, то $\log |f^*_{2y}(z)| < \log w(4y)$. Тем самым $\forall z \in B'$, $|f(z)| \leqslant |f^*_{2y}(z)| + w(2y) \leqslant 2w(4y)$. Следовательно, $B' \subset B$. ●

Замечание. а) Здесь также условие $|A| \geqslant 1/10$ можно заменить на $|A| \geqslant y$. б) В леммах 2.1, 2.2 не используется условие $\int\limits_0 \log \log w(x)^{-1} dx = \infty$, в лемме 2.2 можно даже ослабить условие $w \uparrow$.

Лемма 2.3 (о распространении). *Пусть ограниченная функция f и вес w удовлетворяют условиям* (2.1). *Тогда найдется счетное множество $R_w = \{r_k\}$ и $\{R(r_k)\}$, так что $r_k \to 1$, $R(r_k) \to 1$ при $k \to \infty$, и если множество $A = r_k \mathbb{T} \cap E_{2w(4x)}(f)$ имеет меру $|A| \geqslant 1/10$, то $R(r_k)\mathbb{T} \subset E_{2w(4x)}(f)$.*

Замечание. а) Тем самым, если $f \notin J^0$,[3] то найдется последовательность окружностей $r\mathbb{T}$, $r \in R_w$, в определенном смысле «почти свободных» от $E_{2w(4x)}(f)$. б) Утверждение леммы остается верным при замене величины $1/10$ на любое наперед заданное положительное число. в) Фактически, в качестве R_w можно выбрать целый отрезок с концом в 1.

Доказательство. Назовем хорошими те индексы j, $j \in N$, для которых при $y = 2^{-j}$ выполнены неравенства

$$y^5 \log w(2y)^{-1} \geqslant \log w(4y)^{-1}, \quad y < c_5, \tag{2.5}$$

остальные индексы — плохие.

---

[2] $f^*_x(z) \stackrel{\text{def}}{=} a_f(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta| < 1-x} \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z - \zeta} dm_2(\zeta)$.

[3] $J^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C^1(\mathbb{D}) : \exists c, c_1 : |f(z)| + |\bar\partial f(z)| \leqslant c_1 w(c(1-|z|))\}$.

Из монотонности w следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} 2^{-j} \log \frac{\log w(2 \cdot 2^{-j})}{\log w(4 \cdot 2^{-j})} \to \infty, \quad N \to \infty. \tag{2.6}$$

Заметим, что если j — плохой индекс, то

$$\log \frac{\log w(2 \cdot 2^{-j})}{\log w(4 \cdot 2^{-j})} \leqslant 5j.$$

Поэтому в (2.6) сумму достаточно брать по хорошим индексам. Пусть j_0 — достаточно большой хороший индекс и $j_0 > j_1 > \ldots > j_k$ — все хорошие индексы, не превосходящие j_0. Величину j_0 выберем так, чтобы

$$c_2 \sum_{j_s > p} 2^{-j} \log \frac{\log w(2 \cdot 2^{-j})}{\log w(4 \cdot 2^{-j})} \geqslant \frac{9}{10}. \tag{2.7}$$

Покажем, что для всех r из $[1 - 2^{-j-1}, 1]$ в качестве $R(r)$ можно выбрать $1 - 2^{-j_\nu}$, $\nu = \max\{s : j_s > p\}$. Тогда при $p \to \infty$ получаем утверждение леммы. Положим $y_0 = 2^{-j_0}$, $1 - x \in [1 - 2^{-j-1}, 1]$, $j \geqslant j_0$, пусть

$$A = (1-x)\mathbb{T} \cap E_{2w(4x)}(f), \quad |A| \geqslant {}^1/_{10}.$$

Применяя лемму 2.2 к x и y_0, получаем, что множество

$$B_0 = (1 - y_0)\mathbb{T} \cap E_{2w(4x)}(f)$$

имеет меру

$$|B_0| \geqslant \min\left\{1, \frac{1}{10} + c_2 2^{-j_0} \log \frac{\log w(2 \cdot 2^{-j_0})}{\log w(4 \cdot 2^{-j_0})}\right\}.$$

Снова применяем лемму 2.2 к $x = y_0$, $y = y_1 \overset{\text{def}}{=} 2^{-j_1}$ и т. д. В итоге получаем, что $(1 - 2^{-j_\nu})\mathbb{T} \subset E_{2w(4x)}(f)$. ●

Лемма 2.3 используется при доказательстве простейших теорем единственности для почти аналитических функций.

Чтобы доказывать утверждения типа теоремы о суммируемости логарифма почти аналитической функции нужны леммы, в которых распространение оценки будет производиться не с множеств фиксированной меры, а с множеств меры, не меньшей $\mathrm{const} \cdot x$, на окружностях $(1-x)\mathbb{T}$. Далее, мы сформулируем такие леммы о распространении. К сожалению, при этом приходится накладывать условия регулярности на w:

$$x^\alpha \log w(x)^{-1} \uparrow +\infty, \quad x \downarrow 0. \tag{R_α}$$

Предварим лемму о распространении цепочкой вспомогательных утверждений.

Лемма 2.4. *Пусть $c_6 > 0$. Существуют c_7, $c_8 > 0$ такие, что $\forall x > 0$, $\forall h$, $0 < h < c_7$, для любой дуги A окружности $(1-x)\mathbb{T}$, $|A| \geqslant c_6 x$, если*

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} \{z : 1 - 4x < |z| < 1 - x\}, \quad B \overset{\text{def}}{=} \{z \in (1-2x)\mathbb{T} : \omega(z, A, \Omega) \geqslant h\},$$

то найдется дуга $B' \subset B$ так, что $|B'| - |A| \geqslant c_8 x \log 1/h$ или $|B'| = 1$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1. ●

Лемма 2.5. *Пусть α — малое положительное число, A — дуга окружности $(1-x)\mathbb{T}$, $|A| \geqslant \frac{c_9}{\alpha} x$, c_{10} много больше c_9,*

$$\Omega \overset{\text{def}}{=} \left\{z : 1 - \frac{c_{10}}{a} x < |z| < 1 - x\right\}, \quad B \overset{\text{def}}{=} \{z \in (1-2x)\mathbb{T} : \omega(z, A, \Omega) \geqslant 1 - \alpha\}.$$

Тогда найдется дуга $B' \subset B$ *такая, что* $|B'| - |A| \geqslant -\frac{c_9}{a} x$.

Доказательство заключается в простой оценке гармонической меры. ●

Лемма 2.6. *Пусть функция* w *удовлетворяет условию* (R_α), *где* α — *малое число. Пусть* f, w *удовлетворяет условиям* (2.1), $|f(z)| \leqslant w\left(\frac{2}{c_{11}\alpha}(1-|z|)\right)^{-1}$, *где* c_{11} — *малое число. Пусть, далее* A — *дуга окружности* $(1-x)\mathbb{T}$, $A \subset$ $\subset E_{2w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right)}(f)$, $|A| \geqslant \frac{c_9}{a} x$, $B \overset{\text{def}}{=} (1-2x)\mathbb{T} \cap E_{2w(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}$. *Тогда найдется дуга* $B' \subset B$ *так, что*

$$|B'| - |A| \geqslant 2c_{12} \cdot x \cdot \log \frac{\log w(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}{\log w(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})} - \frac{2c_{13}x}{a},$$

если $B \neq (1-2x)\mathbb{T}$.

Доказательство. Заметим, что при достаточно малых x

$$h \overset{\text{def}}{=} \frac{\log w(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}{\log w(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})} < 2^{-\alpha/2} \approx 1 - c\alpha \tag{2.8}$$

при малых α.

Рассмотрим теперь два случая.

а) $2h < c_7$ (см. лемму 2.4).

Пусть $\Omega = \{1 - 4x < |z| < 1 - x\}$; f_{4x}^* аналитична в кольце Ω. Для $z \in A$

$$|f_{4x}^*(z)| < 2w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right) + w\left(\frac{c_2 c_{11} x}{c_{11}\alpha}\right) \leqslant 3w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right).$$

Для $z \in (1-2x)\mathbb{T}$ имеем

$$\log|f_{4x}^*(z)| \leqslant \omega(z, A, \Omega) \cdot \log 3w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right) - \log w\left(\frac{2x}{c_{11}\alpha}\right) \cdot (1 - \omega(z, A, \Omega)).$$

Если точка z такова, что $\omega(z, A, \Omega) > 2h$, то $|f_{4x}^*(z)| \leqslant w\left(\frac{2x}{c_{11}\alpha}\right)$. Поскольку $2h < c_7$, то можно применить лемму 2.4, и мы получим, что дуга $B' \subset \{z \in$ $\in (1-2x)\mathbb{T} : \omega(z, A, \Omega) > 2h\}$ имеет длину

$$|B'| \geqslant |A| + c_8 x \log \frac{\log 3w(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}{\log w(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})} \geqslant |A| + c_8 \cdot x \cdot \frac{\log w(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}{\log w(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})} - c_8 \cdot x \cdot \log 3.$$

Для $z \in B'$ $|f(z)| \leqslant |f_{4x}^*(z)| + w(4x) \leqslant 2w(2x/c_{11}\alpha)$.

б) $2h > c_7$.

Положим $\alpha' = (2^{\alpha/2} - 1)/(2^{\alpha/2} + 1)$. Пусть $\Omega \overset{\text{def}}{=} \{1 - x > |z| > 1 - c_{14}\alpha^{-1}x\}$, где $c_{14}\alpha^{-1} \geqslant c_{10}\alpha'^{-1}$. Рассмотрим дугу B' в множестве

$$B \overset{\text{def}}{=} \{z \in (1-2x)\mathbb{T} : \omega(z, A, \Omega\} > 1 - \alpha'\}.$$

Для $z \in A$ имеем

$$|f_{c_{14}\alpha^{-1}}^*(z)| \leqslant 2w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right) + w\left(\frac{c_{11}c_{14}\alpha^{-1}ax}{c_{11}\alpha}\right) \leqslant 3w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right),$$

так как c_{11} выбрано с самого начала очень маленьким числом. Теперь для $z \in B'$ получаем

$$\log|f_{c_{14}\alpha^{-1}}^*(z)| \leqslant \omega(z, A, \Omega) \log 3w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right) - (1 - \omega(z, A, \Omega)) \log w\left(\frac{2x}{c_{11}\alpha}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha')\log\ldots-\alpha'\log\ldots<\log w\left(\frac{2x}{c_{11}\alpha}\right)$$

ввиду (2.8). Поэтому для $z\in B'$ $|f(z)|<2w\left(\frac{2x}{c_{11}\alpha}\right)$.

Оценка длины B' дана в лемме 2.5. Поскольку $2h>c_7$,

$$\frac{\log w\,(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}{\log w\,(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}<4c_7^{-2},$$

отсюда следует искомая оценка на B'. ●

Замечание. В лемме достаточно требовать от w лишь монотонности и выполнения условия

$$\frac{\log w\,(2x)}{\log w\,(x)}\leqslant \mathrm{const}<1,\ \ \mathrm{const}=2^{-\alpha/2}. \qquad (*)$$

Лемма 2.7. *Пусть c_{15}, $c_{16}>0$, w — монотонно возрастает и*

$$\int\limits_0 \log\log w\,(x)^{-1}\,dx=\infty\,;\ \ a_k\overset{\text{def}}{=}c_{15}2^{-k}\log\frac{\log w\,(2^{-k-1})}{\log w\,(2^{-k})}-c_{16}2^{-k}k.$$

Тогда найдется бесконечное множество индексов $T=T(w)$: $\forall j\in T$, $\forall m$, $0<$ $<m\leqslant j$, $\sum\limits_{k=m}^{j}a_k\geqslant 0$.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\infty$. Пусть $S_m=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$; $S_m\to\infty$. Положим

$$j_1=\min_{s_j\geqslant 0}j,\quad j_{k+1}=\min_{s_j>s_{j_k}}j,\quad T=\{j_k\}_{k\geqslant 0}.\ ●$$

Лемма 2.8 (о распространении). *Пусть w удовлетворяет условиям $(*)$ и (2.1). Тогда найдутся множества $R_w=\{r_k\}$ и числа $R_k<r_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}R_k=1$ такие, что для любой f, удовлетворяющей вместе с w (2.1), и такой, что*

$$|f(z)|\leqslant w\left(\frac{2\,(1-|z|)}{c_{11}\alpha}\right)^{-1},$$

если $|A|\geqslant 1-r_k$, $A\overset{\text{def}}{=}r_k\mathbb{T}\cap E_{w(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}(f)$, то $R_k\mathbb{T}\subset E_{w(2xc_{11}^{-1}\alpha^{-1})}(f)$.

Доказательство. Положим

$$c_{15}=c_{12},\quad c_{16}=\max\left(\frac{5c_{13}}{c_{12}},\ c_{13}\right)+\frac{c_9}{\alpha}.$$

Применим лемму 2.7 к последовательности $\{a_k\}$, построенной по этим константам и функции $w\left(\frac{x}{c_{11}\alpha}\right)$. Положим $r_k=2^{-j_k-1}$, где $T_w=\{j_k\}$. Заметим, что из выбора c_{15}, c_{16} следует, что $\left(y\overset{\text{def}}{=}2^{-j_k}\right)$

$$y^5\log w\left(\frac{y}{2c_{11}\alpha}\right)^{-1}\geqslant\log w\left(\frac{y}{c_{11}\alpha}\right)^{-1}.$$

Применим лемму 2.2 (вернее, замечание к ней) и получим, что окружность $(1-2^{-j_k})\mathbb{T}$ содержит отрезок A_{j_k} длины не менее $c_2y\log\frac{1}{y}=c_2j_k2^{-j_k}\log 2$, на котором $|f(z)|\leqslant w(1-|z|)$. Применим лемму 2.6 с $x=2^{-j_k}$, $A=A_{j_k}$. Получим дугу

$$B' \subset \left(1-2^{-j_k+1}\right)\mathbb{T} \cap E_{w\left(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1}\right)}(f),$$

$$|B'| \geqslant |A| + c_{12}\cdot 2^{-j_k+1}\log\frac{\log w\left(2^{-j_k}c_{11}^{-1}\alpha^{-1}\right)}{\log w\left(2^{-j_k+1}c_{11}^{-1}\alpha^{-1}\right)} - c_{13}\cdot 2^{-j_k+1}.$$

Отсюда $|B'| \geqslant \frac{c_9}{\alpha}\cdot 2^{-j_k+1}$. Положим $A = A_{j_k-1} = B'$. Опять применяем лемму 2.6. Сделав это m раз, получим дугу $A_{j_k-m} \subset \left(1-2^{-j_k+m}\right)\mathbb{T}$, на которой

$$|f(z)| \leqslant w\left(\frac{1-|z|}{c_{11}\alpha}\right)$$

и длина которой оценивается следующим образом:

$$|A_{j_k-m}| \geqslant |A_{j_k}| + \sum_{s=1}^{m}\left(c_{12}2^{-j_k+s}\log\frac{\log w\left(2^{-j_k+s-1}c_{11}^{-1}\alpha^{-1}\right)}{\log w\left(2^{-j_k+s}c_{11}^{-1}\alpha^{-1}\right)} - c_{13}2^{-j_k+s}\right).$$

При всех m суммы положительны и, более того,

$$\sum_{s=1}^{m}(\ldots) \geqslant \frac{c_9}{\alpha}2^{-j_k+m}.$$

Таким образом, лемма 2.6 применима. Если k велико, то найдется $m_k < j_k$, $j_k - m_k \to \infty$ так, что $A_{j_k-m_k} = \left(1-2^{-j_k+m_k}\right)\mathbb{T}$. Положим $R_k = 1-2^{-j_k+m_k}$. ●

Следствие 2.9. *Пусть f, w удовлетворяют условиям* (2.1),

$$\forall x\ \frac{\log w(x)}{\log w(2x)} \geqslant 2^{\alpha}, \quad |f(z)| \leqslant w\left(\frac{2(1-|z|)}{c_{11}\alpha}\right)^{-1},$$

где c_{11} — фиксированное малое число. Тогда $E_{w\left(xc_{11}^{-1}\alpha^{-1}\right)}(f)$ не может пересекать все окружности $(1-x)\mathbb{T}$ по множествам меры не меньше x без того, чтобы $f \in J^0$.

В следующей лемме о распространении мы покажем, как, несколько ужесточая условия на w, можно заменить в этом следствии слова «все окружности» словами «бесконечно много окружностей». По-прежнему

$$\frac{\log w(x)}{\log w(2x)} \geqslant 2^{\alpha}. \qquad (**)$$

Но теперь считаем, что α достаточно велико.

Лемма 2.10 (о распространении). *Пусть w и f удовлетворяют условиям* (2.1), *w удовлетворяет условию* (**) *для достаточно большого α;*

$$|f(z)| \leqslant w(8(1-|z|))^{-1}.$$

Тогда для любого достаточно малого x существует $y > x$ такое, что если $E_{2w(4x)}(f) \cap (1-x)\mathbb{T}$ содержит дугу длины x, то $(1-y)\mathbb{T} \subset E_{2w(4x)}(f)$. При этом $y \to 0$ при $x \to 0$.

Доказательство. Пусть $\Omega_m = \{1-2^{m+2}x < |z| < 1-2^m x\}$, $A_m = E_{2w(4x)}(f) \cap (1-2^m x)\mathbb{T}$, $m = 0, \ldots, -\frac{\log x}{\log 2}$. Мы знаем, что A_0 содержит дугу длины x. Покажем по индукции, что либо $A_m = \mathbb{T}$, либо A_m содержит дугу длины

$$L_m = x + c_{17}\left[2x\log\frac{\log w(4x)}{\log w(4\cdot 2x)} + \ldots + 2^m x\log\frac{\log w(4\cdot 2^{m-1}x)}{\log w(4\cdot 2^m x)}\right] \geqslant 2^m x.$$

Это докажет лемму вследствие расходимости $\int\limits_0 \log\log w(x)^{-1}dx$ и монотонности w.

Осталось лишь доказать индукционный переход. Пусть A_m содержит дугу A'_m длины $L_m \geqslant 2^m x$. Положим

$$h = 2\frac{\log w(2^{m+3}x)}{\log(3w)(2^{m+2}x)} \Big/ \left(1 + \frac{\log w(2^{m+3}x)}{\log(3w)(2^{m+2}x)}\right). \tag{2.9}$$

Рассмотрим дугу

$$A'_{m+1} \overset{\text{def}}{=} \{z \in (1 - 2^{m+1}x)\mathbb{T} : \omega(z, A'_m, \Omega_m) > h\}.$$

Поскольку $h < c_7$ при достаточно большом α, лемма 2.4 дает

$$|A'_{m+1}| \geqslant |A'_m| + c_2 \cdot 2^m x \log\frac{\log w(2^{m+3}x)}{\log w(2^{m+2}x)}.$$

Для $z \in A'_m$

$$|f^*_{2^{m+2}x}(z)| < 2w(2^{m+2}x) + w(2^{m+2}x) \leqslant 3w(2^{m+2}x).$$

Для $z \in A'_{m+1}$

$$\log|f^*_{2^{m+2}x}(z)| \leqslant \omega(z, A'_m, \Omega_m)\cdot\log 3w(2^{m+2}x) - (1 - \omega(z, A'_m, \Omega))\cdot\log w(2^{m+3}x).$$

Эта величина не больше $\log w(2^{m+3}x)$, если

$$\frac{\omega(z, A'_m, \Omega_m)}{2 - \omega(z, A'_m, \Omega_m)} \geqslant \frac{\log w(2^{m+3}x)}{\log(3w)(2^{m+2}x)}.$$

Это выполнено для $z \in A'_{m+1}$ по определению величины h. Итак, для $z \in A'_{m+1}$ $|f(z)| \leqslant 2w(2^{m+3}x)$, и в то же время

$$|A'_{m+1}| \geqslant |A'_m| + c_2 2^m x \log\frac{\log w(2^{m+1}x)}{\log 3w(2^m x)}.$$

Индукционный переход доказан. ●

Замечание. Если считать, что функция f ограниченна, то в условии (**) можно брать любое α, большее 1. Приведем, в целях полноты, еще одно утверждение.

Лемма 2.11 (о распространении). *Пусть f и w удовлетворяют условиям* (2.1). *Если множество $E_w(f)$ содержит кривую, выходящую на $\mathbb{T}$, то* $\exists r_0 < 1$:

$$\{1 - r_0 < |z| < 1\} \subset E_w(f).$$

Лемма по существу доказана в [4].

§ 3. Теоремы единственности для пространства Q

На протяжении этого параграфа мы будем работать с пространствами, которые определяются весами w,

$$w: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ w\uparrow,\ w(0) = 0,\ \int\limits_0 \log\log w(x)^{-1}dx = \infty. \tag{3.1}$$

Если определить вес w_p по последовательности $\{p(n)\}_{n\geqslant 0}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(n)}{n^2} = \infty,\ p(n) = 0(n), \tag{3.2}$$

с помощью формулы (1.1), то он будет удовлетворять условиям (3.1), (см. (1.2)) и $\log w_p^{-1}$ будет выпуклой функцией.

Лемма 3.1. *Если*

$$n^{-\varepsilon}p(n)\uparrow, \tag{3.3}$$

то

$$x^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\log w_p(x)^{-1}\uparrow. \tag{3.4}$$

Доказательство. См., например, аналогичное утверждение в [4]. ●

Введем теперь ряд пространств, связанных с w:

$$Q\overset{\mathrm{def}}{=}\{f\in C^1(\mathbb{D}):\exists c,\ c_1:|f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))^{-1},$$
$$\forall c\exists c_1:|\bar\partial f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))\},$$
$$J\overset{\mathrm{def}}{=}\{f\in Q:\forall c\exists c_1:|f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))\},$$
$$J^0\overset{\mathrm{def}}{=}\{f\in C^1(\mathbb{D}):\exists c,\ c_1:|f(z)|+|\bar\partial f(z)|\leqslant c_1w(c(1-|z|))\}.$$

Для функций $f\in C^1(\mathbb{D})$, $|\bar\partial f(z)|\leqslant w(1-|z|)$ можно определить вспомогательные функции

$$b_f(z)\overset{\mathrm{def}}{=}\widehat{\bar\partial f}(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}dm_2(\zeta)\in A(\hat{\mathbb{C}}\cap\mathbb{D}),$$
$$a_f(z)\overset{\mathrm{def}}{=}f(z)-b_f(z)\in A(\mathbb{D}),$$
$$f_x^*(z)\overset{\mathrm{def}}{=}a_f(z)+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1-x}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}dm_2(\zeta)\in A(\mathbb{D}\setminus(1-x)\bar{\mathbb{D}}).$$

Если $f\in C^1(\mathbb{D})$, $v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, то

$$E_v(f)\overset{\mathrm{def}}{=}\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leqslant v(1-|z|)\}.$$

Для любой функции f из Q можно определить последовательность $d(f)$ по формуле

$$d(f)_k\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{r\to1-0}\int\limits_{r\mathbb{T}}f(z)z^{-k-1}dz,\quad d:f\to\{d(f)_k\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Легко видеть, что указанные пределы существуют и конечны.

Лемма 3.2. *Пусть* $f=\sum\limits_{n\geqslant0}a_nz^n$, $g=\sum\limits_{n\geqslant1}a_{-n}z^{-n}$,

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{\log|a_n|}{p(|n|)}=-\infty,\qquad \varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|a_n|}{p(n)}<\infty,$$

где $\{p(n)\}_{n\geqslant0}$ — *вогнутая последовательность, удовлетворяющая условиям* (2.2). *Тогда найдется* $h\in Q$ *такая, что* $d(h)=\{a_n\}$. *Если* $f=0$, *то* $g|\mathbb{T}=h|\mathbb{T}$.

Доказательство. Искомая функция h получается как результат сложения почти аналитического продолжения функции g (см. [8]) и функции f, оценка роста которой может быть получена, например, из [11, с. 158]. ●

Лемма 3.3. *Если* w *удовлетворяет условиям* (3.1), *то*

$$\text{(а) } d(J)=0.$$
$$\text{(б) } f\in Q,\ d(f)=0\Rightarrow f=\widehat{\bar\partial f}.$$

Если, кроме того, w *удовлетворяет условию* (3.4), *то*

$$\text{(в) } f\in Q,\ \widehat{\bar\partial f}|\mathbb{T}=0,\ f=\widehat{\bar\partial f}\Rightarrow f\in J.$$
$$\text{(г) } J^0\cap Q=J.$$

Доказательство. (а), (б) — очевидно, (г) следует из (б) и (в). Для доказательства (в) оцениваем сначала коэффициенты Фурье функции $\Phi(z) = = f_x^*\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)z\right)\Big|\mathbb{T}$. Затем из того, что $\|\Phi(z)\|_\infty \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\Phi}(k)|$, получим оценку

$$\forall c \exists c_1 : \left\| f_x^* \left| \left(1-\frac{x}{2}\right)\mathbb{T} \right\|_\infty \leqslant c_1 w^{1/2}(2cx).$$

Используя то, что $\forall z \in \mathbb{C}\ |(f-f_x^*)(z)| \leqslant w(x)$, и лемму 3.1, получим искомый результат. ●

Лемма 3.4. *Если p удовлетворяет условиям* (3.2), (3.3), *то Q — алгебра относительно умножения, J — ее идеал, алгебра $\mathfrak{A}$* (см. (1.4)) *изоморфна Q/J.*

Доказательство. Достаточно лишь проверить, что отображение $\{a_n\} \to h$, со свойством $d(h) = \{a_n\}$ (см. лемму 3.2), может быть выбрано мультипликативным на множестве финитных последовательностей. ●

Теорема 3.5. *Если функция f, $f \in Q$, на множестве $e \subset \mathbb{T}$ положительной меры имеет угловые граничные значения, равные* 0, *w удовлетворяет условиям* (3.1), (3.4), *то $f \in J$.*

Доказательство. Построим пилообразную конструкцию Лузина—Привалова (см. [10, 13]). Мы получим $\Omega \subset \mathbb{D}$,

$$\Omega = \bigcup_{\zeta\in e_1} \{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta|z|| < 2(1-|z|)\} \cup \frac{1}{2}\mathbb{D},$$

причем $|f|\Omega| < \frac{1}{2}$,

$$\forall \zeta \in e_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T} \cap \partial\Omega \subset e \ \lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\Omega}} f(z) = 0,$$

$$|e_1| > 0.$$

Нетрудно доказать, что

$$\exists x_0 : \forall x < x_0 \left| \left\{ \zeta \in (1-x)\mathbb{T} \cap \Omega : \omega(\zeta, e_1, \Omega) > \frac{1}{2} \right\} \right| > \frac{|e_1|}{2}. \qquad (3.5)$$

Действительно, пусть

$$u(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\zeta, e_1, \mathbb{D}) - \omega(\zeta, \mathbb{T}\setminus e_1, \mathbb{D}) = 2\omega(\zeta, e_1, \mathbb{D}) - 1.$$

Ясно, что $u(\zeta) \leqslant \omega(\zeta, e_1, \Omega)\,|\,\partial\Omega$.

Поэтому достаточно оценить меру множества

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \zeta \in (1-x)\mathbb{T} \cap \Omega : \omega(\zeta, e_1, \mathbb{D}) \geqslant \frac{3}{4} \right\}.$$

Если $B_x \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{T} : (1-x)\zeta \in \Omega,\quad |e_1 \cap [\zeta e^{-5ix},\quad \zeta e^{5ix}]| > \frac{9}{10}|[\zeta e^{-5ix},\ \zeta e^{5ix}]|$, то $(1-x)B_x \subset A$.

В то же время по теореме Лебега о плотности почти все ζ из e_1 лежат во всех B_x для достаточно малых $x < x(\zeta)$, поэтому $|B_x| > \frac{|e_1|}{2}$ при $x < x_0$.

Учитывая то, что $|f_{2x}^*|e| < w(2x)$, получаем

$$\zeta \in (1-x)\mathbb{T},\ \omega(\zeta, e, \Omega) > \frac{1}{2} \Rightarrow \log|f_{2x}^*(\zeta)| < \frac{1}{2}\log w(2x).$$

Итак, из (3.5) вытекает, что

$$|E_{w(cx)}(f) \cap (1-x)\mathbb{T}| > \frac{|e|}{2} > 0.$$

Теперь лемма 2.8 влечет включение $f \in J^0$ и использование леммы 3.3 (г) завершает доказательство. ●

Замечание. Из теоремы 3.5 с использованием лемм 3.1, 3.2 и 3.3 а) вытекает теорема 1.1.

Теорема 3.6. *Если функция f, $f \in Q$, ограниченна и на множестве $e \subset \mathbb{T}$ положительной меры имеет угловые граничные значения, равные 0, w удовлетворяет условиям (3.1), то $f \in J^0$.*

Доказательство. Необходимо лишь заменить в доказательстве теоремы 3.5 лемму 2.8 леммой 2.3. ●

Теорема 3.7. *Если w удовлетворяет условиям (3.1), (3.4), $f, g \in Q$, $f \cdot g \in J$, то либо f, либо g лежит в J.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 2.8. ●

Замечание. Из теоремы 3.7 вытекает теорема 1.2.

§ 4. Множества малых значений и оценки гармонической меры

Сначала мы несколько уточним результаты § 2.

Лемма 4.1. *Пусть f, w удовлетворяют условиям (2.1),*

$$0<\delta<\delta_{\text{абс}}, \quad |f(z)| \leqslant (2w(8(1-|z|)))^{-\delta\cdot(1-|z|)}.$$

Пусть далее $x < x_0(w)$, $A=\{z \in (1-x)\mathbb{T} : |f(z)| \leqslant (2w(2x))^{\delta x}\}$ не содержит дуг длины x. Тогда

$$|\{x' : x/2 < x' < 3x/4 : (1-x')\mathbb{T} \cap E_w(f)=\varnothing\}| \geqslant \frac{x}{8}.$$

(Здесь $\delta_{\text{абс}}$ — абсолютная константа).

Доказательство. Разобъем кольцо $\Omega=\left\{1-\frac{3x}{4}<|z|<1-\frac{x}{2}\right\}$ на x^{-1} «прямоугольников» $R_1, \ldots, R_{x^{-1}}$. Каждому «прямоугольнику» R_i сопоставим содержащий его круг G_i радиуса $3x/4$ с центром $c_i \in (1-x)\mathbb{T}$. Найдем $a_i \in (1-$ $-x)\mathbb{T} \setminus A$ такие, что $|a_i-c_i| \leqslant x/2$. Это можно сделать по условию леммы. Ясно, что $a_i \in G_i$. Пусть $E_i=R_i \cap E_x(f)$. Для $z \in E_i |f^*_{2x}(z)| \leqslant w(1-|z|)+w(2x) \leqslant 2w(2x)$. Тогда $\log((2w(2x))^{\delta x}-w(2x)) \leqslant \log|f^*_{2x}(a_i)| \leqslant \omega(a_i, E_i, G_i)\log 2w(2x)-\delta x \times$ $\times \log w(2x)$. Значит, $\omega(a_i, E_i, G_i) \leqslant 3\delta x$. Но известно (см. [6]), что

$$\omega(a_i, E_i, G_i) \geqslant \text{const} \cdot x^{-1}|\{x' : |E_i \cap (1-x')\mathbb{T} \neq \varnothing\}|.$$

Пусть $e_i=\left\{x' : \frac{x}{2}<x'<\frac{3x}{4} \text{ и } E_i \cap (1-x')\mathbb{T} \neq \varnothing\right\}$. Поэтому при достаточно малом δ $|e_i| \leqslant \frac{x^2}{8}$. Следовательно, $\left|\bigcup_{i=1}^{x^{-1}} e_i\right| \leqslant x/8$. Тем самым, по крайней мере половина окружностей $(1-x')\mathbb{T}$, $x/2<x'<3x/4$, свободна от точек множества $E_w(f)$. ●

Замечание. а) На самом деле легко показать, что $|\{x' : x/2 < x' < 3x/4$ и $E_w(f) \cap (1-x')\mathbb{T} \neq \varnothing\}|$ не превосходит $\text{const} \cdot \exp(-\text{const}/(\delta x))$. б) В лемме можно заменить δx на x^{ε}, не нарушая справедливости утверждения.

Пусть $\Omega_k=\{1-2^{-k-1} < |z| < 1-2^{-k}\}$.

Лемма 4.2. *Пусть $x^B \log w(x)^{-1} \uparrow$ при $x \downarrow 0$, где B — достаточно большое число, f, w удовлетворяют условиям (2.1), $|f(z)| \leqslant (2w(16(1-|z|)))^{-\delta\cdot(1-|z|)}$, $f \notin J^0$. Тогда для любого достаточно большого k*

$$|\{r : r\mathbb{T} \subset \Omega_k \setminus E_w(f)\}| > 2^{-k-2}.$$

Доказательство. Положим $w_1(x)=(2w(2x))^{\delta \cdot x}$ и заметим, что вес w_1 и функция f удовлетворяют условиям леммы 2.10. Используя ее, получаем, что множества $(1-x)\mathbb{T} \cap E_{w_1}(f)$ не содержат дуг длины x. Тем самым, мы находимся в условиях леммы 4.1. Применяя ее, получаем искомое утверждение. ●

Замечание. Из замечания к лемме 4.1 видно, что в каждом кольце Ω_k «почти все» окружности не задевают $E_w(f)$.

Цель последующих рассуждений — показать, что найдутся окружности $r\mathbb{T}$, не только свободные от $E_w(f)$, но и «далекие» от множества $E_w(f)$ в том смысле, что гармоническая мера области $\Omega^r_w \overset{\text{def}}{=} r\mathbb{D} \setminus E_w(f)$ сравнима с мерой Лебега на $r\mathbb{T}$:

$$c(w)\cdot m \leqslant \omega_{\Omega^r_w(f)} | r\mathbb{T} \leqslant m,\ c(w) > 0. \tag{4.1}$$

Этот факт может быть использован при уточнении теоремы о суммируемости логарифма почти аналитической функции. Кроме того, он представляет самостоятельный интерес, характеризуя в определенном смысле тонкость множества $E_w(f)$.

Лемма 4.3. *Пусть $x^B \log w(x)^{-1} \uparrow$, $x \downarrow 0$, где B — достаточно большое число, f, w удовлетворяют условиям* (2.1),

$$|f(z)| \leqslant (2w(32(1-|z|)))^{\delta\cdot(1-|z|)^{1+\varepsilon_0}},\quad f \notin J^0.$$

Тогда для любого достаточно большого k найдется r_k:

$$r_k\mathbb{T} \subset \Omega_k \setminus E_{w_1(x)}(f),\quad w_1(x) \overset{\text{def}}{=} (w(2x))^{x^{\varepsilon_0}}.$$

Доказательство. Достаточно применить лемму 4.2 к функции f и w_1.

Замечание. Снова нужно отметить, что искомыми окружностями будут «почти все» окружности $r\mathbb{T} \subset \Omega_k$.

Лемма 4.4. *Пусть $x^\alpha \log w(x)^{-1} \uparrow$ при $x \downarrow 0$, где $\alpha > 0$, f и w удовлетворяют условиям* (2.1),

$$|f(z)| \leqslant (2w(2(1-|z|)/c))^{-(2(1-|z|)/c)^\varepsilon},$$

где $\varepsilon < \alpha$, $c = c_{11}\alpha$, c_{11} — малое число из леммы 2.6 (не зависящее от α), $f \in J^0$. Тогда найдется последовательность $\{k_j\}$, $k_j \to \infty$ такая, что

$$r_{k_j}\mathbb{T} \subset \Omega_{k_j} \setminus E_w(f).$$

Доказательство. Положим $w_1(x) \overset{\text{def}}{=} (2w(2x))^{x^\varepsilon}$. Тогда вес w_1 и функция f удовлетворяют условиям леммы 2.8. Используя ее, получим, что найдутся $r_k \to 1$ такие, что множества $r_k\mathbb{T} \cap E_{w_1}(f)$ имеют меру меньше $1-r_k$. Используя замечание к лемме 4.1, получаем искомое утверждение.

Лемма 4.5. *Пусть $x^\alpha \log w(x)^{-1} \uparrow$ при $x \downarrow 0$, где $\alpha > 0$, f и w удовлетворяют условиям* (2.1),

$$|f(z)| \leqslant (2w(4(1-|z|)/c))^{-(4(1-|z|)/c)^\varepsilon},$$

где $\varepsilon < \alpha$, c — как в лемме 4.4, $f \notin J^0$. Пусть далее $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. Тогда найдется последовательность r_{k_j}, $k_j \to \infty$, такая, что $r_{k_j}\mathbb{T} \subset \Omega_{k_j} \setminus E_{w_1}$, $w_1 = w(2x)^{x^{\varepsilon_0}}$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 4.4 к функции f и весу w_1, $w_1(x) \overset{\text{def}}{=} w(2x)^{x^{\varepsilon_0}}$. ●

Лемма 4.6. *Пусть $x \log w(x)^{-1} \uparrow \infty$, при $x \downarrow 0$, функция $2f$ и вес w удовлетворяют условиям* (2.1), *$f \notin J^0$, f — ограниченна, $0 < x < \delta(w)$, окружность $(1-x)\mathbb{T}$ не пересекается с множеством $E_{w_1}(f)$, $w_1(x) \overset{\text{def}}{=} 2w(2x)^{x^\varepsilon}$. Тогда гармо-*

ническая мера области $\Omega_{w/2}^{1-x}(f)=(1-x)\mathbb{D}\setminus E_{w/2}(f)$ *сравнима с мерой Лебега на* $(1-x)\mathbb{T}$:

$$\omega_{\Omega_{w/2}^{1-x}(f)} \geqslant c(w)\cdot m\,|\,(1-x)\mathbb{T}.$$

Доказательство. Выберем функцию η, $\eta(x)\downarrow 0$, $x\downarrow 0$, такую, что функция $w_0(x)=w(2x)^{\eta(x)}$ возрастает. Поскольку вес w_0 удовлетворяет условию регулярности $x\log w_0(x)^{-1}\uparrow\infty$, $x\downarrow 0$, лемма 2.8 позволяет найти последовательность окружностей $r_j\mathbb{T}$, $r_j\to 1$, таких, что

$$|r_j\mathbb{T}\cap E_{w_1}(f)|<(1-r_j)/8. \tag{4.2}$$

Теперь считаем, что $x<(1-r_{j_0})/2$, причем величину j_0 выберем позже. Фиксируем точку c на $(1-x)\ \mathbb{T}$. Пусть

$$b'=\frac{r_{j_0}}{1-x}c,\quad b\in r_{j_0}\mathbb{T},\quad |b-b'|<\frac{1}{16}(1-r_{j_0}),$$
$$|f(b)|>w(2(1-|b|))^{\eta(1-|b|)}. \tag{4.3}$$

Обозначим через R «квадрат» со стороной $1-|\,b\,|$ и нижним основанием l_R на $(1-x)\ \mathbb{T}$ такой, что середина l_R совпадает с точкой c. Покажем, что для любого отрезка I с центром в точке c, $|\,I\,|<(1-|\,b\,|)/16$, имеет место неравенство

$$\omega(b,\ I,\ \Omega_{w/2}(f)\cap R)\geqslant \mathrm{const}\cdot|\,I\,|,\ \mathrm{const}>0. \tag{4.4}$$

Если это будет показано, то тем более $\omega\ (b,\ I,\ \Omega_{w/2}^{1-x}\ (f))\geqslant c\ |\ I\ |$ и доказательство леммы будут закончено.

Обозначим для краткости

$$u_R(z)=\omega\big(z,\ I,\ \Omega_{w/2}(f)\cap R\big).$$

Это гармоническая в $\Omega\overset{\mathrm{def}}{=}\Omega_{w/2}(f)\cap R$ функция. Сравним $u_R(z)$ и $v_R(z)=\omega(z,\ I,\ R)$.

$$u_R(b)=v_R(b)-\int\limits_{E_w(f)} u_R(\zeta)\,d\omega(b,\ \zeta,\ \Omega), \tag{4.5}$$
$$u_R(b)\geqslant c_{17}|\,I\,|(1-r_{j_0})^{-1}, \tag{4.6}$$
$$u_R(\zeta)\leqslant c_{18}|\,I\,||\,\zeta-c\,|^{-1}. \tag{4.7}$$

Если через K обозначить полукруг с центром c и радиусом $x/8$, лежащий в R, то

$$u_R(\zeta)\leqslant c_{19}|\,I\,|(1-|\,\zeta\,|)^{-1},\quad \zeta\in R\setminus K. \tag{4.8}$$

Подставляя оценки (4. 6), (4. 7), (4. 8) в (4. 5), получим

$$u_R(b)\geqslant c_{17}|\,I\,|(1-r_{j_0})^{-1}\Bigg(1-c_{20}\int\limits_{R\setminus K}\frac{1-r_{j_0}}{1-|\,\zeta\,|}\,d\omega(b,\ \zeta,\ \Omega)-$$
$$-c_{21}\int\limits_{K}\frac{1-r_{j_0}}{|\,\zeta-c\,|}\,d\omega(b,\ \zeta,\ \Omega)\Bigg)\overset{\mathrm{def}}{=}c_{17}|\,I\,|(1-r_{j_0})^{-1}(1-c_{20}N_1-c_{21}N_2). \tag{4.9}$$

Оценим теперь величины N_1 и N_2. При оценке N_2 будем использовать ту часть условия леммы, где говорится, что окружность $(1-x)\ \mathbb{T}$ свободна от $E_{w_1}(f)$, $w_1=2w(2x)^{x^{\varepsilon}}$. Положим $E_n\overset{\mathrm{def}}{=}E_{w/2}(f)\cap D(c,\ 2^{-n})$, $n\geqslant[\log 8/x]$. Тогда

$$N_2 \leqslant (1-r_{j_0}) \sum_{n \geqslant [\log 8/x]} 2^n \omega(b,\ E_n \setminus E_{n+1},\ \Omega). \qquad (4.10)$$

(Здесь $D(x,\ y) \overset{\text{def}}{=} x + y\mathbb{D}$).

Пусть $\mathscr{D} = D(c,\ x/2)$. Без ограничения общности считаем, что

$$\forall z \in \mathbb{D} \quad |f(z)| < 1/2, \qquad \forall x \quad w(x) < 1/2.$$

Покажем, что

$$\omega(c,\ E_{w/2}(f) \cap K,\quad \mathscr{D} \setminus E_{w/2}(f)) < x^{\varepsilon} \overset{\text{def}}{=} y. \qquad (4.11)$$

Для этого рассмотрим функцию f_{2x}^*, аналитическую и ограниченную в $\mathscr{D}$ и удовлетворяющую оценкам

$$|f_{2x}^*(z)| \leqslant \frac{1}{2} w(1-|z|) + \frac{1}{2} w(2x) < w(2x), \quad z \in E_{w/2}(f) \cap K,$$

$$|f_{2x}^*(c)| \geqslant 2w(2x)^{x^{\varepsilon}} - \frac{1}{2} w(2x) \geqslant w(2x)^{x^{\varepsilon}}.$$

Применение неравенства Йенсена в $\mathscr{D} \setminus E_{w/2}(f)$ к f_{2x}^* доказывает (4.11).

Теперь удобно сделать преобразование подобия так, чтобы круг $\mathscr{D}$ перешел в единичный круг $\mathbb{D}$, а точка c в 0. Образ $E_{w/2}(f) \cap K$ назовем $\bar{E}$, образ $\mathscr{D} \cap \Omega = \mathscr{D} \setminus E_{w/2}(f)$ назовем Q. Тогда (4.11) превратится в

$$\omega(0,\ \bar{E},\ Q) < y. \qquad (4.12)$$

Гармоническую в Q функцию $\omega(z,\ \bar{E},\ Q)$ можно представить как гриновский потенциал

$$\omega(z,\ \bar{E},\ Q) = G^{\mu}(z) \overset{\text{def}}{=} \int_{\bar{E}} \log \left| \frac{1 - \bar{z}\zeta}{z - \zeta} \right| d\mu(\zeta), \quad \mu \in M_+(\bar{E}).$$

Поэтому

$$\int_{\bar{E}} \log \frac{1}{|\zeta|} \, d\mu(\zeta) < y.$$

Поскольку $\log 1/|\zeta| \geqslant \log 4 > 1$ на $\bar{E}$ $\left(\text{так как } \bar{E} \subset \frac{1}{4}\mathbb{D}\right)$, получаем, что

$$\|\mu\| = \mu(\bar{E}) < y. \qquad (4.13)$$

Введем логарифмический потенциал

$$U^{\mu}(z) \overset{\text{def}}{=} \int_{\bar{E}} \log \frac{1}{|z-\zeta|} \, d\mu(\zeta).$$

Очевидно, что $U^{\mu}(0) = G^{\mu}(0)$ и тем самым

$$U^{\mu}(0) < y. \qquad (4.14)$$

Покажем, что

$$U^{\mu}(z) \geqslant 1 - c_{22} y, \quad z \in \bar{E}. \qquad (4.15)$$

Действительно, из (4.13) следует, что

$$U^{\mu}(z) = G^{\mu}(z) - \int_{\bar{E}} \log |1 - \bar{z}\zeta| \, d\mu(\zeta) \geqslant 1 - \left(\log \frac{17}{16}\right) y.$$

Пусть $e_k \overset{\text{def}}{=} \bar{E} \cap \{2^{-k-1} < |z| < 2^{-k}\}$, $k \geqslant 2$.

Будем теперь оценивать $\Sigma k \operatorname{cap} e_k$. Пусть γ_k — равновесный потенциал на e_k. Тогда очевидно, что

$$U^{\gamma_k}(0) \geqslant k \operatorname{cap} e_k.$$

Мы хотим доказать, что

$$U^{\gamma_k}(0) \leqslant c_{23} U^{\mu_k}(0), \tag{4.16}$$

где

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} \mu \mid e_{k-1} \cup e_k \cup e_{k+1}.$$

Из (4.16) и (4.14) непосредственно следует оценка для суммы емкостей:

$$\Sigma k \operatorname{cap} e_k \leqslant 3c_{23} U^{\mu}(0) \leqslant 3c_{23} y. \tag{4.17}$$

Рассуждения при доказательстве (4.16) вполне аналогичны тем, которые встречаются при выводе критерия Винера.

Достаточно показать, что

$$U^{\mu_k}(z) \geqslant c_{24} > 0, \quad z \in e_k, \tag{4.18}$$

и положить $c_{23} = c_{24}^{-1}$,

$$U^{\mu_k}(z) = U^{\mu}(z) - U^{\mu-\mu_k}(z) \geqslant 1 - c_{22} y - U^{\mu-\mu_k}(z),$$

$$U^{\mu-\mu_k}(z) = \int\limits_{|\zeta| \leqslant 2^{-k-2}} \log \frac{1}{|z-\zeta|}\, d\mu(\zeta) + \int\limits_{2^{-k+1} \leqslant \zeta < 1/4} \ldots \stackrel{\text{def}}{=} u_1(z) + u_2(z).$$

Для $z \in e_k$ и x такого, что $2^{-k+1} \leqslant |x| < 1/4$

$$|z-x| \geqslant |x| - |z| \geqslant |x| - \frac{1}{2}|x| \geqslant \frac{1}{2}|x| \Rightarrow \log \frac{1}{|z-x|} \leqslant \log 2 + \log \frac{1}{|x|}.$$

Поэтому $u_2(z) \leqslant \|\mu\| \cdot \log 2 + U^{\mu}(0) \leqslant c_{25} y$. Для $z \in e_k$ и x такого, что $|x| \leqslant 2^{-k-2}$

$$|x| \leqslant |z-x| \Rightarrow \log \frac{1}{|z-x|} \leqslant \log \frac{1}{|x|} \Rightarrow u_1(z) \leqslant U^{\mu}(0) < y.$$

Итак, $U^{\mu_k}(z) \geqslant 1 - c_{26} y \geqslant 1/2$, $z \in e_k$, если число y выбрано достаточно малым.

На этом этапе мы выбираем r_{j_0} так, чтобы

$$\frac{1 - r_{j_0}}{4} < c_{26}^{-1}.$$

Неравенство (4.18) (с $c_{24} = 1/2$) и вместе с ним неравенство (4.17) доказаны.

Перейдем обратно в круг $\mathscr{D}$ и учтем, что емкость при сжатии уменьшается. Тогда из неравенства (4.17) получим

$$\sum_{n \geqslant \left[\log \frac{8}{x}\right]} n \operatorname{cap}(E_n \setminus E_{n+1}) \leqslant c_{27} y \log \frac{1}{x}. \tag{4.19}$$

Пусть ν_n — равновесная мера для $E_n \setminus E_{n+1}$. Тогда $U^{\nu_n}(z) \geqslant \omega(z, E_n \setminus E_{n+1}, \Omega)$ для (квази-) всех $z \in E_n \setminus E_{n+1}$. На остальной границе области $\Omega = \Omega_{\frac{1}{2}w}(f) \cap R$ потенциал U^{ν_n} неотрицателен. Поэтому

$$U^{\nu_n}(z) \geqslant \omega(z, E_n \setminus E_{n+1}, \Omega), \quad z \in \Omega \setminus (E_n \setminus E_{n+1}).$$

Но на окружности $\Gamma_n = \partial D(c, 2^{-n+2})$

$$U^{\nu_n}(z) \leqslant c_{28} n \|\nu_n\| = c_{28} n \operatorname{cap}(E_n \setminus E_{n+1}).$$

Таким образом, на Γ_n

$$\omega(z,\ E_n \setminus E_{n+1},\ \Omega) \leqslant c_{28} n \operatorname{cap}(E_n \setminus E_{n+1}). \qquad (4.20)$$

Из (4. 20) немедленно получаем оценку гармонической меры в точке b:

$$\omega(b,\ E_n \setminus E_{n+1},\ \Omega) \leqslant c_{29}(1-r_{j_0})^{-1} 2^{-n} \cdot n \operatorname{cap}(E_n \setminus E_{n+1}). \qquad (4.21)$$

Теперь из соотношений (4. 10), (4. 19) и (4. 21) следует, что

$$N_2 \leqslant (1-r_{j_0}) \sum_{n \geqslant \left[\log \frac{8}{x}\right]} 2^n \omega(b,\ E_n \setminus E_{n+1},\ \Omega) \leqslant c_{30} x^{\varepsilon} \log \frac{1}{x}. \qquad (4.22)$$

Величина N_1 оценивается значительно проще, но именно в этом месте используется регулярность w:

$$x \log w(x)^{-1} \uparrow, \quad x \downarrow 0.$$

Рассмотрим функцию $F(z) = f(z) \exp\left\{\frac{1}{\pi} \int\limits_{\Omega_{\frac{1}{2}w}} \frac{\partial f}{f}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} dm_2(\zeta)\right\}$. Она голоморфна и ограниченна в $\Omega_{\frac{1}{2}w}(f)$. Кроме того, $|F(z)| \leqslant c_{31} w(1-|z|)$, $z \in E_{\frac{1}{2}w}(f) \cap R$ и

$$|F(b)| \geqslant C_{32} w(2(1-|b|))^{\eta(1-|b|)}.$$

По поводу последней оценки см. (4. 3). Поэтому

$$\int\limits_{E_{\frac{1}{2}w(f)} \cap R} (-\log w(1-|\zeta|))\, d\omega(b,\ \zeta,\ \Omega) \leqslant c_{33} + \eta(1-|b|) \log (w(2(1-|b|)))^{-1}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{E_{\frac{1}{2}w(f)} \cap R} \frac{\log w(1-|\zeta|)}{\log w(2(1-|b|))}\, d\omega(b,\ \zeta,\ \Omega) \leqslant c_{34} \eta(1-|b|).$$

Отсюда и из монотонности $x \log w(x)^{-1}$ получаем

$$(1-|b|) \int\limits_{E_{\frac{1}{2}w(f)} \cap R} \frac{1}{1-|\zeta|}\, d\omega(b,\ \zeta,\ \Omega) \leqslant c_{35} \eta(1-|b|).$$

Вспоминая, что $1-|b|=1-r_{j_0}$, и выбирая r_{j_0} достаточно близко к единице, получаем искомую оценку для N_1. Тем самым оценка (4. 4) и вместе с ней лемма 4. 6 доказаны.

Установим еще одно утверждение, в доказательстве которого используются некоторые результаты работы [4].

Лемма 4. 7. *Пусть f и w удовлетворяют условиям* (2. 1), *функция f ограниченна, $f \notin J^0$. Тогда для достаточно больших k*

$$|\{r : 1-2^{-k} < r < 1-2^{-k-1},\quad r\mathbb{T} \cap E_w(f) = \varnothing\}| \geqslant 2^{-k-2}.$$

Доказательство. Введем функцию множества

$$h_1(E) = \inf\{\textstyle\sum r_i : E \subset \bigcup D(z_i,\ r_i),\ z_i \in \mathbb{C}\}.$$

Будем далее считать, что все множества имеют диаметр, не превосходящий 1/2.

Следующее утверждение легко вытекает из теоремы Фростмана (см. [9]).

Сублемма 1.

$$h_1(E) \leqslant c_{36} \exp\left(-\frac{1}{\operatorname{cap} E}\right).$$

Далее, если Q — квадрат, то через λQ обозначается квадрат, получаемый растяжением в λ раз из центра Q (аналогично определяется λI, I — дуга); $l(Q)$ — длина стороны квадрата Q.

Мы будем использовать также следующий хорошо известный результат. (Некоторые обобщения его см. в [25]).

Сублемма 2. *Пусть* E — *компакт в* Q. *Тогда* $\exists c_{37} > 0$:

$$c_{37} \operatorname{cap}((2l(Q))^{-1} E) \leqslant \inf_{\zeta \in Q} \omega(2R \setminus E, E, \zeta) \leqslant c_{37}^{-1} \operatorname{cap}((2l(Q))^{-1} E).$$

Пусть теперь E — относительно замкнутое множество в круге $\mathbb{D}$ такое, что множество $\mathbb{D} \setminus (r\mathbb{D} \cup E)$ связно при некотором r. Пусть Ω — компонента множества $\mathbb{D} \setminus E$ такая, что $\mathbb{T} \subset \partial\Omega$. Не умаляя общности, считаем, что $0 \in \Omega$. Если I — дуга окружности $\mathbb{T}$, то через Q_I обозначим «квадрат», построенный на основании I, $Q_I \subset \mathbb{D}$. Для квадрата Q через BQ обозначим его половину, лежащую на $\mathbb{T}$; $TQ = Q \setminus BQ$.

Сублемма 3. *Для любой достаточно малой дуги* I *окружности* $\mathbb{T}$, $|I| < \alpha(r)$,

$$\omega(0, Q_{2I} \cap E, \Omega) \geqslant c_{38} \operatorname{cap}\left(\frac{TQ_I \cap E}{|I|}\right) \cdot \omega\left(0, \frac{1}{2} I, \Omega\right).$$

Доказательство. Рассмотрим две гармонические в Ω функции

$$u_1(z) = \omega(z, Q_{2I} \cap E, \Omega),$$

$$u_2(z) = \operatorname{cap}\left(\frac{TQ_I \cap E}{|I|}\right) \cdot \omega\left(z, \frac{1}{2} I, \Omega\right).$$

Сравним их на границе квадрата Q_I. По сублемме 2

$$u_1(z) \geqslant c_{39} u_2(z), \quad z \in \partial TQ_I.$$

Для $z \in \partial Q_I \setminus \partial TQ_I$ легко видеть, что

$$u_2(z) \leqslant c_{40} \operatorname{cap}\left(\frac{TQ_I \cap E}{|I|}\right) \cdot \left(\frac{1 - |z|}{|I|}\right).$$

Покажем, что

$$u_1(z) \leqslant c_{41} \operatorname{cap}\left(\frac{T \cdot Q_I \cap E}{|I|}\right) \cdot \left(\frac{1 - |z|}{|I|}\right).$$

Пусть R — «прямоугольник» с основанием $2I$ и высотой $\frac{|I|}{2}$. Пусть

$$u(z) = \omega(z, \partial R \cap \partial TQ_I, R).$$

По лемме 2 при $z \in \partial R \cap \partial TQ_I$

$$u_1(z) \geqslant c_{42} \operatorname{cap}\left(\frac{TQ_I \cap E}{|I|}\right) u(z).$$

Поскольку u_1 супергармонична в R и положительна, то это же неравенство выполняется всюду в R.

В то же время при $z \in \partial Q_I$

$$u(z) \geqslant c_{43}\left(\frac{1 - |z|}{|I|}\right).$$

Итак, всюду на ∂Q_I $u_1(z) \geqslant c_{44} u_2(z)$. На $\partial\Omega \setminus Q_I$ имеем $u_2(z)=0$, $u_1(z) \geqslant 0$. Следовательно,

$$u_1(0) \geqslant c_{44} u_2(0). \bullet$$

Будем, наконец, использовать ряд результатов [4]. Если

$$f \in L^\infty(\mathbb{D}), \quad |\bar\partial f(z)| \leqslant w(1-|z|), \quad f|\mathbb{T} \not\equiv 0, \quad \int_0 \log\log w(x)^{-1}\,dx = \infty,$$

$$x \log w(x)^{-1} \uparrow, \quad x \downarrow 0, \tag{*}$$

то найдется относительно замкнутое в $\mathbb{D}$ множество $E = E(f, w)$ такое, что

(1) $|f(z)| \leqslant 2w(32(1-|z|))$, $z \in E$;

(2) $|f(z)| > w(32(1-|z|))$, $z \in \mathbb{D} \setminus E$;

(3) $\exists r : \mathbb{D} \setminus (r\mathbb{D} \cup E)$ — связно;

(4) Если Ω — компонента $\mathbb{D} \setminus E$ такая, что $\partial\Omega \supset \mathbb{T}$, то (без ограничения общности считаем, что $0 \in \Omega$) $\omega(0, I, \Omega) \geqslant c_{45}|I|$, $I \subset \mathbb{T}$;

(5) $\displaystyle\int_{\partial\Omega \cap \mathbb{D}} (-\log w(32(1-|z|)))\,d\omega(0, z, \Omega) < \infty.$

Завершим теперь доказательство леммы. Пусть $I_1, \ldots, I_{2^k}$ — составляющие окружность $\mathbb{T}$ дуги длины 2^{-k}. Из (5) и (*) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} 2^k \sum_{n=1}^{2^k} \omega(0, Q_{2I_n} \cap E, \Omega) = 0.$$

Из (4) и сублеммы 3 следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{2^k} \operatorname{cap}\left(\frac{TQ_{I_n} \cap E}{2^{-k}}\right) = 0.$$

Отсюда и из сублеммы 1 следует, что

$$\lim_{k \to \infty} 2^k h_1(E \cap \{z : 1 - 2^{-k} < |z| < 1 - 2^{-k-1}\}) = 0,$$

откуда и вытекает искомый результат. $\bullet$

§ 5. Теорема о суммируемости логарифма почти аналитической функции

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $\displaystyle\int_0 \log\log w(x)^{-1}\,dx = \infty$.

В работе [3] показано, что

если вес w подчинен определенным условиям регулярности, $|\bar\partial f(z)| \leqslant w(1-|z|)$, f — ограниченная функция, не лежащая в J^0, то $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \log|f|\,dm > -\infty$. (5.1)

После этого в работе [4] условия регулярности веса w были сведены к следующим:

$$\varliminf_{x \to 0} x^{1+\varepsilon} \log w(x)^{-1} > 0. \tag{5.2}$$

Затем J. Brennan [17] доказал (5.1) при несколько иных условиях регулярности:

$$x \log w(x)^{-1} \uparrow, \quad x \downarrow 0. \tag{5.3}$$

Фактически условие (5. 2) сильнее, чем условие (5. 3). (Нетрудно проверить, что для любой w, удовлетворяющей условиям (3. 1) и (4. 2), найдется $\tilde{w}$, удовлетворяющая условию (4. 3), такая, что

$$\tilde{w} \geqslant w, \quad \int_0 \log\log \tilde{w}^{-1}(x)\,dx = \infty).$$

Отметим, что эта формулировка по существу следует из рассуждений работы [4]. (Чтобы это увидеть, достаточно заменить на с. 346 [4] функцию h_η на функцию h_0 такую, что $\log h_0^{-1}(\rho) = \varepsilon(\rho)\rho \log h^{-1}(2\rho)$, и функция ε выбрана так, чтобы h_0 была монотонна).

Сначала мы обобщим теорему о суммируемости логарифма почти аналитической функции (т. е. импликацию типа (5. 1)) в двух направлениях.

При этом мы будем опираться на результаты § 4.

Теорема 5. 1. *Пусть*

$$x \log w(x)^{-1} \uparrow, \quad x \downarrow 0, \tag{5.4}$$

функция $f \in C^1(\mathbb{D})$ *и ограниченна,* $|\bar{\partial} f(z)| < w(1-|z|)$, $f \notin J^0$. *Тогда найдется множество* $R = \{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $r_j \to 1$, *такое, что*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r\in R}} \int_{r\mathbb{T}} \log|f|\,dm > -\infty. \tag{5.5}$$

Замечание. Из теоремы 5. 1 вытекает импликация (5. 1).

Теорема 5.2. *Пусть B — достаточно большое число,*

$$x^B \log w(x)^{-1} \uparrow, \quad x \downarrow 0, \tag{5.6}$$

функция $f \in C^1(\mathbb{D})$, $|\bar{\partial} f(z)| < w(1-|z|)$, $f \notin J^0$,

$$|f(z)| < \left(\frac{1}{2} w(32(1-|z|))\right)^{-(1-|z|)^2}.$$

Тогда найдется множество R такое, что

$$\forall k \quad R \cap [2^{-k}, 2^{-k+1}) \neq \varnothing, \tag{5.7}$$

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r\in R}} \int_{r\mathbb{T}} \log|f|\,dm > -\infty. \tag{5.8}$$

Замечание. а) Здесь налагаются более сильные условия на w, но зато допускается рост f. б) На самом деле для каждого k множество R занимает «почти весь» отрезок $(2^{-k}, 2^{-k+1})$. в) Однако примеры показывают, что в качестве R нельзя взять отрезок с концом в 1.

Теорема 5. 2 будет получена как следствие результата, который мы сейчас и сформулируем.

Обозначим $L(r) = \int_{r\mathbb{T}} \log|f|\,dm$, $r \in R$, где f и R — из теоремы 5. 2. Будем говорить, что $L(r)$ почти выпукла (относительно $\log r$), если $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$, $r_1 < r_2 < r_3$,

$$\left(\log\frac{r_3}{r_1}\right) L(r_2) \leqslant \left(\log\frac{r_3}{r_2}\right) L(r_1) + \left(\log\frac{r_2}{r_1}\right) L(r_3) + \left(\log\frac{r_3}{r_1}\right) c(w). \tag{5.9}$$

Теорема 5. 3. *В условиях теоремы 5. 2 найдется множество R со свойством (5. 7) такое, что функция $L(r)$, $r \in R$, почти выпукла.*

Ясно, что теорема 5. 2 сразу следует из этого утверждения.

Доказательство теоремы 5.1. Положим $\alpha=\frac{1}{2}$, $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ и применим лемму 4.5. Тогда мы получим последовательность $\{r_j\}$, $r_j\to 1$, такую, что $r_j\mathbb{T}\cap E_{w(2x,x^{\varepsilon_0})}(f)=\varnothing$. Определим $R=\{r_j\}$. Теперь применим лемму 4.6 к функции $f/2$ и весу w и получим, что

$$\omega_{\Omega^{r_j}_{\frac{1}{2}w}(f)}\geqslant c(w)\cdot m\,|\,r_j\mathbb{T}, \tag{5.10}$$

где $\Omega^{r_j}_{\frac{1}{2}w}(f)=r_j\mathbb{D}\setminus E_{\frac{1}{2}w}(f)$, причем $c(w)$ положительно и не зависит от j. Применяя теперь к функции

$$F(z)=f(z)\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Omega_{\frac{1}{2}w}(f)}\frac{\bar\partial f}{f}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\,dm_2(\zeta)\right\}$$

неравенство Йенсена в области

$$r_j\mathbb{D}\cap\Omega_{\frac{1}{2}w}(f),\quad (\Omega_w(f)\overset{\mathrm{def}}{=}\Omega^1_w(f)),$$

получаем утверждение теоремы. ●

Доказательство теоремы 5.3. Положим $R=\{r: r\mathbb{T}\cap E_{w_1}(f)=\varnothing\}$, $w_1=w(2x)^{x^{\varepsilon_0}}$, где ε_0 — маленькое положительное число. Лемма 4.3 обеспечивает густоту R (выполнение (5.7)).

Выберем $r_k\in R$ так, чтобы $\frac{1}{8}(1-r_k)<(1-r_{k+1})<\frac{1}{2}(1-r_k)$.

Чтобы доказать почти выпуклость функции $L(r)$, $r\in R$, достаточно проверить, что

$$\left(\log\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}\right)L(r_k)\leqslant\left(\log\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)L(r_{k-1})+\left(\log\frac{r_k}{r_{k-1}}\right)L(r_{k+1})+\varepsilon_k\log\frac{r_{k+1}}{r_{k-1}}, \tag{5.11}$$
$$\sum\varepsilon_k<\infty.$$

Действительно, положим $b_{ij}=\frac{r_{i+1}-r_j}{r_i-r_j}$, $B_{jk}=\prod\limits_{i>j>k}b_{ij}$. Заметим, что $C\overset{\mathrm{def}}{=}\sup\limits_{i>j}B_{ij}<\infty$. Тогда для $r_j<r<r_{i+1}$ получим, воспользовавшись (5.11),

$$L(r)\leqslant\left(\log\frac{r_{i+1}}{r}\right)\Big/\left(\log\frac{r_{i+1}}{r_j}\right)\cdot L(r_j)+\left(\log\frac{r}{r_j}\right)\Big/\left(\log\frac{r_{i+1}}{r_j}\right)\cdot L(r_{i+1})+$$
$$+\varepsilon_i\frac{r_{i+1}-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}}+\varepsilon_{i-1}\frac{r_{i+1}-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}}\,\frac{r_{i+1}-r_{i-2}}{r_i-r_{i-2}}+\ldots+\varepsilon_{j+1}\frac{r_{i+1}-r_{i-1}}{r_i-r_{i-1}}\cdots\frac{r_{i+1}-r_j}{r_i-r_j}=$$
$$=\frac{\log r_{i+1}/r}{\log r_{i+1}/r_j}L(r_j)+\frac{\log r/r_j}{\log r_{i+1}/r_j}L(r_{i+1})+\sum_{k=j+1}^{i}B_{i,\,k-2}\varepsilon_k.$$

Но $\sum\limits_{k=j+1}^{i}B_{i,\,k-2}\varepsilon_k\leqslant C\sum\limits_{k=j+1}^{i}\varepsilon_k$, и почти выпуклость $L(r)$ следует из того, что $\sum\varepsilon_k<\infty$.

Чтобы доказать неравенство (5.11), рассмотрим функцию $f^*\overset{\mathrm{def}}{=}f^*_{1-r_{k-1}}$, голоморфную и ограниченную в кольце

$$\Omega_k\overset{\mathrm{def}}{=}\{r_{k-1}<|z|<r_{k+1}\}.$$

Если обозначить

$$L^*(r) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{r\mathbb{T}} \log |f^*|\, dm, \quad r_{k-1} \leqslant r \leqslant r_{k+1},$$

то легко заметить, что для $r \in R$, $r_{k-1} \leqslant r \leqslant r_{k+1}$, имеют место неравенства (при достаточно больших k)

$$|f(z)| > w(1 - r_{k+1})(1 - r_{k+1})^{\varepsilon_0} > w^{1/2}(1 - r_{k-1}),$$
$$|f^*(z) - f(z)| < w(1 - r_{k-1}) < |f(z)|^2.$$

Следовательно, $|f^*(z)| = |f(z)| \left| 1 + \frac{(f^* - f)(z)}{f(z)} \right|$ имеет оценку

$$|f(z)|(1 - w^{1/2}(1 - r_{k-1})) \leqslant |f^*(z)| \leqslant (f(z)|(1 + w^{1/2}(1 - r_{k-1})).$$

Поэтому для $r \in R$, $r_{k-1} \leqslant r \leqslant r_{k+1}$,

$$L(r) - w^{1/2}(1 - r_{k-1}) \leqslant L^*(r) \leqslant L(r) + w^{1/2}(1 - r_{k-1}).$$

Отсюда немедленно следует неравенство (5. 11) с $\varepsilon_k = \mathrm{const}\, w^{1/2}(1 - r_{k-1})$, если заметить, что $L^*(r)$ выпукла (относительно $\log r$) ввиду голоморфности f^* в кольце $\mathfrak{Q}$.

Займемся теперь обобщением (5. 1) на семейства функций.

Теорема 5. 4. *Пусть B — достаточно большое число,*

$$x^B \log w(x)^{-1} \uparrow, \quad x \downarrow 0.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство функций, удовлетворяющих оценке

$$|\bar\partial f(z)| \leqslant w(1 - |z|), \quad |f(z)| \leqslant (w(32(1 - |z|)))^{-(1-|z|)^\varepsilon}, \quad f \in \mathcal{F}.$$

Обозначим

$$a_f(z) \overset{\text{def}}{=} f(z) - \widehat{\bar\partial f}(z) = f(z) - \frac{1}{\pi} \iint \frac{\bar\partial f(\zeta)}{z - \zeta}\, dm_2(\zeta).$$

Предположим, что семейство $\mathcal{F}$ состоит из ограниченных функций. Тогда имеет место следующая альтернатива:

либо найдется последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{F}$, такая, что

$$\forall z \in \mathbb{D} \lim_{n \to \infty} a_{f_n}(z) = 0, \quad \forall z \notin \mathbb{D} \lim_{n \to \infty} \widehat{\bar\partial f_n}(z) = 0, \tag{5. 12}$$

либо

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} \int\limits_{\mathbb{T}} \log |f|\, dm > -\infty. \tag{5. 13}$$

Доказательство. Запишем $\bar\partial f(z)$ как $\bar\partial f(z) = \lambda_f(z) w(1 - |z|)$, $|\lambda_f| \leqslant 1$. Обозначим через w_1 функцию $w_1(x) = w(2x)^{x^{\varepsilon/2}}$. Положим $r(f) = \sup\limits_{0<r<1} \{|r\mathbb{T} \cap \cap E_{w_1}(f)| \geqslant 1 - r\}$. Предположим сначала, что

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} z(f) = 1. \tag{5. 14}$$

Тогда найдутся последовательность функций $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{F}$ и последовательность чисел $\{R_n\}$, $R_n \to 1$, такие, что (см. лемму 2. 10)

$$R_n\mathbb{T} \subset E_{w_1}(f_n).$$

Отсюда следует, что функции $f_n | R_n\mathbb{D}$ ограничены одной постоянной. Более того, легко видеть, что

$$|f_n(z)| \leqslant 3w\left(2(1-|z|)\right)^{\frac{1}{2}(1-|z|)^{\varepsilon}} = 3w_1^{1/2}(1-|z|)$$

для $n \geqslant n(z)$.

Без ограничения общности можно считать, что $a_n \stackrel{\text{def}}{=} a_{f_n}(z) \to h(z)$, $z \in \mathbb{D}$; $\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{f_n}$ слабо в $L^3(wdm_2)$ сходятся к $\lambda \in L^3(wdm_2)$.

Заметим, что $h \in H^\infty$ и

$$|h(z) + \lambda(\zeta)\widehat{w(1-|\zeta|)}(z)| \leqslant 3w_1^{1/2}(1-|z|).$$

Отсюда следует, что

$$h(z) + \frac{1}{\pi}\iint \frac{\lambda(\zeta)\, w(1-|\zeta|)}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta) = 0, \quad \text{п. в. } z \in \mathbb{T}.$$

Поэтому

$$\iint \frac{\lambda(\zeta)\, w(1-|\zeta|)}{z-\zeta}\, dm_2(\zeta) = 0, \quad z \notin \mathbb{D}; \quad h = 0.$$

Тем самым, если имеет место (5.14), то выполнено и (5.12). Отрицание (5.14) означает, что существует r_0, $0 < r_0 < 1$ такое, что $|E_{w_1}(f) \cap r\mathbb{T}| < 1 - r$, $\forall r \in (z_0, 1)$, $\forall f \in \mathscr{F}$.

Из теоремы 5.3 вытекает существование множеств $e(f) \subset (r_0, 1)$ таких, что $r\mathbb{T} \cap E_w(f) = \varnothing$ $\forall r \in e(f)$, $\forall f \in \mathscr{F}$. Эти множества достаточно густы (см. (5.7)) и функции $L_f(r) = \int\limits_{r\mathbb{T}} \log|f|\,dm$, $r \in e(f)$, почти выпуклы. Заметим, что оценки почти выпуклости этих функций не зависят от $f \in \mathscr{F}$. Поэтому

$$\inf_{f \in \mathscr{F}} \int\limits_{\mathbb{T}} \log|f|\,dm > -\infty. \bullet$$

Приведем теперь одно любопытное следствие этой теоремы, обещанное в § 1 (см. (1.3)).

Следствие 5.5. *Пусть B — достаточно большое число,*

$$x^B \log w^{-1}(x) \uparrow, \quad x \downarrow 0.$$

Пусть $f \in C^1(\mathbb{D})$, $|\bar\partial f(z)| \leqslant w(1-|z|)$, $|f(z)| \leqslant \left(w^{-1}(32(1-|z|))\right)^{(1-|z|)^{\varepsilon}}$.

Если $f \notin J^0$, *то*

$$\lim_{r \to 1} \int\limits_{\mathbb{T}} \log|a_f(r\zeta) + \widehat{\bar\partial f}(\zeta)|\,dm > -\infty.$$

§ 6. Теорема о факторизации

Каждая почти аналитическая функция допускает аддитивное разложение

$$f = a_f + b_f.$$

Используя результаты § 4, можно решить вопрос о наличии мультипликативного разложения

$$f - gh \in J^0, \quad g = a_g, \quad h = b_h.$$

Таким образом, каждая почти аналитическая функция есть, с точностью до элемента из J^0, произведение аналитической и «антианалитической» функций. Этот результат можно рассматривать как наглядное объяснение теорем единственности из третьего и пятого параграфов.

Теорема 6.1. *Пусть* $x^B \log w(x)^{-1}\uparrow$, $x\downarrow 0$, *для достаточно больших* B, *пусть* f, w *удовлетворяют условию* (2.1) *и*

$$|f(z)|\leqslant (w(16(1-|z|)))^{-(1-|z|)^\varepsilon},\quad \varepsilon>0.$$

Тогда найдутся $g\in A(\mathbb{D})$, $h\in C^1(\mathbb{D})$, $|\bar\partial h(z)|<2w(16(1-|z|))$, $h=b_h$, *такие, что*

$$f-gh\in J^0.$$

Следствие 6.2. *При условии*

$$\frac{\log\log w(x)^{-1}}{\left(\log\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}}\uparrow,\quad x\downarrow 0,\ \varepsilon>0,$$

выполнено равенство

$$Q/J=Q_+/J\cdot Q_-/J,$$

где $Q_+=Q\cap A(\mathbb{D})$, $Q_-=\{g\in Q: g=b_g\}$.

Теорема 6.3. *Пусть* $x\log w(x)^{-1}\uparrow$, $x\downarrow 0$; f, w *удовлетворяют условию* (2.1) *и пусть функция* f *ограниченна. Тогда найдутся* $g\in H^\infty$, $h=b_h$, *такие, что*

$$f\,|\,\mathbb{T}=gh\,|\,\mathbb{T}.$$

Доказательство теоремы 6.1. Пусть $f\in J^0$. Используя лемму 4.2, получим для $k\geqslant k_0$ множества

$$R_k=\{r: r\mathbb{T}\subset\Omega_k\setminus E_{w^{1/2}}(f)\},\quad mR_k>2^{-k-2}.$$

Пусть

$$g_k(z)=\chi_{R_k}(|z|)\cdot\frac{2^{-k-1}}{\pi\cdot mR_k}\iint\limits_{\Omega_{k-1}}\frac{\bar\partial f(\zeta)}{z-\zeta}dm_2(\zeta),$$

$$g(z)=\sum_{k\geqslant 0}g_k(z)\cdot\frac{z}{|z|}.$$

Ясно, что $|g_k(z)|\leqslant \operatorname{const} w(2^{-k+1})$. Поэтому $b_g\in C_A(\hat{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{D})$. Из того, что

$$\int\limits_{r\mathbb{T}}\frac{g_k(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta=g_k(z)\quad\text{при } |z|>r>r_k,$$

следует, что $b_g\,|\,\mathbb{T}=b_f\,|\,\mathbb{T}$.

Применяя рассуждение, аналогичное доказательству леммы 3.3 (в) получаем, что

$$|b_g(z)-b_f(z)|\leqslant w(16(1-|z|)),\quad z\in\mathbb{D}.$$

Пусть $f_1=a_f+b_g$,

$$f_2(z)=\exp\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}\setminus(1-2^{-k_0})\bar{\mathbb{D}}}\left(\frac{\bar\partial f_1}{f_1}\right)(\zeta)\frac{1}{z-\zeta}dm_2(\zeta),$$

$$f_3=f_1f_2^{-1}.$$

Легко видеть, что функция f_2 принадлежит классу W^1_∞ (т. е. все частные производные первого порядка лежат в L^∞). Кроме того,

$$|\bar\partial f_2(z)|<\operatorname{const} w^{1/2}(1-|z|),$$

а функция f_3 аналитична в $\mathbb{D}\setminus\left(1-2^{-k_0}\right)\bar{\mathbb{D}}$. Сгладим функцию f_2:

$$f_4(z)=\frac{4}{\pi(1-|z|)^2}\iint\limits_{2|\zeta-z|<1-|z|}f_2(\zeta)\,dm_2(\zeta).$$

Тогда $f_4 \in C^1(\mathbb{D})$, $|\bar\partial f_4(z)| < w(2(1-|z|))$, $f_4|\mathbb{T} = f_2|\mathbb{T}$, поэтому $|f_2(z) - f_4(z)| < w(8(1-|z|))$. Теперь

$$|f(z) - f_3(z) f_4(z)| < 2w(16(1-|z|)).$$

Разложив функцию f_3 в произведение $f_5 f_6$,

$$f_5 \in A(\mathbb{D}),$$
$$f_6 \in A\left(\hat{\mathbb{C}} \setminus \left(1 - 2^{-k_0-1}\right)\mathbb{D}\right), \quad f_6(\infty) = 0,$$

продолжив f_6 C^1-гладко в круг $\left(1 - 2^{-k_0-1}\right)\mathbb{D}$ и положив $f_7 = f_4 f_6$, получим

$$f - f_5 f_7 \in J^0,$$
$$f_5 \in A(\mathbb{D}), \quad f_7 \in C^1(\mathbb{D}), \quad |\bar\partial f_7(z)| < 2w(16(1-|z|)).$$

Поскольку $f_4 = 1 + b_{f_4}$, $f_6 = b_{f_6}$, получаем, что $f_7 = b_{f_7}$. Теорема доказана. ●

Доказательство теоремы 6.3 аналогично и включает использование леммы 4.7 вместо леммы 4.2.

§ 7. Заключительные замечания

Здесь будет приведен ряд примеров, иллюстрирующих границы применимости сформулированных в работе результатов.

Сначала строятся функции, аналитические и квазианалитически гладкие в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$, продолжаемые до аналитических в $\mathbb{D}$ (вспомним, что из теоремы 3.5 следует отсутствие таких функций при

$$|f(z)| < (w(c(1-|z|)))^{-1}, \tag{7.1}$$

где c — достаточно велико).

Затем рассматриваются контрпримеры, показывающие, до какой степени условия регулярности на w существенны в лемме о распространении оценки (лемма 2.10) и в теореме о суммируемости логарифма модуля (теорема 3.1).

П р и м е р 7.1. Построим квазианалитически гладкую функцию $f_- \neq 0$, которую можно продолжить через $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ до функции $f_+ \in A(\mathbb{D})$ с умеренным ростом (чуть большим, чем в (7.1)).

Переформулируем задачу на языке почти аналитических функций. Будем строить функцию f такую, что

$$\left.\begin{aligned} f \in C^1(\mathbb{D}), \quad |\bar\partial f(z)| \leqslant C \exp(-\exp((1-|z|)^{-1})), \\ |f(z)| \leqslant \exp(C \exp((1-|z|)^{-1})), \quad f \notin J^0, \\ f \in C(\bar{\mathbb{D}} \setminus \{1\}), \quad f|(\mathbb{T} \setminus \{1\}) \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Положив $f_+ = a_f$, $f_- = b_f$, получим искомый пример. Рассмотрим в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta > 0$ функцию

$$\Phi(\zeta) = \exp\exp\frac{\zeta}{2}$$

и обозначим через Π_1 полосу $\left\{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \geqslant 1,\ |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$. Заметим, что

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant \exp\exp\frac{\operatorname{Re}\zeta}{2}, \quad \zeta \in \Pi_1. \tag{7.3}$$

Пусть

$$\Pi_2 = \left\{\zeta : \operatorname{Re}\zeta > \frac{1}{2},\quad |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant \frac{5\pi}{7}\right\} \setminus \Pi_1.$$

Ясно, что

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant \mathrm{const}\,\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\frac{\operatorname{Re}\zeta}{2}\right), \quad \zeta \in \Pi_2. \tag{7.4}$$

Пересадим Φ в единичный круг

$$\varphi(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \Phi(\zeta(z)), \quad \zeta(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

и определим

$$G_i \overset{\mathrm{def}}{=} \zeta(\Pi_i), \quad i = 1,\ 2; \quad G_3 \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{D} \setminus (G_1 \cup G_2).$$

Ясно, что найдется функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{C} \setminus \{1\})$ такая, что

$$\chi \mid G_1 \equiv 1, \quad \chi \mid G_2 \equiv 0, \quad |\nabla\chi(z)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(1-|z|)^2}. \tag{7.5}$$

Положим теперь $f = \chi\varphi$. Все свойства функции f, перечисленные в (7. 2), непосредственно вытекают из (7. 3)—(7. 5).

Мы хотим также привести еще один изящный пример очень гладкой голоморфной вне круга $\mathbb{D}$ функции, продолжающейся до голоморфной функции в круге $\mathbb{D}$. ●

Пример 7. 2. (В. П. Хавин).

Для начала возьмем очень быстро убывающую при $|x| \to \infty$ положительную функцию $\psi(x)$ на $\mathbb{R}$ и выберем целую функцию Φ так, что

$$|\Phi(x)| \leqslant \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad \Phi \not\equiv 0.$$

(Это можно сделать по теореме Карлемана, см., например, [5]). Далее, сделаем конформную замену переменной $\zeta = \frac{z}{z+i}$, переводящую вещественную ось в $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{T}$ и верхнюю полуплоскость в круг $D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{D}$. Пусть $\varphi(\zeta) \overset{\mathrm{de}}{=} \Phi(z(\zeta))$. Тогда искомая функция f_- — есть просто интеграл Коши φ:

$$f_-(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad |z| > 1.$$

Действительно, эта функция голоморфна в $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Вне единичного круга $\mathbb{D}$ она может быть сделана сколь угодно гладкой (принадлежащей любому классу Карлемана) за счет выбора ψ. Далее, f_- может быть продолжена в круг $\mathbb{D}$ до голоморфной функции f_+ за счет стягивания контура γ к точке 1 ввиду голоморфности φ в $\mathbb{D}$. Для достаточно быстро стремящейся к нулю ψ $\varphi \notin H^1(\mathbb{D})$, поэтому $f \not\equiv 0$. ●

Пример 7. 3. Доказательства лемм о распространении в § 2 существенно зависят от накладываемых условий регулярности. Оказывается, что и сами эти утверждения могут стать неверными при ослаблении условий.

Покажем, что утверждение леммы 2. 10 перестает выполняться, если на w наложено лишь условие

$$x^\alpha \log w^{-1}(x) \uparrow, \quad x \downarrow 0, \quad \alpha < 1.$$

Действительно, легко построить систему $\mathscr{L}$ интервалов, сходящихся к точке 0, и функцию ψ такие, что

$$\psi(x) \uparrow \infty, \quad x \downarrow 0; \quad \int\limits_0 \log\psi(x)\,dx = \infty, \quad \psi(x) < \frac{x^{\alpha-1}}{2}\Big| \bigcup_{l \in \mathscr{L}} l.$$

Положим $\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} x^{-\alpha}\psi(x)$, $w(x) \overset{\text{def}}{=} \exp(-\varphi(x))$. Тогда функция $S(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ удовлетворяет оценке $|S(z)| \leqslant w(1-|z|)$ для $(1-|z|) \in l$, $l \in \mathscr{L}$ на дугах длины $1-|z|$. В то же время $S \notin J^0$. ●

Далее, оказывается, что в теореме о суммируемости логарифма условие регулярности $x \log w(x)^{-1}$, $x \downarrow 0$, является достаточно точным.

Пример 7. 4. Существуют функции f и w такие, что

$$\left.\begin{aligned} &w\downarrow, \quad x\log w(x)^{-1} \geqslant 1, \quad \int_0 \log\log w(x)^{-1}\,dx = \infty, \\ &|\bar\partial f(z)| \leqslant w(1-|z|), \quad f \in L^\infty(\mathbb{D}), \quad f\,|\,\mathbb{T} \neq 0, \\ &\int_{\mathbb{T}} \log|f(\zeta)|\,dm(\zeta) = -\infty. \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Введем предварительно ряд объектов. Если Ω — (многосвязная) область, то через $MH^\infty(\Omega)$ обозначим множество (многозначных) функций f таких, что функция $|f|$ однозначна и ограниченна в Ω и для каждой точки $z_0 \in \Omega$ найдутся ее окрестность U и однозначная голоморфная в U функция $g = g_U$ такие, что $|f| = |g|$ на U. Пусть $\gamma \in \pi_1(\Omega)$, $\pi_1(\Omega)$ — фундаментальная группа Ω. Аналитически продолжая g_U вдоль γ, получим функцию h, определенную в $V \subset U$, и такую, что $|h| = |g|$ на V. Тем самым $h = e^{i\alpha}g$ на V. Легко видеть, что соответствие $\gamma \to e^{i\alpha}$ порождает характер на $\pi_1(\Omega)$, т. е. элемент группы $\pi_1(\Omega)^*$.

Если $\alpha \in \pi_1(\Omega)^*$, то через $H^\infty(\Omega, \alpha)$ обозначается множество тех элементов $MH^\infty(\Omega)$, которым соответствует характер α. Вопрос о непустоте таких классов обсуждается в [20], гл. 5 § 6. Для каждой точки $p \in \Omega$ и каждого характера $\alpha \in \pi_1(\Omega)^*$ определим

$$m(p, \alpha, \Omega) = \sup\{|f(p)| : f \in H^\infty(\Omega, \alpha), \ \|f\|_\infty \leqslant 1\},$$
$$m(p, \Omega) = \inf\{m(p, \alpha, \Omega) : \alpha \in \pi_1(\Omega)^*\}.$$

Заметим, что если $m(p, \Omega) > 0$, то $H^\infty(\Omega, \alpha) \neq \{0\}$ для всех α.

Областью Бляшке называется дополнение круга $\mathbb{D}$ до счетного числа дизъюнктных континуумов $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ таких, что

(1) если $z_j \in k_j$, $j \in \mathbb{N}$, то все предельные точки последовательности $\{z_j\}$ лежат на $\mathbb{T}$;

(2) можно так выбрать $z_j \in k_j$, что $\Sigma(1-|z_j|) < \infty$.

Следующая теорема, доказанная в [20], гл. 5 § 6, легко получается из критерия Видома [26] непустоты всех $H^\infty(\Omega, \alpha)$.

Теорема. *Если Ω — область Бляшке, то*

$$\forall p \in \Omega \quad m(p, \Omega) > 0. \ ●$$

Будем использовать эту теорему, чтобы построить f и w, удовлетворяющие условиям (7. 6).

Пусть последовательность $\{t_n\}$ точек из $(0, 1)$ очень быстро стремится к 1. Положим $K_n = [t_{2n}, t_{2n+1}]$, $\Omega = \mathbb{D} \diagdown \bigcup\limits_{n\geqslant 1} K_n$. Можно считать, что Ω — область Бляшке,

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ 1\in I}} \frac{\omega(0, I, \Omega)}{|I|} = 0.$$

Пусть u — положительная функция такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} u\,dm = \infty, \qquad \int_{\mathbb{T}} u\,d\omega_\Omega < \infty. \tag{7.7}$$

Положим

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\, d\omega(z, \zeta, \Omega).$$

Функция u — гармоническая в Ω. Пусть $\tilde{u}$ — ее гармонически сопряженная, $F = \exp(-(u + i\tilde{u}))$.

Далее, пусть функции F, $F \in MH^\infty(\Omega)$, соответствует элемент $\alpha \in \pi_1(\Omega)^*$. По теореме множество $H^\infty(\Omega, -\alpha)$ непусто. Пусть $G \in H^\infty(\Omega, -\alpha)$. Тогда $GF \in H^\infty(\Omega)$, из (7.7) следует, что

$$\int_{\mathbb{T}} \log |GF|\, dm = -\infty.$$

Пусть

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{C}), \quad \psi(0) = 1, \quad \psi_z(\zeta) \overset{\text{def}}{=} (1 - |z|)^{-4} \psi\left(\frac{\zeta - z}{(1 - |z|)^2}\right),$$

$$S(z) \overset{\text{def}}{=} \exp\left(-2\, \frac{1 + z}{1 - z}\right).$$

Положим

$$f(z) = S(z) \iint_{\zeta \in \mathbb{D}} \psi_z(\zeta)(GF)(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Определим функцию $\log w(x)^{-1}$, равную x^{-1}, на интервалах $\left[\frac{1}{2}(1 - t_{2n+1}),\ 2(1 - t_{2n})\right]$ и линейную на дополнительных интервалах.

Ясно, что если последовательность $\{t_n\}$ стремится к нулю достаточно быстро, то $\int \log \log w(x)^{-1} dx = \infty$. Ясно также, что $f \mid \mathbb{T} = GF \mid \mathbb{T}$ п. в., поэтому

$$\int_{\mathbb{T}} \log |f(\zeta)|\, dm(\zeta) = -\infty.$$

Оценка $|\bar\partial f(z)| < w(1 - |z|)$ легко выводится из того, что $f \in A(\mathbb{D} \setminus \bigcup \tilde{K}_n)$, где

$$\tilde{K}_n = \bigcup_{z \in K_n} \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant (1 - |z|)^2\}.$$

Таким образом, f и w — искомые.

Литература

[1] **Боричев А. А.** Граничные теоремы единственности для почти аналитических функций и асимметричные алгебры последовательностей // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 7. С. 324—340.

[2] **Боричев А. А.** Сверточные уравнения, инвариантные подпространства и обобщение теоремы Титчмарша. Препринт ЛОМИ, Р-5—88. Л.: ЛОМИ, 1988. 38 с.

[3] **Вольберг А. Л.** Логарифм почти аналитической функции суммируем // ДАН СССР. 1982. Т. 265. С. 1297—1302.

[4] **Вольберг А. Л., Ёрикке Б.** Суммируемость логарифма почти аналитической функции и обобщение теоремы Левинсона—Картрайт // Мат. сб. 1986. Т. 130. С. 335—348.

[5] **Гайер Д.** Аппроксимация в комплексной области. М.: Мир, 1986. 216 с.

[6] **Гарнетт Дж.** Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.

[7] **Дынькин Е. М.** Операторное исчисление, основанное на формуле Коши—Грина, и квазианалитичность классов $D(h)$ // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1970. Т. 19. С. 221—226.

[8] **Дынькин Е. М.** Функции с данной оценкой $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$ и теорема Левинсона // Мат. сб. 1972. Т. 81. С. 182—190.

[9] Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971. 126 с.
[10] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984. 364 с.
[11] Никольский Н. К. Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа // Тр. МИАН. 1974. Т. 120. 272 с.
[12] Никольский Н. К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 199—412.
[13] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
[14] Beurling A. Quasianalyticity and general distributions // Stanford Univ. Lect. Notes, 1961. 61 p.
[15] Beurling A. Analytic continuation across a linear boundary // Acta Math. 1972. Vol. 128. P. 153—182.
[16] Borichev A. A., Volberg A. L. Uniqueness theorems for almost analytic functions. LOMI-preprint, E-5—87. L.: LOMI, 1987. 39 p.
[17] Brennan J. E. Functions with rapidly decreasing negative Fourier coefficients. Preprint. Lexington: Univ. of Kentucky, 1986. 15 p.
[18] Carleman T. Les fonctions quasi-analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926. 55 p.
[19] Cartwright M. L. Some uniqueness theorems // Proc. Lond. Math. Soc. (2). 1936. Vol. 41. P. 33—47.
[20] Fisher St. Function theory on planar domains: A second course in complex analysis. New York: Wiley & Sons, 1983. 269 p.
[21] Koosis P. Volberg's theorem on logarithmic integral. Preprint N 14. Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1984. 20 p.
[22] Koosis P. The logarithmic integral. Vol. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. 450 p.
[23] Levinson N. On the non-vanishing of certain functions // Proc. Nat. Acad. Sci. 1936. Vol. 22. P. 228—229.
[24] Levinson N. Gap and density theorems. New York: AMS Coll. Publ., 1940. 246 p.
[25] Lindquist P., Martio O. Two theorems of N. Wiener for solutions of quasi-linear elliptic equations // Acta Math. 1985. Vol. 155. P. 153—171.
[26] Widom H. $\mathscr{H}_p$ sections of vector bundles over Riemann surfaces // An. of Math. (2). 1971. Vol. 94. P. 304—324.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступила 27 июня 1988 г.