Б. М. Гуревич, В. И. Оселедец, Некоторые математические задачи, связанные с неравновесной статистической механикой бесконечного числа частиц, *Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, 1977, том 14, 5–39

https://www.mathnet.ru/intv31

УДК 519.25:530.1

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С НЕРАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКОЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ.

Б. М. Гуревич, В. И. Оселедец

В этом обзоре мы остановимся на ряде математических работ последних лет, в которых изучается временная эволюция бесконечных систем взаимодействующих частиц. Такую систему естественно представлять себе как результат термодинамического предельного перехода в системе растущего числа частиц. Для задач равновесной статистической механики оказалось очень полезным рассматривать с самого начала бесконечную систему, термодинамические характеристики которой являются пределами соответствующих характеристик допредельных конечных систем. К неравновесному случаю такой подход стал применяться сравнительно недавно, и количество полученных здесь математических результатов невелико.

Состояние бесконечной системы частиц можно отождествить с вероятностной мерой на ее фазовом пространстве. Согласно физическим представлениям, временна́я эволюция является необратимой. Так, по идее Н. Н. Боголюбова, в ходе эволюции система проходит несколько последовательных стадий, на каждой из которых уменьшается число переменных, необходимых для описания ее состояния (имеет место «сокращение описания»). На заключительной стадии эволюции система приходит в состояние равновесия, которое описывается конечным числом макроскопических параметров.

Физиками развиты формальные методы, дающие более детальное описание эволюции системы частиц. Однако получение строгих математических результатов в этой области связано с очень большими трудностями, которые возникают уже при попытке придать точный математический смысл ряду встречающихся здесь понятий. В связи с этим большинство опубликованных математических работ посвящено исследованию тех или иных модельных ситуаций. Некоторые из рассмотренных моделей могут быть истолкованы также на языке химии, биологии, экономики, социологии, кибернетики. При описании этих моделей мы стараемся подчеркнуть их вероятностный аспект.

Не все математические результаты, связанные с темой настоящего обзора, нашли в нем отражение. В частности, мы сознательно ограничились случаем классической статистической механики, оставив в стороне квантовый случай. В то же время в библиографию включен целый ряд физических работ, касающихся, на наш взгляд, принципиальных вопросов. Мы не имели возможности упомянуть в тексте обзора обо всех работах, включенных в библиографию. Не исключено также, что некоторые важные работы ускользнули от нашего внимания. Наконец, на отборе материала сказались научные интересы авторов.

Библиография содержит, в основном, работы, опубликованные в период с 1968-го по 1975-ый год. В ней указан также ряд книг, посвященных неравновесной статистической механике — начиная с фундаментальной монографии Н. Н. Боголюбова [7], впервые изданной в 1946 году, и кончая несколькими недавно вышедшими руководствами. Назовем, в частности, книги Уленбека и Форда [84], Пригожина [66], Фудзиты [87], Д. Н. Зубарева [35], Либова [47], Ю. Л. Климонтовича [43], Балеску [97].

§ 1. ДИНАМИКА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ.

1.1. Первая трудность, с которой приходится сталкиваться при изучении временно́й эволюции бесконечных конфигураций взаимодействующих частиц, состоит в том, что сама эволюция может быть корректно определена, вообще говоря, не для всякой конфигурации. Скажем об этом подробнее.

Произвольная точка фазового пространства $\mathfrak{X}$ рассматриваемой системы есть конечное или счетное множество X пар $x=(q, p)\in X$, где $q\in R^\nu$ и $p\in R^\nu$ интерпретируются соответственно как координата и импульс отдельной частицы в R^ν (в дальнейшем мы будем считать массу равной 1 и отождествлять импульс p со скоростью v; пару $x=(q, v)$ будем называть частицей). В статистической механике имеют дело с неупорядоченными наборами частиц. Если же частицы занумерованы, то возникает фазовое пространство $\tilde{\mathfrak{X}}$, состоящее из последовательностей $\{x_i=(q_i, v_i)\}$, $i=1, 2, \ldots$, и переходящее в $\mathfrak{X}$ при естественном отображении симметризации. Система уравнений движения для занумерованных частиц имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= F_i(t), \end{aligned} \quad i=1, 2, \ldots, N; \quad N\leqslant\infty, \tag{1}$$

где $F_i=\sum_j F(x_i(t), x_j(t))$ — сила, действующая на i-ю частицу. Обычно предполагают, что взаимодействие определяется парным потенциалом U, зависящим лишь от взаимного расположения частиц (или только от расстояния между ними). В этом случае

$$F(x_i(t), x_j(t))=F(q_i(t)-q_j(t))=\left[\frac{\partial}{\partial q_i}U\right](q_i(t)-q_j(t)).$$

Каждому решению системы (1) отвечает траектория в пространстве $\tilde{\mathfrak{X}}$, а ей, в свою очередь, — траектория в $\mathfrak{X}$. Чтобы гарантировать конечность силы, действующей на отдельную частицу, приходится накладывать дополнительные условия как на потенциал, так и на точки фазового пространства, эволюцию которых должна описывать система (1). От потенциала требуется быстрое убывание на бесконечности (например, финитность), а конфигурация частиц предполагается локально-конечной: число частиц в каждой ограниченной области должно быть конечным (и, кроме того, удовлетворять подходящей оценке сверху — в случае нефинитного потенциала). Последнее условие должно выполняться в любой момент времени. Уже отсюда видно, что вопрос о выборе начальных данных $q_i(0)=q_i$, $v_i(0)=v_i$, $i=1, 2, \ldots$, для которых существует и единственно решение системы (1), при $N=\infty$ нетривиален даже в случае, когда функция F обладает высокой степенью гладкости. Заметим также, что физический смысл имеют лишь те решения, к которым в том или ином смысле сходятся при $N\to\infty$ решения аналогичной системы для первых N частиц, когда остальные частицы зафиксированы и создают внешнее поле. Примеры показывают, что, вообще говоря, не для всякой точки $\tilde{X}\in\tilde{\mathfrak{X}}$, которой отвечает локально конечная конфигурация, существует решение системы (1), совпадающее с $\tilde{X}$ при $t=0$ и удовлетворяющее сформулированному выше требованию. В связи с этим усилия ряда авторов сосредоточились на построении в фазовом пространстве $\tilde{X}$ по возможности более массивного множества $\tilde{\mathfrak{X}}'$ начальных данных, для которых существует решение системы уравнений движения, единственное в классе функций, являющихся пределами решений конечных систем.

Впервые такая постановка задачи встречается в работах Лэнфорда [202, 203], где изучены одномерные системы ($\nu=1$) с дважды непрерывно дифференцируемым финитным потенциалом. В [202, 203] множество $\tilde{\mathfrak{X}}'\subset\tilde{\mathfrak{X}}$ (а тем самым и отвечающее ему множество $\mathfrak{X}'\subset\mathfrak{X}$) задается явными условиями на координаты и импульсы частиц. Эти условия ограничивают скорость роста импульса в зависимости от координаты и число частиц на единицу длины. На $\mathfrak{X}'$ задается топология, по отношению к которой $\mathfrak{X}'$ оказывается борелевским множеством. Теорема существования и единственности для системы (1) с начальными условиями из $\tilde{\mathfrak{X}}'$, доказанная в [202], позволяет ввести группу измеримых преобразований $T^t: \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}'$, порожденную сдвигами вдоль решений этой системы (с последующим переходом к неупорядоченным конфигурациям). В [203] указаны условия на вероятностную меру P, заданную на $\mathfrak{X}$ (под $\mathfrak{X}$ всюду в дальнейшем будет пониматься пространство локальноконечных конфигураций), т. е. на состояние системы частиц, гарантирующие равенство $P(\mathfrak{X}')=1$. Эти условия выполняются, в частности, для равновесного распределения Гиббса P_U (общее определение распределения Гиббса см. ниже), отвечающего потенциалу U (при достаточно малом значении активности), и, следовательно, динамика T^t определена почти всюду в смысле этого распределения. Мера P_U оказывается инвариантной относительно T^t, и тем самым возникает сохраняющий меру поток $(\mathfrak{X}', P_U, T^t)$.

В работе Я. Г. Синая [74] другим методом получены аналогичные результаты при более естественных, с физической точки зрения, ограничениях на потенциал U, который, как и в [202, 203], предполагается финитным. Основное отличие состоит в том, что в [74] потенциал должен быть ограничен лишь снизу, причем требуется существование такого $r_0>0$, что $U(r)=+\infty$ при $r<r_0$ (условие твердой сердцевины).

Динамика, построенная Я. Г. Синаем, является кластерной: при всяком t любую допустимую конфигурацию можно разбить на конечные группы частиц (кластеры), каждая из которых в течение фиксированного промежутка времени движется так же, как она бы двигалась в отсутствие других групп. Иными словами, система уравнений (1) с начальными данными из $\tilde{\mathfrak{X}}'$ (множество $\tilde{\mathfrak{X}}'$ в [74] задается иначе, чем в [202], и менее явно), рассматриваемая на фиксированном отрезке времени, распадается на конечные подсистемы. Множество $\mathfrak{X}'$, построенное в [74], имеет полную меру относительно равновесного распределения Гиббса при любых значениях термодинамических параметров.

Результаты Лэнфорда и Я. Г. Синая обобщались в двух направлениях: одно из них связано с отказом от требования финитности взаимодействия, другое — с изучением многомерных систем $(\nu>1)$.

А. Н. Земляков [34] рассмотрел при $\nu=1$ потенциалы с твердой сердцевиной, растущие в ее окрестности степенным образом и так же убывающие на бесконечности. Динамика, построенная в [34], разумеется, не является кластерной. Близкие результаты получили Презутти, Пульвиренти и Тироцци [255].

В работе Я. Г. Синая [77] построена кластерная динамика для бесконечной системы частиц в пространстве любой размерности. Ограничения на потенциал здесь те же, что и в [74]. Что же касается множества $\mathfrak{X}'$, то оно имеет меру 1 относительно любого равновесного распределения с достаточно малой плотностью. Напомним, что в одномерном случае аналогичный результат получен в [74] без каких-либо ограничений на плотность. Указанное различие связано с тем, что в одномерной системе частиц с твердой сердцевиной и быстро убывающим на бесконечности взаимодействием не происходит фазового перехода, и такую систему естественно представлять себе находящейся в газовой фазе. В многомерной же системе даже в случае финитного потенциала, при больших значения плотности, по-видимому, возможен фазовый переход (хотя до сих пор это строго не доказано), и не исключено, что мера множества конфигураций, для которых существует кластерная динамика, зависит от фазы. Если отказаться от требования кластерности, то, как показали Маркиоро, Пеллегринотти и Презутти [220], динамика при любом ν существует на множестве полной меры относительно любого равновесного распределения, иными словами, для любых значений параметров и любой фазы. Условия на потенциал здесь качественно те же, что и в [34, 255]. Лэнфорд [206] получил аналогичные результаты для случая нефинитного, но ограниченного потенциала. В [206] рассматривается также проблема единственности.

Отметим, что во всех работах, появившихся после статей Лэнфорда [202, 203], множество $\mathfrak{X}'$ задается не вполне явно: чтобы точка фазового пространства входила в $\mathfrak{X}'$, должны удовлетворяться определенные ограничения на решения конечных систем уравнений, аппроксимирующие решение системы (1). Недавно Р. Л. Добрушин и Фритц для случая финитного потенциала с твердой сердцевиной и $\nu=1$ дали столь же явное описание множества, на котором существует динамика, что и описание Лэнфорда [202], [203], относящееся к случаю ограниченного потенциала. При этом оказалось, что $\mathfrak{X}'$ имеет полную меру не только относительно равновесного распределения P_U, отвечающего данному потенциалу, но то же самое справедливо для любого потенциала из некоторого достаточно широкого класса, содержащего U. Таким образом, возникает возможность изучать временну́ю эволюцию целого класса начальных состояний, содержащего инвариантное состояние P_U.

В работе Лэнфорда и Либовитца [207] изучена математическая модель неограниченного гармонического кристалла в R^ν, приводящая к системе уравнений типа (1), с силой F_i, линейно зависящей от координат частиц. Указаны множество начальных данных, на котором можно построить динамику, и состояние, инвариантное относительно этой динамики. С вероятностной точки зрения это состояние есть гауссовское случайное поле.

1.2. Традиционный физический способ описывать состояние системы частиц связан с понятием функции распределения (по другой терминологии, корреляционной функции). Приведем соответствующее точное определение в удобных для дальнейшего терминах. Пусть λ — состояние бесконечной системы частиц в R^ν, т. е. вероятностная мера на фазовом пространстве $\mathfrak{X}$, или, что то же самое, точечное случайное поле в R^ν, маркированное векторами из R^ν. Обозначим $\mathfrak{X}^0$ подмножество пространства $\mathfrak{X}$, состоящее из конечных конфигураций; точки из $\mathfrak{X}^0$ будем обозначать $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$. Равенство

$$K_P(A)=\int\limits_{\mathfrak{X}} \sum_{\bar{x}\subset X} \chi_A(\bar{x})\, dP(X),$$

где $A\subset\mathfrak{X}^0$ — произвольное борелевское множество, определяет на $\mathfrak{X}^0$ меру со значениями в $[0, +\infty]$, которую естественно называть корреляционной мерой. Корреляционной функцией (функцией распределения) называется плотность $\rho_P(\bar{x})$ меры K_P относительно меры λ на $\mathfrak{X}^0$, задаваемой формулой $d\lambda(\bar{x})=$ $=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n} dq_i dv_i$, где $\bar{x}=(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n)$. Вместо функции $\rho(\bar{x})=\rho_P(\bar{x})$, $\bar{x}\in\mathfrak{X}^0$, можно рассматривать последовательность симметричных функций

$$\rho_P(x_1, \ldots, x_n)=\rho_P^{(n)}(q, v_1, \ldots, q_n, v_n), \quad n=1, 2, \ldots,$$

называемых n-частичными функциями распределения.

1.3. Эволюция состояния системы, порожденная взаимодействием между частицами, описывается корреляционными функциями, зависящими от времени. Согласно Н. Н. Боголюбову [7], эти функции удовлетворяют следующей бесконечной системе интегро-дифференциальных уравнений (цепочке уравнений Боголюбова):

$$\frac{\partial\rho^{(n)}}{\partial t}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n)\frac{\partial\rho^{(n)}}{\partial v_i}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t)-\right.$$

$$-\frac{\partial H}{\partial v_i}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n)\frac{\partial\rho^{(n)}}{\partial q_i}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t)-$$

$$-\int\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i}(|q_i-q_{n+1}|)\left[\frac{\partial\rho^{(n+1)}}{\partial v_i}(q_1, v_1, \ldots, q_{n+1}, v_{n+1}, t)-\right.$$

$$-\frac{\partial\rho^{(n+1)}}{\partial v_{n+1}}(q_1, v_1, \ldots, q_{n+1}, v_{n+1}, t)\Big], \quad q_i, v_i \in R^\nu, \ n=1, 2, \ldots, \quad (2)$$

где U — потенциал парного взаимодействия, зависящий только от расстояния, и

$$H(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 + \sum_{i<j} U(|q_i - q_j|) - \quad (3)$$

энергия конфигурации частиц. Цепочку уравнений Боголюбова можно переписать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(\bar{x}, t) = \{H(\bar{x}), \ \rho(\bar{x}, t)\} - \int \{U(\bar{x} \mid (q, v), \ \rho(\bar{x} \cup (q, v), t)\},$$

$$\bar{x} \in \mathfrak{X}^0, \ q, \ v \in R^\nu. \quad (4)$$

При выводе цепочки (2) обычно формально делается термодинамический предельный переход в аналогичной цепочке уравнений для конечного числа частиц в конечном объеме, которая в этом случае эквивалентна уравнениям движения.

1.4. Теоремы о существовании динамики, упомянутые в пункте 1.1, позволяют в некоторых случаях строить решение цепочки (2). Для этого надо в качестве начального состояния $P(0)$ выбрать меру, сосредоточенную на множестве $\mathfrak{X}'$, где существует динамика T^t. При некоторых ограничениях типа регулярности на $P(0)$ и T^t удается доказать, что корреляционные функции состояния T^tP, где $(T^tP)(A) = P(T^tA)$, $A \subset \mathfrak{X}'$, удовлетворяют цепочке (2).

Проблеме существования и единственности решений цепочки уравнений Боголюбова (в случае классической статистической механики) посвящены работы Галлавотти, Лэнфорда и Либовитца [145], Д. Я. Петрины и О. К. Видыбиды [64], Видыбиды [297] Я. Г. Синая и Ю. М. Сухова [78]. В полной общности эта проблема до сих пор не решена.

По-видимому, временную эволюцию более естественно описывать с помощью цепочки уравнений Боголюбова, а не обращаясь непосредственно к решениям системы уравнений движения. Это связано, в частности, с тем, что в (2) входят функции лишь конечного (хотя и растущего) числа переменных и на них не обязательно должны сказываться аномалии, возникающие при движении отдельных бесконечных конфигураций.

1.5. Как известно, по корреляционным функциям $\rho_P^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, как правило, однозначно восстанавливается состояние P, причем сами $\rho_P^{(n)}$ удовлетворяют ряду условий согласованности. Существует другой подход к определению состояния бесконечной системы, при котором оно задается хотя и неявно, но зато с помощью «независимых» параметров. Этот подход основан на понятии гиббсовской меры (гиббсовского случайного поля), введенном Р. Л. Добрушиным (и независимо

Лэнфордом и Рюэлем). Приведем соответствующее определение, опуская второстепенные детали.

Пусть f — измеримая функция на пространстве $\mathfrak{X}^0$ со значениями в $R^1 \cup \{+\infty\}$ и

$$h(\bar{x}) = \sum_{\bar{z} \subset \bar{x}} f(\bar{z}), \quad h(\bar{x} \mid Y) = \sum_{\substack{\bar{z} \subset \bar{x} \cup Y, \\ \bar{z} \cap \bar{x} \neq \varnothing, \ \bar{z} \cap Y \neq \varnothing}} f(\bar{z}),$$

где $\bar{x}$ и Y — любые конфигурации из $\mathfrak{X}^0$ и $\mathfrak{X}$ соответственно.

Вероятностная мера P на $\mathfrak{X}$ называется гиббсовским случайным полем с порождающей функцией (обобщенным потенциалом) f, если для любого ограниченного борелевского множества $\Omega \subset R^{\nu}$ условное распределение координат и скоростей частиц внутри Ω при условии, что фиксированы координаты и скорости вне Ω, задается плотностью относительно меры λ и эта плотность имеет вид $\Xi^{-1} \exp[-h(\bar{x}_{\Omega}) - h(\bar{x}_{\Omega} \mid Y_{\Omega^c})]$, где $\bar{x}_{\Omega}$ и Y_{Ω^c} — конфигурации внутри и вне Ω соответственно, и $\Xi = \Xi(Y_{\Omega^c})$ — нормирующий множитель. Равновесному распределению для системы с гамильтонианом (3) отвечает порождающая функция $f(\bar{x})$, соответственно равная $\frac{1}{2}\beta(v - v_0) + \beta\mu$ — для любой одночастичной конфигурации $\bar{x} = (q, v)$; $\beta U(|q_1 - q_2|)$ — для двухчастичной конфигурации $\bar{x} = (q_1, v_1) \cup (q_2, v_2)$; 0 — в остальных случаях. Скалярные параметры β, μ связаны со средней энергией и средней плотностью частиц, а вектор v_0 — средняя скорость. Неединственность гиббсовской меры с данной порождающей функцией интерпретируется как фазовый переход в рассматриваемой системе. Порождающую функцию f (как и корреляционную) можно заменить последовательностью симметричных функций $f^{(n)}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, n — частичных порождающих функций.

1.6. Б. М. Гуревич и Ю. М. Сухов [21] (см. также [22, 165, 166]) рассмотрели вопрос о стационарных решениях цепочки уравнений Боголюбова в классе гиббсовских состояний (достаточно общие условия на состояние, при которых оно является гиббсовским, найдены О. К. Козловым [45]). В [165] доказано, что если порождающая функция f гиббсовского состояния P удовлетворяет некоторым условиям регулярности и его корреляционные функции $\rho_P^{(n)}$ образуют стационарное решение цепочки уравнений Боголюбова, то последовательность $f^{(n)}$ является стационарным решением следующей цепочки дифференциальных уравнений, которую можно рассматривать как сопряженную к (2):

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t) = \{H(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n),$$

$$f^{(n)}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t)\} + \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j\neq 1}^{n} U(|q_i - q_j|),\right.$$

$$\left. f^{(n-1)}(q_1, v_1, \ldots, q_{i-1}, v_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n, v_n, t)\right\}, \ n = 1, 2, \ldots. \quad (5)$$

В отличие от (2), уравнения в (5) зацеплены не сверху, а снизу (в n-е уравнение входят n-я и n—1-я функции). Другое важное обстоятельство состоит в том, что цепочка (5) может обрываться, что имеет место, например, для равновесного распределения, в то время как цепочка (4) бесконечна в любом нетривиальном случае. В [21] описаны все стационарные решения цепочки (5) в случае ее обрыва. Ими могут быть лишь равновесные распределения Гиббса. Условия на потенциал здесь по существу те же, что в работе Я. Г. Синая [77]. Упомянутые результаты дают описание всех инвариантных мер динамики T^t, принадлежащих некоторому классу гиббсовских мер. Они справедливы для любой размерности ν. В [23] Б. М. Гуревич, Я. Г. Синай и Ю. М. Сухов для $\nu=1$ получили аналогичные результаты, касающиеся инвариантных мер, исходя непосредственно из динамики, построенной в работе Я. Г. Синая, а не из цепочки уравнений Боголюбова.

Вопрос об асимптотическом (при $t\to\infty$) поведении состояния $P(t)$, эволюция которого описывается цепочкой Боголюбова, представляет большой интерес, но очень мало изучен. Упомянутые выше результаты позволяют лишь охарактеризовать множество состояний, к которым может сходиться $P(t)$, если такая сходимость вообще имеет место в общем случае (речь, по-видимому, может только идти о сходимости в каком-то достаточно слабом смысле).

1.7. Если начальное состояние $P(0)$ абсолютно непрерывно относительно равновесного (и, следовательно, инвариантного) состояния P_0, то вопрос о поведении $P(t)$ при $t\to\infty$ сводится к вопросу об эргодических свойствах динамической системы ($\mathfrak{X}'$, P_0, S_t). Эти свойства хорошо изучены лишь для систем с тривиальным (идеальный газ) или в каком-то смысле почти тривиальным взаимодействием (см. [75, 92, 145, 156, 157, 158, 247], а также обзор А. Б. Катка, Я. Г. Синая и А. М. Степина в сб. Итоги науки, 13 Математический анализ).

1.8. В заключение этого параграфа отметим, что наряду с обычной («детерминированной») динамикой в фазовом пространстве $\mathfrak{X}$ можно рассматривать «вероятностную» (марковскую) динамику, которая представляет собой марковский процесс с пространством состояний $\mathfrak{X}$. Насколько нам известно, каких-либо общих результатов в этом направлении пока нет. В § 3 будут кратко описаны некоторые модели марковской динамики, в которых роль пространства состояний играет множество функций на решетке.

§ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ БОЛЬЦМАНА

2.1. Обычный физический вывод уравнения Больцмана основан на подсчете числа частиц, входящих и выходящих за малое время в малый объем фазового пространства вследствие парных столкновений. Предполагая, что одночастичная функция распределения медленно меняется и составляя уравнение баланса, приходят к соотношению между «сглаженными» («медленными», «крупноструктурными») функциями распределения (см., например, [47]):

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_1}{\partial t}(q_1, v_1, t) = -v_1\frac{\partial\tilde{\rho}_1}{\partial q_1}(q_1, v_1, t) + \int_{R^3} dv_2 \int_{\{\omega\in S^2:\ \langle\omega, v_1-v_2\rangle\geq 0\}} d\omega\, \times$$
$$\times |v_1-v_2|\,\sigma(v_1-v_2, \omega)\left[\tilde{\rho}_2(q_1, v_1', q_1, v_2', t) - \tilde{\rho}_2(q_1, v_1, q_1, v_2, t)\right], \quad (1)$$

где

$$v_1' = v_1 - \langle\omega, v_1-v_2\rangle\,\omega, \quad v_2' = v_2 + \langle\omega, v_1-v_2\rangle\,\omega,$$

а $\sigma(v_1-v_2, \omega)$ — дифференциальное сечение рассеяния, которое определяется потенциалом парного взаимодействия.

Если предположить, что выполнено условие молекулярного хаоса: $\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_1\otimes\tilde{\rho}_1$, т. е. $\tilde{\rho}_2(q_1, v_1, q_2, v_2, t) = \tilde{\rho}_1(q_1, v_1, t)\,\tilde{\rho}_1(q_2, v_2, t)$, то соотношение (1) превращается в замкнутое уравнение — кинетическое уравнение Больцмана.

Рассуждение, аналогичное тем, которые приводят к (1), позволяют написать следующую цепочку уравнений (больцмановскую цепочку) для «сглаженных» функций распределения любого порядка:

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_n}{\partial t}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t) = -\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial\tilde{\rho}_n}{\partial q_i}(v_1, q_1, \ldots, q_n, v_n, t) +$$
$$+ \int_{R^3} dv_{n+1} \int_{\{\omega\in S^2:\ \langle\omega, v_i-v_{n+1}\rangle\geq 0\}} \sum_{i=1}^{n} |v_i - v_{n+1}|\,\sigma(v_i-v_{n+1}, \omega)\,\times$$
$$\times\left[\tilde{\rho}_{n+1}(q_1, v_1, \ldots, q_{i-1}, v_{i-1}, q_i, v_i', \ldots, q_i, v_{n+1}', t) -\right.$$
$$\left. - \tilde{\rho}_{n+1}(q_1, v_1, \ldots, q_{i-1}, v_{i-1}, q_i, v_i, \ldots, q_i, v_{n+1}, t)\right],$$

где

$$v_i' = v_i - \langle\omega, v_i-v_{n+1}\rangle\,\omega, \quad v_{n+1}' = v_{n+1} + \langle\omega, v_i-v_{n+1}\rangle\,\omega,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (2)$$

По-видимому, впервые эта цепочка была выписана В. Н. Жигулевым [33, 32]. Для случая твердых шаров, когда $|v_1-v_2|\,\sigma(v_1-v_2, \omega) = a^2\langle v_1-v_2, \omega\rangle$ цепочка (2) выписана также Лэнфордом [206]. С математической точки зрения, больцмановская цепочка замечательна тем, что ее можно рассматривать как линеаризацию уравнения Больцмана в следующем смысле если $\tilde{\rho}_1$ удовлетворяет уравнению Больцмана, то набор функций

$$\tilde{\rho}_n(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t) = \tilde{\rho}_1(q_1, v_1, t) \ldots \tilde{\rho}_1(q_n, v_n, t) \qquad (3)$$

есть решение цепочки (2). Такое решение будем называть пуассоновским.

2.2. Следующее утверждение обычно называют теоремой Каца ([42, 32]): если решение $\{\tilde{\rho}_n, n=1, 2, \ldots\}$ цепочки (2) удовлетворяет условию (3) при $t=0$, то оно пуассоновское (говорят также о сохранении молекулярного хаоса во времени). Такахаси [275] заметил, что подобного рода утверждения для некоторых цепочек уравнений больцмановского типа вытекает из алгебраических свойств таких уравнений. Сейчас мы продемонстрируем это на примере самой цепочки (2), действуя чисто формально и игнорируя встречающиеся по пути многочисленные математические трудности, в частности, проблему существования решений сингулярность оператора $\mathscr{L}^*$ (см. ниже).

Для удобства введем функцию $\tilde{\rho}_0(t)$ и добавим к (2) уравнение $\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t} = 0$. Полученную цепочку можно записать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = \mathscr{L}\tilde{\rho}, \qquad (4)$$

где $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \ldots)$. Формальное решение этого уравнения есть $\tilde{\rho}(t) = \exp(t\mathscr{L})\tilde{\rho}(0)$. Множество $\mathscr{R}$ векторов $\tilde{\rho}$ образует алгебру относительно операций покоординатного сложения и свертки:

$$(\tilde{u} * \tilde{v})_n (q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n) =$$
$$= P \sum_{k=0}^{n} \tilde{u}_k (q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k)\, \tilde{v}_{n-k} (q_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, q_n, v_n),$$

где P — оператор симметризации (на $n!$ делить не надо). Пусть $\mathscr{L}^*$ — оператор, формально сопряженный к $\mathscr{L}$ относительно скалярного произведения:

$$\langle \tilde{\rho}, \tilde{u} \rangle = \tilde{\rho}_0 \tilde{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \tilde{\rho}_n (q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n)\, \tilde{u}_n (q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n) \times$$
$$\times \frac{dq_1 dv_1 \ldots dq_n dv_n}{n!}.$$

Формальная проверка показывает, что $\mathscr{L}^*$ есть дифференцирование в $\mathscr{R}$. Отсюда следует равенство

$$\exp(tL^*)[\tilde{u} * \tilde{v}] = \exp(tL^*)[\tilde{u}[* \exp(tL^*)]\tilde{v}].$$

Вектор $\tilde{\rho}$ является пуассоновским (это означает, что $\tilde{\rho} = (1, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\rho}_1 \otimes \tilde{\rho}_1, \ldots)$ тогда и только тогда, когда $\langle \tilde{\rho}, \tilde{u} * \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{\rho}, \tilde{u} \rangle \langle \tilde{\rho}, \tilde{v} \rangle$). Если $\tilde{\rho}(0)$ — пуассоновский вектор, то $\langle \exp(t\mathscr{L}) \tilde{\rho}(0), \tilde{u} * \tilde{v} \rangle = \langle \tilde{\rho}(0), \exp(t\mathscr{L}^*)[\tilde{u}] * \exp(t\mathscr{L}^*)[\tilde{v}] \rangle = \langle \tilde{\rho}(0), \exp(t\mathscr{L}^*)[\tilde{u}] \rangle \langle \tilde{\rho}(0), \exp(t\mathscr{L}^*)[\tilde{v}] \rangle = \langle \exp(t\mathscr{L}) \tilde{\rho}(0), \tilde{u} \rangle \langle \exp(t\mathscr{L}) \tilde{\rho}(0), \tilde{v} \rangle$, и, следовательно, $\tilde{\rho}(t) = \exp(t\mathscr{L}) \tilde{\rho}(0)$ — пуассоновское решение.

Большое количество примеров цепочек, аналогичных (2), для которых приведенные выше рассуждения можно сделать корректными, извлекается из работы Танаки [280]. В качестве типичного примера у Такахаси [275] рассматривается цепочка уравнений Каца [42] («карикатура Каца»):

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_n}{\partial t}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \int\limits_{R^1} dv_{n+1} \int\limits_{S^1} d\omega \, [\tilde{\rho}_{n+1}(v_1, \ldots, v_2', \ldots, v_{n+1}') -$$

$$- \tilde{\rho}_{n+1}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_{n+1})],$$

где

$$v_i' = v_i \cos\omega + v_{n+1} \sin\omega, \quad v_{n+1}' = -v_i \sin\omega + v_{n+1} \cos\omega.$$

Интересная особенность этой цепочки состоит в том, что соответствующей ей «уравнение Больцмана» явно решается. Решение выписано в работе Маккина [226].

2.3. *Уравнение* (4) *принадлежит к типу основных кинетических уравнений.* Впервые вероятностная модель для вывода подобных уравнений была указана М. А. Леонтовичем [46] в работе 1935 года. Позднее Кац [42] использовал ту же модель для вывода уравнения (4) в случае, когда ρ не зависит от координат, одновременно выразив сомнение в возможности вероятностной трактовки этого уравнения в пространственно-неоднородном случае (см. по этому поводу также [4, 104]).

В книге Пригожина [66] детально изложены формальные способы получения основных кинетических уравнений. Мы уже упоминали о работе В. Н. Жигулева [32], в которой содержится физический вывод больцмановской цепочки из цепочки уравнений Боголюбова (см. также [88]).

2.4. *Лэнфорд* [206] *дал строгий вывод основного кинетического уравнения* (4) *для системы твердых шаров.* Следуя идее Грэда (см. [89, 47]), Лэнфорд показал, что в случае твердых шаров больцмановская цепочка получается из цепочки уравнений Боголюбова в так называемом пределе Больцмана-Грэда, правда, лишь на конечном интервале времени. Сформулируем результаты Лэнфорда, изложенные в [206], более подробно (следует сказать, что доказательства некоторых утверждений в [206] только намечены).

Пусть d — диаметр твердых шаров и $\{\rho_n^{(d)}\}$ — набор функций распределения, удовлетворяющих цепочке уравнений Боголюбова. Идея Грэда — Лэнфорда состоит в том, что функции $\tilde{\rho}_n = \lim\limits_{d \to 0} d^{2n} \rho_n^{(d)}$ должны давать решение цепочки (2), удовлетворяющее теореме Каца. Фактически, в [206] предполагается, что функции $\rho_n^{(d)}$ соответствуют системе N шаров в фиксированном конечном объеме, однако указывается, что полученные результаты справедливы и в общем случае. В пределе Больцмана — Грэда $Nd^2 \to \mathrm{const}$ при $d \to 0$.

На $\rho_n^{(d)}$ при $t=0$ наложены следующие условия:

1. $\rho_n^{(d)}$ — борелевская функция, $n = 1, 2, \ldots$.

2. $|d^{2n} \rho_n^{(d)}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, 0)| \leqslant C^n \exp\left\{-\beta \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2\right\}$, где константы $C, \beta > 0$ не зависят от d.

3. Существует предел $\tilde{\rho}_n = \lim\limits_{d \to 0} d^{2n} \rho_n^{(d)}$, функция ρ_n непрерывна и сходимость равномерна на каждом компакте.

При этих условиях для почти всех $(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n)$ и любого $t \in (0, t_0)$ существует предел

$$\lim_{d \to 0} d^{2n} \rho_n^{(d)}(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t) = \tilde{\rho}_n(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n, t),$$

причем $\{\rho_n\}$ — решение больцмановской цепочки и для него справедлива теорема Каца. Константа t_0 зависит от начального распределения.

Под решением цепочки уравнений Боголюбова понимается вектор $\{\rho_n^{(d)}\}$, где $\rho_n^{(d)}$, $n = 1, 2, \ldots$ есть сумма ряда, который получается при итерациях соответствующих интегральных уравнений. Аналогичный смысл имеет решение $\{\tilde{\rho}_n\}$ больцмановской цепочки.

2.5. В связи с результатами Ленфорда сделаем одно замечание. Пусть на фазовом пространстве задана вероятностная мера (состояние системы частиц). Обозначим $N(\Delta)$ число частиц в ограниченном множестве Δ одночастичного фазового пространства и пусть $\overline{N}(\Delta)$ — среднее значение случайной величины $N(\Delta)$ (среднее число частиц в Δ). Из соотношения $d^2 \rho_1^{(d)} \to \tilde{\rho}_1$ при $d \to 0$ вытекает, что $d^2 \overline{N}(\Delta) \to \int\limits_{\Delta} \tilde{\rho}_1 dq dv$. Если последнее выражение положительно, то средний объем, занимаемый частицами из Δ, имеет порядок d, а средняя длина свободного пробега — порядка константы. Таким образом, в пределе Больцмана — Грэда мы получаем нечто вроде «идеального газа» с конечной длиной свободного пробега. Вероятностная природа этого предельного объекта (если ему вообще можно придать точный математический смысл) в настоящий момент неясна. В связи с этим представляет интерес вопрос о существовании динамики (с необходимостью вероятностной) в пространстве конфигураций, которая порождает эволюцию состояний, описываемую больцмановской цепочкой.

2.6. Для «карикатуры Каца» вероятностная динамика построена в работе Такахаси [275]. Эта динамика является марковским процессом типа процесса чистой гибели (марковским процессом с простым взаимодействием — по терминологии Такахаси [275]). Близким вопросам посвящены работы [29, 30, 31, 57, 58, 4], связанные с моделированием уравнения Больцмана по методу Монте-Карло.

2.7. Существует тесная связь между вероятностными моделями для больцмановской цепочки и вероятностными моделями для уравнения Больцмана.

В работе Маккина [224] предложен подход к исследованию уравнений типа уравнения Больцмана, основанный на введенном им понятии нелинейного марковского процесса. Такой процесс можно определить как самосогласованное семейство однородных марковских мер P_f, где f пробегает множество вероятностных распределений на пространстве состояний (и совпадает с распределением в начальный момент). Требование самосогласованности состоит в том, что переходная функция $P_f(t, x, \Gamma)$ зависит лишь от распределения в момент t.

Для нелинейного марковского процесса с непрерывным временем одномерное распределение вероятностей $f(t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению $\frac{\partial f}{\partial t} = Bf$. Для ряда конкретных примеров Маккин [226] построил по оператору B соответствующие нелинейные марковские процессы. Типичный пример такого рода — «максвеловский газ с двумя значениями скорости» (о газе с дискретными скоростями см. [20, 148, 149]):

$$\frac{\partial f}{\partial t}(v_1, t) = \int_{S^0} dv_2 \int_{S^0} d\omega\, [f(v_1', t)\, f(v_2', t) - f(v_1, t)\, f(v_2, t)], \tag{6}$$

где $S^0 = \{-1, 1\}$, $v_1' = v_1 v_2$ при $\omega = 1$ и $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2 v_1$ при $\omega = -1$. Под интегрированием здесь понимается суммирование.

Решение уравнения (6) имеет вид (см. [226]):

$$f(v, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} f^{(n)}(v, 0), \tag{7}$$

где $f^{(n)}(v, 0)$ — n-я свертка функции $f(v, 0)$. Свертка определяется естественным умножением в S^0. Правая часть равенства (7) называется суммой Вайлда для уравнения (6). Для настоящего максвеловского газа с обрезанным потенциалом явное решение уравнения Больцмана было получено Вайлдом, в 1951 году [301]. Разумеется, его результат относится к пространственно-однородному случаю. Нелинейные марковские процессы с двумя состояниями изучал Джонсон [198]. Более общий случай рассматривал Уено [287, 288, 289]. Подход Маккина использовался в работах Огавы [242, 243] при рассмотрении некоторых нелинейных параболических уравнений типа уравнений химической кинетики (см. также [224, 228, 99]).

2.8. Обобщая результаты Уено, Танака в [280] рассмотрел нелинейное уравнение вида:

$$\frac{\partial \overline{N}}{\partial t} = B\overline{N}, \tag{8}$$

где $\overline{N}$ — вероятностная мера на измеримом пространстве V, а оператор B действует по правилу:

$$(B\overline{N})(\cdot) = \int\limits_V \overline{N}(dv)\, B_{\overline{N}}(v, \cdot).$$

Ядро $B_{\overline{N}}(v, \Gamma)$ есть измеримая функция от v при фиксированном Γ и конечная мера на V при фиксированном v. На дополнении к одноточечному множеству $\{v\}$ эта мера неотрицательна и $B_{\overline{N}}(v, V) = 0$. Такое ядро Танака называет ядром Колмогорова—Феллера. В [280] изучается уравнение (8), для которого

$$B_{\overline{N}}(v, \Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_V \ldots \int\limits_V \overline{N}(dv_1) \ldots \overline{N}(dv_n)\, B_n^{(v_1, \ldots, v_n)}(v, \Gamma). \tag{9}$$

Ядро B_n в (9) есть ядро Колмогорова—Феллера при любых $n \geqslant 1$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Функции B_n при фиксированном Γ измеримы по $(v_1, \ldots, v_n, v)$ и симметричны по $(v_1, \ldots, v_n)$. Кроме того, требуется, чтобы выполнялись условия:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty, \text{ где } q_n = \sup_{(v, v_1, \ldots, v_n)} B_n^{(v_1, \ldots, v_n)}(v, V - \{v\}),$$

$$\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \left[q - \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^n \right]^{-1} dx = \infty, \ \varepsilon \in (0, 1). \tag{10}$$

Меру $\overline{N}(\Gamma)$ можно интерпретировать как среднее число частиц в Γ для «газа», описываемого «уравнением Больцмана» (8). С «физической» точки зрения, (9) означает, что рассматривается случай кратных столкновений (не только парных). Танака [280] получил обобщенную сумму Вайлда для решения уравнения (8). Обобщенная сумма Вайлда связана с некоторым ветвящимся процессом. Последнее условие в (10) означает, что в этом процессе за конечное время не может родиться бесконечное число частиц. В упомянутой выше работе Маккина [226] соответствующий ветвящийся процесс есть простейший процесс Гальтона — Ватсона. Танака построил нелинейный марковский процесс, ассоциированный с уравнением (8). При этом, фактически, он построил вероятностную динамику для больцмановской цепочки, соответствующей уравнению (8). На примере уравнения (8) легко объяснить подход М. А. Леонтовича к уравнениям типа уравнения Больцмана. «Основное кинетическое уравнение Леонтовича — Каца», соответствующее уравнению (8), имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{N}_n}{\partial t}(\Gamma,\ t)=\int\limits_{V^n}\overline{N}(dv_1,\ \ldots,dv_n,\ t)\sum_{w=1}^{n-1}\frac{1}{n^w}\sum\nolimits_*\int\limits_V B_w^{(v_{i_1},\ \ldots,\ v_{i_w})}(v_i,\ dv)\times$$

$$\times\chi_\Gamma(v_1,\ \ldots,v_{i-1},\ v,\ v_{i+1},\ \ldots), \tag{11}$$

где χ_Γ — индикатор множества $\Gamma\subset V^n=\underbrace{V\times\ldots\times V}_{n\text{ раз}}$, а Σ_* есть сумма по всем $(i,i_1,\ldots,i_w)$ таким, что $1\leqslant i,\ i_1,\ldots,i_w\leqslant n$, и все $i,\ i_1,\ldots,i_w$ различны.

Уравнению (11) соответствует обычный марковский процесс в V^n. Этот процесс дает вероятностную динамику n частиц в V. При $n\to\infty$ («в пределе Больцмана — Грэда») эта динамика слабо сходится к динамике, определяемой больцмановской цепочкой для уравнения (8). Если при $t=0$ мера $\overline{N}_n(dv_1,\ldots,dv_n,0)=\overline{N}(dv_1)\ldots\overline{N}(dv_n)$, то

$$\int\varphi(v_1,\ \ldots,v_k)\,\overline{N}_n(dv_1,\ \ldots,dv_k,\ dv_{k+1},\ \ldots,dv_n,\ t)\underset{n\to\infty}{\to}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to}\int\varphi_1(v_1,\ldots,v_k)\,\overline{N}(dv_1,t)\ldots\overline{N}(dv_k,\ t), \tag{12}$$

где $\overline{N}(\cdot,t)$ — решение уравнения (8) с начальным условием $\overline{N}(\cdot,0)=\overline{N}(\cdot)$.

2.9. Соотношение (12) и есть свойство сохранения молекулярного хаоса в исходной формулировке Каца [42] (см. также [161, 278, 279, 281, 291, 249, 250, 99, 226, 2]).

С точки зрения, принятой в настоящем обзоре, свойство сохранения молекулярного хаоса есть свойство предельной динамики, управляемой больцмановской цепочкой, а (12) отражает то обстоятельство, что допредельная динамика слабо сходится к предельной.

2.10. Отметим еще, что в [284] Танака анонсировал теорему о существовании нелинейного марковского процесса, соответствующего уравнению Больцмана для максвелловского потенциала без обрезаний (в однородном случае).

2.11. Вопрос о возможности вероятностной трактовки уравнения Больцмана в общем случае упирается, в частности, в вопрос о существовании и единственности решений уравнения Больцмана.

В классической работе Карлемана [41] доказана теорема существования и единственности в однородном случае для газа твердых шаров.

А. Я. Повзнер [65] рассмотрел «сглаженное» уравнение Больцмана, частным случаем которого является уравнение Больцмана с ограниченным дифференциальным сечением рассеяния в пространственно-однородном случае. Он доказал теорему существования и единственности. Его результаты использовались Танакой [284] для построения нелинейного марковского процесса, ассоциированного с пространственно-однородным уравнением Больцмана. А. Я. Повзнер [65] понимает под решением уравнения Больцмана решение соответствующего интегрального уравнения. Дифференциальные свойства решений изучались Блазио [122] и Н. Б. Масловой и Р. П. Чубенко [51] при некоторых условиях на дифференциальное сечение рассеяния (твердые шары и «быстро убывающие» потенциалы удовлетворяют этим условиям). См. также работу Аркеруда [94].

Для пространственно-неоднородного уравнения Больцмана существование и единственность решения «в малом» было установлено Грэдом [159] для функции распределения газа, близкого к равновесию.

Н. Б. Маслова и Р. П. Чубенко [51] дали доказательство теоремы существования и единственности на промежутке времени, зависящем от начального условия. Пространство, в котором ищется решение, есть пространство H_k измеримых функций, удовлетворяющих неравенству:

$$\|f\|_k = \sup (1+v^2)^{+K/2} \, |f(q, v, t)| < \infty,$$

где sup берется по всем q, $v \in R^3$ и $t \in [0, T]$, а $K \geqslant K_0$.

Недавно Н. Б. Маслова и А. Н. Фирсов [52], [53] доказали теорему об однозначной разрешимости в целом для пространственно-неоднородного уравнения Больцмана в случае газа, близкого к равновесию. Функция распределения f записывается в виде: $f = f0 + \sqrt{f_0} F$, где f_0 — равновесная функция распределения Максвелла. Требуется, чтобы функция F_0 $F(q, v, 0)$ удовлетворяла следующим условиям:

1. $F_0 \in H_{K,\infty,2} \cap H_{K,1,2} \cap H_{K,2,5}$,

2. $\|F_0\|_{K,\infty,2} + \|F_0\|_{K,1,2} + \|F_0\|_{K,2,5} \leqslant C_0$,

где C_0 — некоторая константа.

$H_{K,p,l}$ — банахово пространство измеримых функций $F(q, v)$, которые при фиксированном q принадлежат H_K, а при фиксиро анном v принадлежат пространству $W^l_p(R^3)$.

Существует единственное решение $f(q, v, t)$, для которого $F(t) = F(q, v, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ F(t) \text{ непрерывна по } t \text{ на } (0, \infty),$$

$$2.\ \text{при любом } t,\ F(t) \in H_{K,\infty,2} \cap H_{K,2,5},$$

$$3.\ \sup_{t \geqslant 0} (1+t)^{9/8} \| F(t) \|_{K,\infty,2} + \sup_{t \geqslant 0} (1+t)^{3/8} \| \dot{F}(t) \|_{K,2,2} + \sup_{t \geqslant 0} \| F(t) \|_{K,2,5} \leqslant C < \infty.$$

Доказано, что функция $F(t)$ непрерывно дифференцируема по t и $f(q, v, t) \geqslant 0$.

Доказано также, что $f(q, v, t) \to f_0(q, v)$ при $t \to +\infty$ и дана степённая оценка скорости сходимости. Близкие результаты получены в работе Блазио [123] (см. также работу Укаи [294]) для пространственно-неоднородного уравнения Больцмана с периодическими граничными условиями. Доказано, что для большого класса начальных данных решение уравнения Больцмана сходится к равновесной функции распределения Максвелла с экспоненциальной скоростью.

Предельные свойства решений уравнения Больцмана в пространственно-однородном случае изучались Н. Б. Масловой, Р. П. Чубенко [49].

2.12. Асимптотическая теория решений линеаризованного уравнения Больцмана в связи с задачами гидродинамики построена Грэдом [56]. Этому уравнению можно придать вероятностный смысл, связав его с марковским процессом в одночастичном фазовом пространстве. Еще более простые марковские процессы получаются в моделях газа, где скорости частиц принимают лишь конечное число значений. Кинетической теории газов с дискретными скоростями посвящены работы [20, 148, 149].

2.13. Маккин [225] исследовал разложение Чепмена — Энскога — Гильберта, которое обычно используется для вывода уравнений гидродинамики из уравнения Больцмана (см. также работу [227]), на простом примере газа с двумя скоростями, принимающими два значения. В этом примере «линеаризованное уравнение Больцмана» имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(q, v, t) = -v \frac{\partial f}{\partial q}(q, v, t) + \frac{1}{\varepsilon}[-f(q, v, t) + f(q, -v, t)],$$

где $v = \pm 1$, $\varepsilon > 0$.

Для этого уравнения Маккин определяет понятие «точного гидродинамического оператора», «оператора Чэпмена — Энскога» и находит явно эти операторы. Эллис [127] рассматривает марковский процесс, отвечающий «линеаризованному уравнению

Больцмана» вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(q, v, t)+v\frac{\partial f}{\partial q}(q, v, t)=\frac{1}{\varepsilon}(D^*f)(q, v, t), \tag{13}$$

где v принимает конечное число значений $v_1, \ldots, v_N$, а оператор D есть инфинитезимальный оператор марковского процесса на множестве $v_1, v_2, \ldots, v_N$. Он изучает сходимость разложения Чэпмена — Энскога — Гильберта для этого уравнения и класс решений Гильберта. В другой работе Эллиса [128] с аналогичной точки зрения рассматривается процесс Орнштейна — Уленбека. «Уравнение Больцмана» здесь имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

«Уравнение Навье — Стока» совпадает в этом случае с уравнением теплопроводности. Асимптотика решений уравнений типа уравнения (13) и, в частности, «выход на гидродинамический режим» при $\varepsilon\to 0$, изучалась в работе Эллиса и Пинского [131] (см. также [130, 135]). «Гидродинамическое» поведение таких решений при $\varepsilon\to 0$ связывается с соответствующими «уравнениями Эйлера» и «Навье — Стокса». В работах [132, 133, 134] Эллис и Пинский доказывают «предельные теоремы Больцмана и Навье — Стокса» для линеаризованного уравнения Больцмана. В этих работах установлена асимптотическая неединственность уравнений Навье — Стокса «линейной» гидродинамики.

2.14. Линейное уравнение типа линеаризованного уравнения Больцмана возникает также в задаче о движении легкой частицы в случайной среде тяжелых частиц. В одной такой модели Галлавотти [143] строго вывел линейное уравнение Больцмана в пределе Больцмана — Грэда.

2.15. Отметим еще, что в [245] метод Эллиса и Пинского был применен для асимптотического анализа детерминированных и стохастических уравнений с быстро меняющимися компонентами. Там же дан абстрактный вариант «предельных теорем Больцмана и Навье — Стокса». Ниже операторы A и B соответствуют «оператору переноса» $\left(-v\frac{\partial}{\partial q}\right)$ и «оператору столкновений» (интегральному оператору в уравнении Больцмана):

$$1.\ \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left[t\left(A+\frac{B}{\varepsilon}\right)\right]=\exp[tPAP]\cdot P,$$

где P — проектор на ядро оператора B.

$$2.\ \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left[-\frac{t}{\varepsilon}PAP\right]\exp\left[\frac{t}{\varepsilon}\left(A+\frac{B}{\varepsilon}\right)\right]P=\exp[t\overline{V}]\,P,$$

где

$$\overline{V}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\exp[-sPAP]\,V\exp[sPAP]\,ds,$$

$$V=PA\left[\int_0^\infty [\exp(tB)-P]\,dt\right]AP.$$

2.16. В заключение этого параграфа остановимся еще на одной вероятностной модели, связанной с уравнением Больцмана, а именно на «уравнении Больцмана с флуктуациями». (см., например, работу Каца [199]). Уравнение такого типа для модельного «карлемановского газа» изучал Маккин [230]. Для нелинейного параболического уравнения вида $\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta f-f\cdot G(f)$ в работе [99] Берресфорд строит процесс Орнштейна—Уленбека, ассоциированный с этим уравнением и являющийся решением соответствующего «уравнения Больцмана с флуктуациями». Физический подход к «уравнению Больцмана с флуктуациями» в связи с изучением «крупномасштабных флуктуаций газа» подробно изложен в монографии Л. Ю. Климонтовича [43].

§ 3. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ДИНАМИКА РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМ

3.1. Для решетчатых систем пространством конфигураций M_ν служит множество функций на решетке Z^ν, принимающих значения в некотором множестве A. Такие системы можно интерпретировать по-разному, например, как систему «спинов» (тогда A есть множество значений «спина») или как систему автоматов (тогда A есть совокупность состояний автомата). Если A—конечное множество, то M_ν—компакт (в тихоновской топологии). Вероятностную динамику в M_ν, т. е. марковский процесс с непрерывным временем, можно попытаться описать марковскими полугруппами в $C(M_\nu)$.

3.2. В 1963 году Глаубер [153] рассмотрел пример обратимого марковского процесса с непрерывным временем в M_1 с $A=\{0, 1\}$, для которого единственное стационарное распределение есть марковская мера на M_1. Пример Глаубера относится к классу марковских процессов с локальным взаимодействием, общая конструкция которых для решеток любой размерности принадлежит Р. Л. Добрушину [26—28].

3.3. Построение марковских полугрупп в $C(M_\nu)$ для таких процессов дано в работах Добрушина [26, 27], Харриса [173], Холли [48], Лиггета [217]. Достаточные условия эргодичности марковских процессов с локальным взаимодействием указаны Р. Л. Добрушиным [26, 28], Л. М. Васерштейном [9] (см. также работы Холли [192, 193]). Другой тип вероятностных динамик был рассмотрен Спитцером [264, 267]. Он соответствует прыжкам частиц по решетке. И те и другие процессы, в частности, интересны тем, что для них множество стационарных распределений может содержать совокупность всех гиббсовских мер, отвечающих данному потенциалу, а в некоторых случаях совпадает с ним (см. [265, 267, 192]).

3.4. Холли и Лиггетт [196] указали общий подход к изучению эргодических свойств вероятностных динамик решетчатых систем. Они ввели понятие ветвящегося процесса с взаимодействием и дуального ветвящегося процесса с взаимодействием для данного марковского процесса в M_ν с $A=\{0, 1\}$. Изучение эргодических свойств вероятностной динамики сводится к изучению эргодических свойств дуального процесса. Для модели голосования Холли и Лиггетт [196] описали все стационарные состояния и указали область притяжения для каждого стационарного состояния. Техника, использующая понятие дуального процесса, применяется в [196] и для вероятностных динамик с дискретным временем.

3.5. Изучению динамик с дискретным временем посвящены работы [10, 11, 12, 14—16, 55, 79, 81—84, 115—119, 259].

Здесь возникают свои интересные и трудные проблемы, получено много результатов, но из-за ограниченного объема статьи мы не может дать подробного освещения этих работ.

§ 4. ДРУГИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ

4.1 В [170] Харрис рассмотрел систему диффундирующих частиц со столкновениями. Моделям аналогичного типа посвящены его работы [171—174] (см. также работы Спитцера [262—267]). «Более детерминированный вариант» модели Харриса — Спитцера изучал Затцшнайдер [274]. В этой модели имеется одномерная система частиц, которые при столкновениях обмениваются скоростями (с точки зрения кинетической теории, той же моделью занимались Либовитц и Перкус [210], близкой к ней моделью — Либовитц, Перкус и Сайкс [212]). Затцшнайдер исследовал предельное поведение выделенной частицы. Чтобы сформулировать его результат, отметим, что, как показал ранее Спитцер, если система всех частиц без учета выделенной в начальный момент времени $t=0$ находится в равновесном состоянии, то случайный процесс $\varepsilon x(\varepsilon^{-2}\tau)$, где $x(t)$ — координата выделенной частицы в момент t, при $\varepsilon\to 0$ слабо сходится к винеровскому процессу. Затцшнайдер обнаружил, что для некоторых неравновесных начальных состояний имеет место сходимость к немарковскому гауссовскому процессу.

4.2. В случае ограниченного потенциала описанный выше предельный переход соответствует так называемому пределу слабого взаимодействия (параметр ε ставится перед потенциалом и $\varepsilon^2 t\to\tau$ при $\varepsilon\to 0$).

В книге Д. Н. Зубарева [35] содержится физический вывод уравнения Крамерса — Фоккера — Планка в пределе слабого взаимодействия для конечного числа выделенных частиц, блуждающих в одночастичном фазовом пространстве $R^3\times R^3$ (остальные частицы в начальный момент находятся в равновесном состоянии). Это уравнение есть обратное уравнение Колмогорова для соответствующего марковского процесса, его коэффициенты выражаются через функции распределения равновесного состояния. Строгий вывод аналогичного уравнения в квантовом случае принадлежит Дэвису [113], который использовал проекционный формализм, хорошо известный в физической литературе (см., например, книгу Балеску [97]). Поведение выделенной частицы (остальные образуют термостат) изучалось в физических работах [61—63].

4.3. Движение легкой частицы в окружении тяжелых (когда выделенная легкая частица не влияет на остальные), в частности, модель Эренфеста «ветер — дерево» и модель Лорентца, изучал Галлавотти [143] в связи с проблемой расходимостей в кинетической теории газов (по поводу этих моделей (см. [146], [147], [177], [188], [144], [175], [100]).

4.4. Согласно функциональному предположению Н. Н. Боголюбова, в кинетической стадии $\rho_n(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n; t) = L_n(q_1, v_1, \ldots, q_n, v_n; \rho_1(\cdot, t)$. Разложив функционал L_n в ряд Тейлора и используя введенный им принцип ослабления корреляций, Н. Н. Боголюбов [7] дал рецепт последовательного вычисления членов этого разложения. Позднее в работах ряда авторов обнаружилось, что старшие члены этого разложения содержат расходимости (см. статью Дорфмана и Коэна [124]). Эти расходимости не позволяют, в частности, получить методом Боголюбова кинетическое уравнение для случая четверных столкновений.

Перенормированные кинетические уравнения (не содержащие расходимостей) выписаны в работе Д. Н. Зубарева и М. Ю. Новикова [39].

В работе В. И. Оселедца [60] предлагается определение кинетической стадии через порождающие функции состояний (см. § 1), и наличие расходимостей объясняется плохим убыванием на бесконечности порождающих функций, соответствующих «кинетическим состояниям». Это определение приводит к тому же разложению, что и в методе Боголюбова.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Амиров Р. Х.**, Смолянский С. А., Шехтер А. Ш., Вывод кинетических уравнений классической статистической механики в приближении слабого взаимодействия в методе неравновесного статистического оператора. Теор. и мат. физ., 1973, 16, № 1, 128—134 (РЖМат, 1973, 11Б425)
2. **Белопольская Я. И.**, О распространении хаоса в модели Каца кинетической теории газов. В сб. «Вопр. техн. теплофиз.», вып. 5. Киев, «Наук. думка», 1975
3. —, Марковский процесс с простым взаимодействием — вероятностная модель в нелинейной теории переноса. В сб. «Вопр. техн. теплофиз.», вып. 5. Киев, «Наук. думка», 1975, 5—8 (РЖМат, 1975, 9В150)

4. **Белоцерковский О. М.**, Яницкий В. Е., Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. I. Основы построения метода. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, **15**, № 5, 1195—1208 (РЖМат, 1976, 5В311)
5. **Бобылев А. В.**, О пространственно-однородных нормальных решениях кинетических уравнений Больцмана—Ландау. Ин-т прикл. мат. АН СССР, Препринт № 55. М., 1974, 19 с. (РЖМат, 1974, 11Б564)
6. **Боголюбов Н. Н.**, Микроскопические решения уравнения Больцмана—Энскога в кинетической теории для упругих шаров. Теор. и мат. физ., 1975, **24**, № 2, 242—247 (РЖМат, 1976, 1Б416)
7. —, Проблемы динамической теории в статистической физике. М., 1946
8. **Буров А. В.**, Существование и единственность решения уравнения Больцмана. Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 7, 92—98 (РЖМат, 1973, 9Б489)
9. **Васерштейн А. Н.**, Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов. Пробл. передачи информ., 1969, **5**, № 3, 64—72 (РЖМат, 1970, 2В388)
10. —, Леонтович А. М., Об инвариантных мерах некоторых марковских операторов, описывающих однородную случайную среду. Пробл. передачи информ. 1970, № 1, 71—80 (РЖМат, 1970, 10В49)
11. **Васильев Н. Б.**, О предельном поведении одной случайной среды. Пробл. передачи информ., 1969, 5, № 4, 68—74 (РЖМат, 1970, 7В192)
12. —, О предельном поведении одной цепи Маркова, описывающей однородную среду. Пробл. передачи информ., 1969, № 2
13. —, Добрушин Р. Л., Пятецкий-Шапиро И. И., Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств. В сб. «Сов.-Японск. симпозиум по теории вероятностей, 1969 (Ч. 2)», Новосибирск, 1969, 3—30 (РЖМат, 1970, 4В45)
14. —, Петровская М. Б., Пятецкий-Шапиро И. И., Моделирование голосования со случайной ошибкой. Автоматика и телемеханика, 1969, № 10, 103—107
15. —, Пятецкий-Шапиро И. И., О классификации одномерных однородных сетей. Пробл. передачи информ., 1971, 7, № 4, 82—90 (РЖМат, 1972, 5В40)
16. —, Митюшин Л. Г., Пятецкий-Шапиро И. И., Тоом А. Л., Операторы Ставской. Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препринт № 12. М., 1973, 69 с. (РЖМат, 1974, 5В62К)
17. **Веденяпин В. В.**, О разрешимости в целом задачи Коши для некоторых дискретных моделей уравнений Больцмана. Докл. АН СССР, 1974, **215**, № 1, 21—23 (РЖМат, 1974, 7Б504)
18. **Вознесенский Г. Ф.**, К решению цепочки уравнений для идеального газа. Теор. и мат. физ., 1971, **9**, № 3, 418—430 (РЖМат, 1972, 5Б544)
19. **Встовский В. П.**, Проекционный формализм в теории необратимых процессов. Теор. и мат. физ., 1974, **21**, № 3, 376—387
20. **Годунов С. К.**, Султангазин У. М., О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана. Успехи мат. наук, 1971, **26**, № 3, 3—104
21. **Гуревич Б. М.**, Сухов Ю. М., Стационарные решения цепочки уравнений Боголюбова в классической статистической механике. Докл. АН СССР, 1975, 223, № 2, 276—279 (РЖМат, 1976, 1В188)
22. —, —, Инвариантные меры гамильтоновых систем с бесконечным числом степеней свободы и стационарные решения цепочки уравнений Боголюбова. Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 6, 199—200
23. —, Синай Я. Г., Сухов Ю. М., Об инвариантных мерах динамических систем одномерной статистической механики. Успехи мат. наук, 1973, 28, № 5, 45—82 (РЖМат, 1974, 5В581)
24. **Гуров К. П.**, Основания кинетической теории. М., 1966
25. **Далецкий Ю. Л.**, Заплитная Л. Т., Интегралы по пространству деревьев, связанные с нелинейными параболическими уравнениями. Укр. матем. ж., 1965, **17**, № 5, 110—114 (РЖМат, 1966, 3Б530)

26. **Добрушин Р. Л.**, Непрерывные марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент и некоторые их применения. В сб. «Материалы Всес. школы по дифференц. уравнениям и динам. сист. с бесконечным числом степеней свободы, Дилижан, 1973». Ереван, АН АрмССР, 1974, 131—159 (РЖМат, 1975, 1В84)
27. —, Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент — существование предельного процесса и его эргодичность. Пробл. передачи информ., 1971, 7, № 2, 70—87 (РЖМат, 1971, 12В460)
28. —, Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент — обратимый случай и некоторые обобщения. Пробл. передачи информ., 1971, 7, № 3, 57—66 (РЖМат, 1971, 12В461)
29. **Ермаков С. М.**, Метод Монте-Карло для итерации нелинейных операторов. Докл. АН СССР, 1972, 204, № 2, 271—274 (РЖМат, 1972, 9Б728)
30. —, Об аналоге схемы Неймана—Улама в нелинейном случае. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, 13, № 3, 564—573 (РЖМат, 1973, 9В234)
31. —, Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., 1975, с. 321—340 (РЖМат, 1976, 2В265К)
32. **Жигулев В. Н.**, Исследование цепочки уравнений Н. Н. Боголюбова для сильнокоррелированных статистических систем. Теор. и мат. физ., 1971, 7, № 1, 106—120
33. —, К теории упорядоченных статистических систем. Докл. АН СССР, 1965, **161**, № 5, 1051—1054 (РЖМат, 1965, 11В96)
34. **Земляков А. Н.**, Построение динамики в одномерных системах статистической физики в случае нефинитных потенциалов. Успехи мат. наук, 1973, 28, № 1, 239—240 (РЖМат, 1973, 7Б762)
35. **Зубарев Д. Н.**, Неравновесная статистическая термодинамика. М., 1973
36. —, Калашников В. П., Эквивалентность некоторых методов в статистической механике необратимых процессов. Теор. и мат. физ., 1971, 7, № 3, 372—394 (РЖМат, 1972, 1Б582)
37. —, Новиков М. Ю., Обобщенная формулировка граничного условия к уравнению Лиувилля и цепочки Б—Б—Г—К—И. Теор. и мат. физ., 1972, 13, № 3, 406—420 (РЖМат, 1973, 4Б596)
38. —, —, Диаграммный метод построения решений цепочки уравнений Боголюбова. Теор. и мат. физ., 1974, 18, № 1, 78—89 (РЖМат, 1974 6Б586)
39. —, —, Ренормализованные кинетические уравнения для системы со слабым воздействием и для газа малой плотности. Теор. и мат. физ., 1974, **19**, № 2, 237—251
40. —, Хонькин А. Д., Метод построения нормальных решений кинетических уравнений с помощью граничных условий. Теор. и мат. физ., 1972, 11, № 3, 403—412 (РЖМат, 1972, 10Б373)
41. **Карлеман Т.**, Математические задачи кинетической теории газов. 19 М., 1960
42. **Кац М.**, Вероятность и смежные вопросы в физике. М., «Мир», 1965
43. **Климонтович Ю. Л.**, Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., 1975
44. **Коган М. Н.**, Динамика разреженного газа. М., 1967
45. **Козлов О. К.**, Гиббсовское описание случайных полей. Теор. вероятн. и ее примен., 1976, **21**, № 2, 348—365
46. **Леонтович М. А.**, Основные уравнения кинетической теории с точки зрения случайных процессов. ЖЭТФ, 1973, **5**, 3—4
47. **Либов Р.**, Введение в теорию кинетических уравнений. М., «Мир», 1974, 371 с. (РЖМат, 1974, 8Б469К)
48. **Маслова Н. Б.**, Теоремы о существовании и единственности решений нелинейного уравнения Больцмана. В сб. «Аэродинамика разреж. газов». Вып. 8. Л., Ленингр. ун-т, 1976, 4—22
49. —, Чубенко Р. П., Предельные свойства решений уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1972, **202**, № 4, 800—803

50. —, —, Оценки интеграла столкновений. Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 13, 130—137 (РЖМат, 1974, 1Б401)
51. —, —, О решениях нестационарного уравнения Больцмана. вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 19, 100—105 (РЖМат, 1974, 7Б505)
52. —, Фирсов А. Н., Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. I. Теорема существования и единственности. Вестн. Ленингр. ун-та, 1975, № 19, 83—88 (РЖМат, 1976, 6Б498)
53. —, —, Решение задачи Коши для уравнения Больцмана. II. Оценки решений неоднородного линеаризованного уравнения. Вестн. Ленингр. ун-та, 1976, № 1, 97—103 (РЖМат, 1976, 7Б468)
54. Материалы Третьего рабочего совещания по статистической физике, 25—28 окт. 1971 г. 4.2. Ин-т теор. физ. АН УССР. Киев, 1972
55. **Митюшин Л. Г.**, Неэргодичность однородных пороговых сетей при малом самовозбуждении. Пробл. передачи информ., 1970, **6**, № 3, 99—103 (РЖМат, 1971, 4В36)
56. Некоторые вопросы кинетической теории газов. М., 1965
57. **Некруткин В. В.**, Вычисление интегралов по пространству деревьев методом Монте—Карло. В сб. «Методы Монте—Карло в вычисл. мат. и мат. физ.» Новосибирск, 1974, 94—102 (РЖМат, 1974, 9Б1202)
58. —, Прямая и сопряженная схема Неймана—Улама для решения нелинейных интегральных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, **14**, № 6, 1409—1415 (РЖМат, 1975, 4Б1169)
59. **Новиков М. Ю.**, Основное кинетическое уравнение и метод функциональных разложений Боголюбова. Теор. и мат. физ., 1973, **16**, № 3, 394—405 (РЖМат, 1974, 2Б563)
60. **Оселедец В. И.**, Функции Больцмана и трудности кинетической теории. Сборник науч.-техн. матер. Матем. методы. ВИА им. Ф. Э. Дзержинского, 1976
61. **Павлоцкий И. П.**, Классическое кинетическое уравнение для неравновесной частицы в термостате. Теор. и мат. физ., 1974, **18**, № 1, 138—144
62. —, Шеховцова Л. Г., Квантомеханическое кинетическое уравнение для неравновесной частицы в термостате. Докл. АН СССР, 1973, **210**, № 6, 1323—1326 (РЖМат, 1973, 11Б420)
63. —, Юпина М. Н., Кинетическое уравнение для неравновесной частицы в термостате в случае короткодействующих сил. (Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препринт № 31), 1972
64. **Петрина Д. Я.**, Видыбида А. К., Задача Коши для кинетических уравнений Боголюбова. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1975, **136**, 370—378 (РЖМат, 1976, 4Б515)
65. **Повзнер А. Я.**, Об уравнении Больцмана кинетической теории газов. Матем. сб., 1962, **58**, № 1, 65—86 (РЖМат, 1964, 3Б434)
66. **Пригожин И.**, Неравновесная статистическая механика. М., 1964
67. **Ротенберг А. Р.**, Поведение однородных статистических ансамблей конечных автоматов. Автоматика и телемеханика, 1971, № 9, 84—92 (РЖМат, 1972, 1В638)
68. —, Поведение марковских статистических ансамблей конечных автоматов. Автоматика и телемеханика, 1971, № 10, 95—107 (РЖМат, 1972, 2В409)
69. —, Об одном ансамбле формальных нейронов. Успехи мат. наук, 1971, **26**, № 5, 213
70. —, Об одном классе уравнений статистической физики и математической экономики. Успехи мат. наук, 1972, **27**, № 4, 253—254
71. —, Сохранение статистической репрезентативности в некоторых ансамблях динамических систем. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1975, № 2, 75—84 (РЖМат, 1975, 11В207)
72. **Саханов Н. В.**, Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одной модельной системы уравнения Больцмана. В сб.: «Математика и механика», вып. 7, ч. 2, Алма-Ата, 1972, 202—205 (РЖМат, 1974, 7Б507)

73. **Силин В. П.**, Введение в кинетическую теорию газов. М., 1971
74. **Синай Я. Г.**, Построение динамики в одномерных системах статистической механики. Теор. и мат. физ., 1972, **11**, № 2, 248—258 (РЖМат, 1972, 9В186)
75. —, Эргодические свойства газа одномерных твердых шариков с бесконечным числом степеней свободы. Функц. анализ и его прил., 1972, **6**, № 1, 41—50 (РЖМат, 1972, 7Б777)
76. —, Построение кластерной динамики для динамических систем статистической механики. Материалы Всес. мат. школы в Дилижансе. Ереван, 1974, 160—172
77. —, Построение кластерной динамики для динамических систем статистической механики. Вестн. МГУ, 1974, № 1, 152—158
78. —, Сухов Ю. М., К теореме существования решений для цепочки уравнений Боголюбова. Теор. и мат. физ., 1974, **19**, № 3, 344—363 (РЖМат, 1974, 11Б580)
79. **Ставская О. Н.**, Пятецкий-Шапиро И. И., Об однородных сетях из спонтанно активных элементов. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 20. М., «Наука», 1968, 91—106 (РЖМат, 1969, 7В502)
80. **Султангазин У. М.**, Саханов Н. В., Исследование дискретного аналога уравнения Больцмана для пространственно-однородной среды. В сб. «Математика и механика». Вып. 7. Ч. 2. Алма-Ата, 1972, 195—201 (РЖМат, 1974, 7Б506)
81. **Тоом А. Л.**, Об одном семействе сетей из формальных нейронов. Докл. АН СССР, 1968, **183**, № 1, 49—52 (РЖМат, 1969, 3В171)
82. —, Неэргодичность в однородных случайных средах. В сб. «Вероятностные методы исследования», М., изд-во МГУ, 1972, 34—42
83. —, Об инвариантных мерах в неэргодичных случайных средах. В сб.: «Вероятностные методы исследования», М., изд-во МГУ, 1972, 43—51
84. **Уленбек Дж.**, Форд Дж., Лекции по статистической механике. М., «Мир», 1965
85. **Фирсов А. Н.**, Теоремы существования и единственности решения одной внешней граничной задачи для уравнения Больцмана. Вестн. Ленингр. ун-та, 1975, № 7, 110—117 (РЖМат, 1975, 10Б477)
86. —, О дифференциальных свойствах решений уравнения Больцмана. Вестн. Ленингр. ун-та, 1975, № 13, 99—105 (РЖМат, 1976, 2Б442)
87. **Фудзита С.**, Введение в неравновесную квантовую статистическую механику. М., 1969
88. **Хонькин А. Д.**, Пространственно-неоднородные решения усредненной цепочки уравнений кинетической теории газов, описывающих системы с сильной статистической связью. Теор. и мат. физ., 1971, **9**, № 1; 291—301
89. **Черчиньяни К.**, Некоторые математические вопросы кинетической теории газов. М., «Мир», 1973
90. **Шнирман М. И.**, К вопросу об эргодичности одной цепи Маркова с бесконечным множеством состояний. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 20, М., «Наука», 1968, 115—124 (РЖМат, 1969, 9В43)
91. —, Статистическая модель течения идеального газа и некоторые ее особенности. В сб. «Числ. методы мех. сплошн. среды». 1975. Т. **6**. № 4, Новосибирск, 139—150 (РЖМат, 1976, 5В313)
92. **Aizenman M.**, Goldstein Sh., Lebowitz J. L., Ergodic properties of an infinite one dimensional hardrod system. Communs Math. Phys., 1975, **39**, № 4 (РЖМат, 1975, 8Б774)
93. **Anstis G. R.**, Green H. S., Hoffman D. K., Kinetic theory of a one-dimensional model. J. Math. Phys., 1973, **14**, № 10, 1437—1443 (РЖМат, 1974, 5Б580)
94. **Arkeryd L.**, On the Boltzmann equation. Part II: the full initial value problem. Arch. Ration Mech. and Anal., 1972, **45**, № 1, 17—34 (РЖМат, 1973, 2Б481)
95. **Balescu R.**, Dynamical correlations patterns: a new representation of the Liouville equation. Physica, 1971, **56**, № 1, 1—24

96. —, Dynamical correlation patterns in quantum-statistical mechanics. Physica, 1972, **62**, № 4, 485—507
97. —, Equilibrium and noneqilibrium statistical mechanics. New York—London—Sydney—Toronto, 1975
98.—, Wallenborn J., On the structure of the time-evolution process in many—body systems. Physica, 1971, **54**, № 4, 477—503
99. **Berresford G. C.**, A class of nonlinear partial differential equations and the associated Markov processes. Z. Wahr. verw. Geb., 1976, **33**, 237—251
100. **Beyeren H. van**, Hayge F. H., Abnormal diffusion in Ehrenfest's wind-tree model. Phys. Lett., 1972, **A39**, № 5, 397—398
101. **Bird G. A.**, Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas. Phys. Fluids, 1963, **6**, № 10, 25—31
102. **Cercignani C.**, On the Boltzmann equation for rigid spheres. Transp. Theory and Statistical Phys., 1972, **2**, № 3, 211—225
103. —, Existence, uniqueness and convergence of the solutions of models in kinetic theory. J. Math. Phys., 1968, **9**, № 4, 633—639
104. —, On the muster equation in the space inhomogeneous case. Colloq. int. CNRS, 1975, № 236, 209—221
105. **Chen Etang**, Master equations in quantum stochastic processes. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 10, 2057—2061
106. **Chiang C. C.**, Structure of subdynamics in nonequilibrium statistical mechanics. Nuovo cim., 1975, **25B**, № 1, 125—144
107. Chover J., Convergence on a local lattice process. Stochast. Process. and Appl., 1975, 3, № 2, 115—135 (РЖМат, 1976, 2В90)
108. **Ciesielski L.**, Stochastic systems of particles. Lect. Notes Math., 1975, 472, 1—28 (РЖМат, 1976, 2В163)
109. **Clifford Peter**, Sudbury Aidau, Some results on the limiting behavior of infinite particle systems. Z. Wahscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1974, **30**, № 4, 273—278 (РЖМат, 1975, 7В40)
110. **Cohen E.**, The generalisation of the Boltzmann equation to higher densities, In the book «Statistical mechanics at the turn of the decade», ed. by E. Cohen, N. Y., 1971
111. —, The kinetic theory of dense gases, the Lorentz gas. Colloq. int. CNRS, 1975, № 236, 269—296
112. **Dao—Quang—Tyuen**, Szasz D., A collison model on the two-dimensional square—lattice. Z. Wahrscheinlichkeits theor. und verw. Geb., 1974, **31**, № 1, 75—77 (РЖМат, 1975, 7В42)
113. **Davies E. B.**, Diffusion for weakly coupled quantum oscillators. Communs Math. Phys., 1972, **27**, № 4, 309—325 (РЖМат, 1973, 2Б496)
114. —, Markovian master equations. Communs. Math. Phys., 1974, **39**, № 2, 91—110 (РЖМат, 1975, 9Б455)
115. **Dawson D. A.**, Information flow in discrete Markov systems. J. Appl. Probab., 1973, **10**, 63—83 (РЖМат, 1974, 1В53)
116. —, Information flow in one-dimensional Markov systems. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, **43**, № 2, 383—392
117. —, Information flow in graphs. Stochast. Process. and Appl., 1975, **3**, № 2, 137—151 (РЖМат, 1975, 12В526)
118. —, Synchronous and asynchronous reversible Markov systems. Carleton Math., Series № 91, 1973
119. —, Information flow in some classes of Markov systems. J. Appl. Probab., 1974, **11**, № 3, 594—600
120. Di Blasio Gabriella, Strong solution for Boltzmann equation in the spatially homogeneous case. Boll. Unione mat. ital., 1973, **8**, № 1, 127—136 (РЖМат, 1974, 4Б460)
121. —, Somme d'operateurs non-lineaires et application a l'equation de Bolzmann. C. r. acad. Sci., 1975, **280A**, 1121—1123
122. —, Differentiability of spatially homogeneous solutions of the Bolzmann equation in the non Maxwellian case. Communs Math. Phys., 1974, **38**, № 4, 331—340 (РЖМат, 1975, 7Б493)

123. —, Asymptotic stability of the equilibrium solution of the Boltzmann equation. Preprint, 1976
124. **Dorfman I. R.**, Cohen E. G. D., Difficulties in the kinetic theory of gases. J. Math. Phys., 1967, 8, № 2, 282—297
125. **Dorroh J. R.**, Lin T. F., Markov processes with quasilinear first order vorward differential equation. J. Math. Annal. and Appl., 1973, **41**, № 1, 205—225 (РЖМат, 1973, 5В89)
126. —, —, Markov processes with quasi-linear parabolic forward differential equation. Adv. Math., 1976, **19**, № 1, 19—47
127. Ellis R. S., Chapman—Enskog—Hilbert expansion for a Markovian model of the Boltzmann equation. Communs Pure and Appl. Mat., 1973, **26**, № 3, 327—359 (РЖМат, 1974, 4Б456)
128. —, Chapman—Enskog—Hilbertexpansion for the Ornstein—Uhlenbeck process and the approximation of Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **199**, 65—74 (РЖМат, 1975, 7В73)
129. —, Asymptotics and limit theorems for the linearized Boltzman equation. Lect. Notes Math., 1975, **451**, 143—151 (РЖМат, 1976, 1Б414)
130. —, Aspects of the Krook model of the Bolzmann equation. Indiana Univ. Mat. J., 1975, **24**, № 10, 915—923 (РЖМат, 1976, 3Б377)
131. —, Pinsky Maru A., Limit theorems for model Bolzmann equations with several conserved quantities. Indiana Univ. Math. J., 1973, **23**, № 4, 287—307 (РЖМат, 1974, 6Б576)
132. —, —, Asymptotic non-uniqueness of the Navier-Stokes equations in kinetic theory. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 6, 1160—1164
133. —, —, The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation. J. Math. Pures et Appl., 1975, **54**, № 2, 125—156 (РЖМат, 1975, 12Б597)
134. —, —, The projection of the Navier—Stokes equations upon the Euler equation. J. Math. Pures at Appl., 1975, **54**, № 2, 157—181 (РЖМат, 1975, 12Б510)
135. —, —, Asymptotic equivalence of the linear Navier—Stokes and heat equations in one dimension. J. Different. equat., 1975, **17**, № 2, 406—420 (РЖМат, 1975, 11Б377)
136. **Emch Gerard G.**, Diffusion, Einstein formula and mechanics. J. Math. Phys., 1973, **14**, № 12, 1775—1783 (РЖМат, 1974, 8Б457)
137. **Ernst M. H.**, Dorfman I. R., Hoegg W. R., van Leewen I. M., Hard-sphere dynamics and binary—collision operators. Physica, 1969, **45**, № 1, 127—146
138. **Fesciyan Sezar**, The BBGKY hierarchy in quantum statistical mechanics Communs Math. Phys., 1973, **30**, № 1, 11—22 (РЖМат, 1973, 8Б495)
139. **Frey J.**, Salmon J., A new irreversibility postulate in classical statistical mechanics. Mod. Develop. Thermodyn., New York e. a., 1974, 391—409
140. —, —, Valton M., A new closure hypothesis for the BBGKY system of equations. J. Statist. Phys., 1974, **11**, № 6, 457—474 (РЖМат, 1975, 12Б596)
141. Fronteau Jean, Une dynamique associee e l'equation cinetique Frey—Salmon. C. r. Acad. Sci., 1975, Ser. A—B, **280**, 1405—1408
142. **Galdiera G.**, Presutti E., Gibbs processes and generalized Bernoulli flows for hardcore one-dimensional systems. Communs Math. Phys., 1974, **35**, № 4, 279—286 (РЖМат, 1974, 10Б467)
143. **Gallavotti G.**, Divergences and the approach to the equilibrium in the Lorentz and the wind-tree modes. Phys. Rev., 1969, **185**, № 1, 308—322
144. —, Rigorous theory of the Boltzman equation in the Lorentz gas. Nota interna. Ist. fis., G. Marconi. Univ. Roma, 1972, № 358, 21 pp.
145. —, **Lanford O. E. III**, Lebowitz L., Thermodynamic limit of timedependent correlation functions for onedimensional systems. J. Math. Phys., 1970, **11**, № 9, 2898—2905 (РЖМат, 1971, 4Б525)
146. **Gates D. J.**, Lattice wind-tree models. I. Absence of diffusion. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 7, 1005—1013 (РЖМат, 1972, 12Б523)

147. —, Lattice wind-tree models. II. Analytic property. J. Math. Phys., 1972, 13, № 9, 1315—1317
148. Gatignol R., Discretisation of the velocity-space in kinetic theory of gases. Lat. Notes Phys., 1975, 35, 181—186 (РЖМат, 1975, 11Б559)
149. —, Theorie Cinetique des Gaz a Repartition Discrete de Vitesses. Lecture Notes Phys., 1975, 36
150. **George C.**, Subdynamics and correlations. Phsica, 1973, 65, № 2, 277—302
151. **Gibberd R. W.**, George C., Application of the statistical mechanics transformations theory to a soluble model. Trans. Theory and Statist. Phys., 1972, 2, № 2, 109—116
152. **Gisselquist R.**, A continuum of collision process limit theorems. Ann. Prob., 1973, 231—239
153. **Glauber R. J.**, Time dependent statistics of the Ising model. J. Math. Phys., 1963, 4, № 2, 294—307
154. **Glikson A.**, On the existence of general solutions of the initial value problem for the nonlinear Boltzmann equation with a cut-off. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1972, 45, № 1, 35—46 (РЖМат, 1973, 2L482)
155. **Glikson A.**, On solution of the nonlinear Bolzmann equation with a cut-off in an unbounded domain. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1972, 47, № 5, 389—394 (РЖМат, 1973, 5Б471)
156. **Goldstein S.**, Space—time ergodic properties of systems of infinitely many independent particles. Communs Math. Phys., 1975, 39, № 4, 303—327 (РЖМат, 1975, 8Б776)
157. —, Lebowitz J. L., Ergodic properties of an infinite systems of particles moving independently in a periodic field. Communs Math. Phys., 1974, 37, 1—18 (РЖМат, 1975, 2В256)
158. —, Lanford Oscar E., III., Lebowitz Joel L., Ergodic properties of a simple model system with collisions. J. Math. Phys., 1973, 14, № 9, 1228—1230 (РЖМат, 1974, 4Б471)
159. **Grad H.**, Asymptotic equivalence of the Navier—Stokes and nonlinear Boltzmann equations. Applic. Nonlinear Partial different. Equat. Math. Phys. Providence R. I., Amer Math. Soc., 1965, 154—183 (РЖМат, 1968, 5Б523)
160. **Griffeath D.**, Ergodic theorems for graph interactions. Adv. Apl. Probab., 1975, 7, № 1, 179—194 (РЖМат, 1976, 1В98)
161. **Grünbaum F. Alberto**, Propagation of the chaos for the Boltzmann equation. Arch. Rat. Mech. Anal., 1971, 42, № 5, 323—345
162. —, On the existence of a «wave operator» for the Boltzmann equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, № 5, 759—762 (РЖМат, 1973, 4Б582)
163. —, Linearization for the Boltzmann equation. Trans. Amer. Math. Soc. 1972, 165, March, 425—449 (РЖМат, 1972, 11Б579)
164. **Guiraud J.-P.**, An *H* theorem for a gas of rigid spheres in a bounded domain. Colloq. int. CNRS, 1975, № 236, 29—58
165. **Gurevich B. M.**, Suhov Ju M., Stationary solutions of the Bogoliubov hierarchy equations in classical statistical mechanics. I. Communs Math. Phys., 1976
166. —, —, Stationary solutions of the Bogoliubov hierarchy equations in classical statistical mechanics. II. Communs Math. Phys., 1976
167. **Haag R.**, Kastler D., Trych-Pohlmeyer Ewa B., Stability and equilibrium states. Communs Math. Phys., 1974, 38, № 3, 173—193 (РЖМат, 1975, 5Б517)
168. **Hardy J.**, Pomeau Y., Thermodynamics and Hydrodynamics, for a model fluid. J. Math. Phys., 1972, 13, № 7, 1042—1051
169. —, —, Pazziss O., Time evolution of a two-dimensional model system, I. Invariant states and time correlation functions. J. Math. Phys., 1973, 14, № 12, 1746—1759 (РЖМат, 1974, 9L617)
170. **Harris T. E.**, Diffusion with «collisions» between particles. J. Appl. Probabil., 1965, 2, № 2, 323—338 (РЖМат, 1967, 1В30)

171. —, Infinite-product Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, 130, № 1, 141—152 (РЖМат, 1969, 2В45)
172. —, Random measures and motions of point processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1971, 18, № 2, 85—115 (РЖМат, 1971, 10В148)
173. —, Nearest neighbor Markov interaction processes on multidimensionsl keitstheor. und verw. Geb., 1971, 18, № 2, 85—115 (РЖМат, 1971)
174. —, Contact interactions of a lattice. Ann. Probab., 1974, 2, № 6, 969—988 (РЖМат, 1975, 8В38)
175. **Hauge E. H.**, Exact and Chapman—Enskog solutions of the Boltzmann equations for the Lorentz model. Phys. Trans., 1970, 13, № 5, 1201—1208 (РЖМат, 1971, 2Б550)
176. —, Time correlation functions from the Boltzmann equation. Ark. fys. semin. Frondheim, 1972, № 1, 8 pp.
177. —, What can one learn from Lorentz models? Lect. Notes in Phys., 1974, 31, 338—366
178. —, Martin-Löf A., Fluctuating hydrodynamics and Brownian motion. Ark. fys. semin. Trondheim., 1972, № 10, 40 p.
179. **Hebert D. K.**, Nonlinear parabolic equations and probability. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80, № 5, 965—969 (РЖМат, 1975, 5Б406)
180. **Helms L.**, Ergodic properties of several interacting Poisson particles. Adv. Math., 1974, 12, № 1, 32—57 (РЖМат, 1974, 9В57)
181. **Henin F.**, Entropy, dynamics and molecular chaos, Kac's model. Physica, 1974, 77, № 2, 220—246
182. —, Asymptotic evolution in Kac's model. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1974, 60, № 6, 686—720
183. —, Entropy and entropy production for the Kac's model. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1974, 60, № 6, 721—761
184. —, Entropy, dynamics and molecular caos: the McKeans model. Physica, 1974, 76, № 2, 201—223
185. —, Prigogine I., Entropy, dynamics and molecular chaos. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, 71, № 7, 2618—2622 (РЖМат, 1975, 4В231)
186. **Hepp Klaus**, Results and problems in irreversible statistical mechanics of open systems. Lect. Notes. Phys., 1975, 39, 138—150 (РЖМат, 1976, 3Б493)
187. —, Lieb E., The laser: a reversible quantum dynamical system with irreversible classical macroscopic motion. Lect. Notes Phys., 1975, 38, 178—207 (РЖМат, 1976, 1Б438)
188. **Hoeggy W. R.**, Convergent generalization of the Boltzmann equation for a hard-sphere Lorentz gas. Phys. Rev., 1969, 185, № 1, 210—218
189. **Holley R.**, The motion of a large particle. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 144, Oct. 523—534 (РЖМат, 1970, 10В44)
190. —, A class of interaction in an infinite particle system. Adv. Math., 1970, 5, 291—309 (РЖМат, 1971, 6В54)
191. —, The motion of a heavy particle in an infinity one-dimensional gas of hard spheres. Z. Wahr. und vers. Geb., 1971, 17, № 3, 181—219 (РЖМат, 1971, 11В77)
192. —, Free energy in a Markovian model of a lattice spin system. Communs Math. Phys., 1971, 23, № 2, 87—99 (РЖМат, 1972, 3В49)
193. —, An ergodic theorem for interacting systeme with attractive interaction. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1972, 24, 325—334 (РЖМат, 1963 5В65)
194. —, Markovian interaction processes with finite range interactions. Ann. Math. Statist., 1973, 43, № 6, 1961—1967 (РЖМат, 1973, 7В65)
195. —, Pressure and Helmholtz free energy in a dynamic model a lattice gas. Proceedings of the Berkeley Symposium on Probab. and Math. Statist., 1973, 3, 565—578
196. —, Ligget T., Ergodic theorems for weakly interacting infinity systems and the voter. Ann. Probab., 1975, 3, № 4, 643—663

197. **Hunziker W.**, Scattering in classical mechanics. «Scattering Theory Math. Phys. Proc. NATO Adv. study Inst. Denver, Colo, 1973». Dordracht—Boston, 1974, 79—96 (РЖМат, 1975, 12Б643)
198. **Johnson P.**, On a class of stochastic processes and its relationship to infinite particle gases. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **132**, № 2, 275—295
199. **Kac M.**, Some probabilistic aspects of the Boltzmann-equation. Acta Phys. austr., 1973, Suppl. № 10, 379—400
200. **Kritz A. H.**, Ramanathan G. V., Sandri G., Failure of Bogoliubov's functional assumption. Phys. Rev. A. Gen. Phys., 1972, **6**, № 5, 1950—1955
201. **Kurtz T. G.**, Convergence of sequences of semi-groups on nonlinear operators with an application to gas kinetics. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **186**, 259—272 (РЖМат, 1974, 10Б824)
202. **Lanford O. E. III.**, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. I. An. Existence Theorem. Communs Math. Phys., 1968, **9**, № 3, 176—191
203. —, The classical mechanics of one-dimensional systems of infinitely many particles. II. Kinetic Theory. Communs Math. Phys., 1969, **11**, № 4, 257—292
204. —, Time — evolution of infinite classical systems. Math. Aspects Statist. Mech. (SIAM—AMS Proc., Vol. 5). Providence, R. I., 1972, 65—75 (РЖМат, 1973, 7Б435)
205. —, Ergodic theory and approach to equilibrium for finite and infinite systems. Acta Phys. austr., 1973, suppl. № 10, 619—639
206. —, Time evolution of large classical systems. Lect. Notes in phys., 1975, 38, 1—97
207. —, Lebowitz J. L., Time evolution and ergodic properties of harmonic systems, Lect. Notes in Phys., 1975.
208. —, Robinson D. W., Approach to equilibrium of free quantum systems. Communs Math. Phys., 1972, **24**, № 3, 193—210 (РЖМат, 1972, 6Б457)
209. **Lebowitz I. L.**, Ergodic theory and statistical mechanics of non-quilibrium processes. Lect. Notes Math., 1973, **322**, 193—209 (РЖМат, 1974, 2В44)
210. —, Perkus J. K., Kinetic equations and density expansions: exatly solvable one-dimensional system. Phys. Rev., 1967, **155**, № 1, 122—138
211. —, Aizenman M., Goldstein S., On the stability of equilibrium states of finite classical systems. J. Math. Phys., 1975, **6**, 1284—1287 (РЖМат, 1975, 12Б621)
212. —, Percus J. K., Sykes J., Time evolution of the sotal distribution function of a one-dimensional system of hard rods. Phys. Rev., 1968, **171**, № 1, 224—235
213. **Lee Paul S.**, Wu Ta-You, Boltzmann equation with fluctuations Int. J. Theor. Phys., 1973, **7**, № 3-4, 267—276
214. **Lee W. C.**, Random stirring of the real line. Ann. Probab., 1974, **2**, № 4, 580—592
215. **Liggett T. M.**, A characterization of the invariant measures for on infinite particle systems with interactions. I. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 179, May, 433—453 (РЖМат, 1974, 6В42)
216. —, A characterization of the invariant measures for an infinite particle systems with interactions. II. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, 198, 201—213 (РЖМат, 1975, 8В40)
217. —, Existence theorems for infinite particle systems. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 165, March, 471—481 (РЖМат, 1972, 11Б925)
218. —, An infinite particle system with zero range interactions. Ann. Probab., 1973, 1, 240—253
219. —, Convergence to total occupancy in an infinite particle system with interactions. Ann. Probab., 1974, 2, № 6, 989—998 (РЖМат, 1975, 8В39)
220. —, Ergodic theorems for the asymmetric simple exclusion process. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **213**, 237—261 (РЖМат, 1976, 11В28)

221. Marchioro C., Pellegrinotti A., Pressutti E., Time evolutions in statistical mechanics. Lett. Nuovo Cim., 1974, 11, № 13, 606—608 (РЖМат, 1976, 3Б511)
222. McKean H. P., Entropy is the only increasing functional of Kac's one—dimensional caricature of a Maxwellian gas. Z. Wahrsscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1963, 2, № 2, 167—172 (РЖМат, 1965, 7В31)
223. —, Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellien gas. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1966, 21, 343—367
224. —, A class of Markov processes associated with nonlienar parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1966, 56, № 6, 1907—1911 (РЖМат, 1967, 10В38)
225. —, Chapman—Ehskog—Hilbert expansion for a class of solutions of the telegraph equation. J. Math. Phys., 1967, 8, № 3, 547—552 (РЖМат, 1968, 1Б476)
226. —, An exponential formula for solving Bolzmann's equation for a Maxwellian gas. J. Combin. Theory, 1967, 2, № 3, 358—382 (РЖМат, 1968, 5Б525)
227. —, A simple model of the derivation of fluid mechanics from the Boltzmann equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1969, 75, № 1, 1—10 (РЖМат, 1970, 1Б471)
228. —, Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov—Petrovskii—Piskunov, Communs Pure Appl. Math., 1975, 28, № 3, 323—331 (РЖМат, 1976, 5В95)
229. —, Fluctuations in the kinetic theory of gases. Communs Pure and Appl. Math., 1975, 28, № 4, 435—455 (РЖМат, 1976, 6Б495)
230. —, The central limit theorem for Carleman's equation. Isr. J. Math., 1975, 21, № 1, 54—92 (РЖМат, 1976, 3В31)
231. Miracle S., Infinite dynamical systems and time evolution: rigorous results. Irreversibility in the Many—Body Problem, 1972
232. —, Mori H., Statistica — mechanical theory of kinetic equations. Kinetic equations for dense gases and liguids. Progr. Theor. Phys., 1973, 49, № 5, 1516—1545 (РЖМат, 1974, 2Б535)
233. Narnhofer H., Robinson D. W., Dynamical stability and pure thermodynamic phases. Communs Math. Phys., 1975, 41, № 1, 89—97 (РЖМат, 1975, 12L613)
234. Nicolaenko B., Shock wave solutions of the Boltzmann equation as a nonlinear bifurction problem from the essential spectrum. Colloq. int. CNRS, 1975
235. —, Thurber J. K., Weak shock and bifurcating solutions of the non-linear Bolzmann equation. J. Mec., 1975, 14, № 2, 305—338
236. Nishida T., Mimura M., On the Broadwell's model for a simple velosity gas. Proc. Jap. Acad., 1974, 50, № 10, 812—817 (РЖМат, 1976, 4Б509)
237. —, —, Global solutions to the Broadwell's model of Boltzmann equation for a simple discrete velocity gas. Lect notes phys. 1975, 39, 408—412 (РЖМат, 1976, 3Б477)
238. Nishimura S., Random collision processes and their limiting distribution using the discrimination information. J. Appl. Probab, 1974, 11, № 2, 266—280 (РЖМат, 1975, 1В92)
239. —, Random collision processes with transition probabilities belonging to the same type of distribution. J. Appl. Probab., 1974, 11, № 4, 703—714 (РЖМат, 1975, 7В41)
240. —, An inequality for a metric in a random collision process. J. Appl. Probab., 1975, 12, № 2, 239—247 (РЖМат, 1976, 4В104)
241. Niwa T., Ergodicity of some simple model of infinitely many particles. Lect. Notes Phys., 1975, 39, 236—237 (РЖМат, 1976, 3Б489)
242. Ogawa S., Sur des processus de Markov en interaction. C. r. Acad. sci., 1974, A278, № 25, 1595—1598 (РЖМат, 1975, 2В53)

243. —, Processus de Markov en interaction et systeme semilineaire d'equations d'evolution. Ann. Inst. H. Poincaré, 1974, **B10**, № 2, 279—299 (РЖМат, 1975, 4В50)
244. **Pagani C. D.**, On a linear kinetic equation occuring in the theory of Brownian motion. Colloq. int. CNRS, 1975, № 236, 241—254
245. **Papanicolaou G. C.**, Kohler W., Asymptotic analysis of deterministric and stochastic equations with rapidly varying components. Communs Math. Phys., 1975, **45**, № 3, 217—232
246. **Pazzis O. de**, Time evolution problem in classical statistical mechanics and the wind tree model, Cargue lect. in physics, 1970, 4
247. —, Ergodic properties of a semi-infinite hard rods system. Communs Math. Phys., 1971, **22**, № 2, 121—132
248. —, Dynamical theory of a bidimensional system with an infinite number of degrees of frechem. Communs Math. Phys., 1973, **29**, № 2, 113—130 (РЖМат, 1973, 7Б437)
249. **Pichon G.**, Chaos moleculaire et equation de Boltzmann. J. math. pures et appl., 1974, **53**, № 2, 183—195
250. Chaos moleculaire et equation de Bolzmann. Colloq. int. CNRS, 1975, № 236, 195—207
251. **Pinsky M. A.**, Stochastic solution of the linearized Boltzmann equation, J. Statist. Phys., 1975, **13**, № 3
252. **Pomeau Y.**, Thermodynamics and kinetic theory for a lattice gas. Colloq. int. CNRS, 1975, № 236, 189—193
253. **Port Sidney C.**, Stone Charles J., Infinite particle systems. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **178**, Apr., 307—340 (РЖМат, 1974, 2В133)
254. **Presutti E.**, Scacciatelli E., Sewell G. L., Wanderlingh F., Studies in the C^*-algebraic theory of nonequlibrium statistical mechanics: dynamics of open and of mechanically driven systems. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 8, 1085—1098 (РЖМат, 1973, 2Б497)
255. —, Pulvirenti M., Tirozzi B., Time evolution of infinite classical systems with singular, long range, two body interactions. Communs. Math. Phys., 1976, **47**, № 1, 81—95
256. **Prigogine I.**, Entropie et dynamique. Entropie, 1974, **10**, № 57, 5—11
257. **Pule J. V.**, The Bloch equations. Communs Math. Phys., 1974, **38**, № 3, 241—256 (РЖМат, 1975, 5Б538)
258. **Ramanathan G. V.**, Sandri G., Model for the derivation of kinetic theory. J. Math. Phys., 1969, **10**, № 9, 1763—1773
259. **Schieve W. C.**, Prigogine I., The role of subdynamica in kinetic theory. 8th Int. Symp.: Rarefied Gas Dyn., Stanford Univ., 1972». New York—London, 1974, 19—25
260. **Schmookler Julia**, Statistical mechanics and systems of large numbers of elements with random interaction. SIAM J. Contr., 1975, **13**, № 2, 243—270 (РЖМат, 1976, 1В96)
261. **Shiga Tokuzo**, Takahashi Yoichiro, Ergodic properties of the equilibrium process associated with infinitely many Markovian particles. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1974, **9**, № 2, 505—516 (РЖМат, 1974, 12В32)
262. **Spitzer F.**, Uniform motion with elastic collision of an infinite particle system. J. Math. and Mech., 1969, **18**, 973—989 (РЖМат, 1970, 5В55)
263. —, Random processes defined through the interaction of an infinite particle system. Lect. Notes. Math., 1969, **89**, 201—223
264. —, Interaction of Markov processes. Adv. Math., 1970, **5**, № 2, 246—290 (РЖМат, 1971, 11В79)
265. —, Introduction aux processus de Markov a parametere dans Z_ν Lect. Notes Math., 1974, **390**, 114—189
266. —, Recurrent random walk of an inifinite particle system. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **198**, 191—199 (РЖМат, 1975, 6В72)
267. —, Random time evolution of infinite particle systems. Adv. Math., 1975, **16**, № 2, 139—143 (РЖМат, 1975, 12В308)

268. —, Time evolution of one — dimensional systems whose equilibrium state is a renewal process. Notic. Amer. Math. Soc., 1976, 23, № 1, A—201
269. **Stone Ch.**, Infinite particle systems and multi-dimensional renewal theory. J. Math. Mech. 1968, 18, № 3, 201—227 (РЖМат, 1970, 4В88)
270. —, On a theorem by Dobrushin. Ann. Math. Statist., 1968, 39, № 5, 1391—1401 (РЖМат, 1971, 11В136)
271. **Sullivan W. G.**, A unified existence and ergodic theorem for Markov evolution of random fields. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1974, 31, № 1, 47—56 (РЖМат, 1975, 8В41)
272. —, Mean square relaxation times for evolution of random fields. Communs Math. Phys., 1975, 40, № 3, 249—258 (РЖМат, 1975, 10В169)
273. —, Exponential convergence in dynamical Ising models with distinct phases. Phys. Lett., 1975, A53, № 6, 441—442
274. **Szatzschneider W.**, A more deterministic version of Harris—Spitzer's «random constant veolicty» model for infinite systems of particles. Lect Notes Math., 1975, 472, 157—168 (РЖМат, 1976, 5В322)
275. **Takahashi Y.**, Markov processes with simple interaction—reversions of branching processes. Second Japan — USSR symposum on probability theory, 1972, Kyoto
276. —, Markov semigroups with simplest interaction. I. Proc. Jap. Acad., 1971, 47, Suppl., n», 974—978 (РЖМат, 1973, 8В43)
277. —, Markov semigroups with simplest interaction. II. Proc. Jap. Acad., 1971, 47, suppl. № 2, 1019—1024 (РЖМат, 1973, 8В44)
278. **Tanaka H.**, Propagation of chaos for certain Markov processes of jump type with nonlinear-generators. I. Proc. Japan. Acad., 1969, 45, № 6, 449—452 (РЖМат, 1970, 8В50)
279. —, Propagation of chaos for certain Markov processes of jump type with nonlinear generators II. Proc. Japan. Acad, 1969, 45, № 7, 598—600 (РЖМат, 1970, 8В51)
280. —, Purely discontinuous Markov processes with nonlinear generators and their propagation of chaos. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, 4, 599—691
281. —, Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1970, sec. 1A, 17, № 1-2, 259—272 (РЖМат, 1971, 8В83)
282. —, On Markov process corresponding to Bolzmanns equation on Maxwellian gas. Lect. Notes. Math., 1973, 330, 478—489
283. —, An inequality for a functional of probability distributions and its application to Kac's one-dimensional model of a Maxwellian gas. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1973, 27, № 1, 47—52 (РЖМат, 1974, 2В14)
284. —, On Markov process corresponding to Boltzmann's equation of Maxwellian gas. Second Japan—USSR symposium on probability theory, 1972, Kyoto
285. **Tanaka S.**, An extension of Wild's siem for solving certain non-linear equation of measures. Proc. Japan. Acad., 1968, 44, № 9, 884—889 (РЖМат, 1969, 12В42)
286. **Tsuge S.**, Sagara K., A new hierarchy system on the basis of a «Master» Boltzmann equation for microscopic density. J. Stat. Phys., 1975, 12, № 5, 403—425
287. **Ueno T.**, A class of purely discontinuous Markov processes with interactions. I. Proc. Japn. Acad., 1969, 45, № 5, 348—353 (РЖМат, 1970, 6В56)
288. —, A class of Markov prcoesses with interaction. I. Proc. Jap. Acad., 1969, 45, № 8, 641—646 (РЖМат, 1970, 12В48)
289. —, A class of Markov processes with non-linear bounded generators. Japan J. Math., 1969, 38, 19—38 (РЖМат, 1970, 4В44)
290. —, A class of Markov processes with interaction. II. Proc. Jap. Acad., 1970, 46, № 1, 995—1000 (РЖМат, 1971, 4В34)

291. —, A path and the propagation of chaos for Boltzmann's gas model. Proc. Jap. Acad., 1971, **47**, № 6, 529—533 (РЖМат, 1972, 2B57)
292. —, A class of purely discontinuous Markov processes with interactions. II. Proc. Jap. Acad., 1969, **45**, № 6, 437—440 (РЖМат, 1970, 6B57)
293. —, A stochastic model associated with Boltzmann equation. Second Japan—USSR symposium on probability theory, 1972, Kyoto
294. **Ukai S.**, On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear Boltzmann equation. Proc. Jap. Acad., 1974, **50**, № 3, 179—184 (РЖМат, 1975, 10Л481)
295. **Valleau J. P.**, Time evolution in the hard-rods system. Phys. Rev. A: Gen. Phys., 1970, **1**, № 4, 1240—1243
296. **Verbeure A.**, Linear response, stability, cluster properties. Lect. Notes Phys., 1975, **39**, 504—509
297. **Vidybida O. K.**, On solutions of the Bogoliubov hierarchy in the space of translationally invariant function. Preprint, IMP—75—117E, 1976
298. **Vstovsky V. P.**, Renormalization of the weak-coupling approximation in the kinetic theory. Phys. Lett., 1972, **A41**, № 2, 150—152
299. —, On the markovization of the muster equation. Phys. Lett., 1973, **A44**, 283—284
300. **Weyland A.**, Kinetic theory and the Lorentz gas. J. Math. Phys., 1974, **15**, № 11, 1942—1943 (РЖМат, 1975, 5Б508)
301. **Wild E.**, On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. Proc. Camb. Phil. Soc., 1951, **47**, 602—609
302. **Zubarev D. N.**, Kalashnikov V. P., The derivation of time irreversible master equation. Physica, 1971, **56**, № 3, 345—364
303. —, Novikov M. Ju., Die Boltzmann-gleichung und mögliche Wege zur Entwicklung dynamischer Metoden in der kinetischen Theorie. Fortschr. Phys., 1973, **21**, № 12, 703—734