



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. A. Bredikhin, On varieties of partially ordered semigroups with operations of cylindrification,  
*Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2009, Volume 9, Issue 3, 3–7

<https://www.mathnet.ru/eng/isu52>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 22, 2025, 06:55:09





# МАТЕМАТИКА

УДК 519.4

## О МНОГООБРАЗИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Д.А. Бредихин

Саратовский государственный университет,  
кафедра геометрии  
E-mail: bredikhin@mail.ru

В работе находится конечный базис тождеств многообразий упорядоченных алгебр, порожденных упорядоченными полугруппами бинарных отношений с операциями цилиндрификации.

**Ключевые слова:** многообразия, алгебры отношений, полугруппы, операции цилиндрификации.

**On Varieties of Partially Ordered Semigroups with Operations of Cylindrification**

D.A. Bredikhin

Saratov State University,  
Chair of Geometry  
E-mail: bredikhin@mail.ru

The finite basis of identities of the varieties of the ordered algebras generated by partially ordered semigroups of binary relations with cylindrifications operations is found in this paper.

**Key words:** varieties, algebras of relations, semigroups, operations of cylindrification.

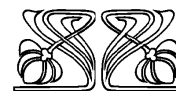
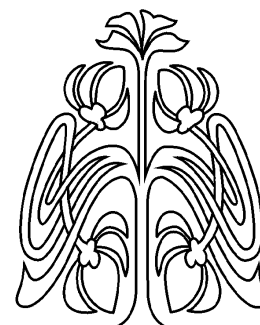
В творческом наследии В.В. Вагнера большое место занимают исследования, посвященные теории бинарных отношений [1]. Множество бинарных отношений  $\Phi$ , замкнутое относительно некоторой совокупности  $\Omega$  операций над ними, образует алгебру  $(\Phi, \Omega)$ , называемую алгеброй отношений. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения  $\subset$ . Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [2]. Одной из основных проблем в теории алгебр отношений традиционно является изучение их свойств, выраженных на языке тождеств [2–9].

Для заданного множества  $\Omega$  операций над бинарными отношениями обозначим через  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ) класс алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с операциями из  $\Omega$ . Пусть  $Var\{\Omega\}$  ( $Var\{\Omega, \subset\}$ ) — многообразие, порожденное классом  $R\{\Omega\}$  ( $R\{\Omega, \subset\}$ ).

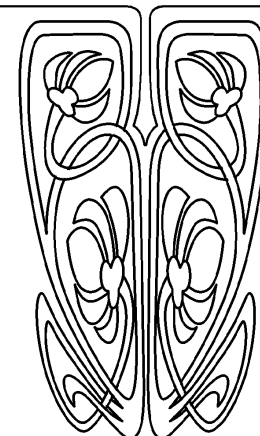
Нами будут рассмотрены операции умножения отношений  $\circ$ , объединения  $\cup$  и играющие важную роль в алгебраической логике [3] операции цилиндрификации  $\nabla_1$  и  $\nabla_2$ . Для всякого бинарного отношения  $\rho \subset X \times X$  положим  $\nabla_1(\rho) = pr_1\rho \times X$ ,  $\nabla_2(\rho) = X \times pr_2\rho$ , где  $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$  и  $pr_2\rho = \{y : (\exists x)(x, y) \in \rho\}$  — первая и вторая проекции отношения  $\rho$  соответственно.

В работе [9] был найден конечный базис тождеств для многообразий  $Var\{\circ, \nabla_1\}$  и  $Var\{\circ, \nabla_2\}$ . Соответствующие результаты формулируются в теоремах 1 и 2.

**Теорема 1.** Алгебра  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla_1\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





- 1)  $(xy)z = x(yz)$ ,    2)  $(x^*)^* = x^*$ ,    3)  $(x^*)^2 = x^*$ ,    4)  $(xy)^* = xy^*$ ,  
 5)  $xy^*x^* = xy^*$ ,    6)  $x^*y^*z^* = x^*z^*y^*$ ,    7)  $x^*y^*zy = x^*zy$ .

**Теорема 2.** Алгебра  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla_2\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)–3) и тождествам

- 4')  $(xy)^* = x^*y$  (4'),    5')  $x^*y^*x = y^*x$ ,    6')  $x^*y^*z^* = y^*x^*z^*$ ,    7')  $xyx^*z^* = xyz^*$ .

Под упорядоченной алгеброй мы понимаем алгебру с заданным на ней отношением порядка  $\leq$ , согласованным с операциями этой алгебры. Основными результатами работы являются следующие теоремы, в которых находятся базисы тождеств многообразий  $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$  и  $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ .

**Теорема 3.** Упорядоченная алгебра  $(A, \cdot, *, \leq)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)–7) и тождествам

- 8)  $x \leq x^*$ ,    9)  $x \leq x^*x$ ,    10)  $x^*y \leq x^*$ .

**Теорема 4.** Упорядоченная алгебра  $(A, \cdot, *, \leq)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)–3), 4')–7'), 8) и тождествам

- 9')  $x \leq xx^*$ ,    10')  $xy^* \leq y^*$ .

**Следствие 1.** Алгебра  $(A, \cdot, +, *)$  типа  $(2, 2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$  тогда и только тогда, когда  $(A, +)$  — полурешетка, выполняются тождества 1)–7) и тождества

- 11)  $x + x^* = x^*$ ,    12)  $x + x^*x = x^*x$ ,    13)  $x^*y + x^* = x^*$ ,  
 14)  $(x + y)z = xz + yz$ ,    15)  $x(y + z) = xy + xz$ ,    16)  $(x + y)^* = x^* + y^*$ .

**Следствие 2.** Алгебра  $(A, \cdot, +, *)$  типа  $(2, 2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \cup, \nabla_2\}$  тогда и только тогда, когда  $(A, +)$  — полурешетка, выполняются тождества 1)–3), 4')–7'), 11), 14)–16) и тождества

- 12')  $x + xx^* = xx^*$ ,    13')  $xy^* + y^* = y^*$ .

Докажем теорему 3 (теорема 4 доказывается аналогично).

**Доказательство.** Разобьем доказательство на ряд последовательных шагов.

*Шаг 1.* Доказательство теоремы основывается на результатах работ [5, 7]. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении.

Пусть  $Rel(U)$  — множество всех бинарных отношений на  $U$ . Всякая формула  $\varphi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$  логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая  $m$  бинарных предикатных символов  $r_1, \dots, r_m$  и две свободные индивидуальные переменные  $z_0, z_1$ , определяет  $m$ -арную операцию  $F_\varphi$  на  $Rel(U)$ :

$$F_\varphi(R_1, \dots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)\},$$

где  $\varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)$  означает, что формула  $\varphi$  выполняется, если  $z_0, z_1$  интерпретируются как  $x, y$  и  $r_1, \dots, r_m$  интерпретируются как отношения  $R_1, \dots, R_m$  из  $Rel(U)$ .

Операция над бинарными отношениями называется *примитивно-позитивной* [10] (в другой терминологии — *диофантовой* [7]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Примитивно-позитивные операции могут быть описаны с помощью графов [10].

Обозначим через  $N$  множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару  $G = (V, E)$ , где  $V = V(G)$  — конечное множество, называемое множеством вершин, и  $E = E(G) \subset V \times N \times V$  — тернарное отношение. Тройку  $(u, k, v) \in E$  будем называть ребром графа, идущим из вершины  $u$  в вершину  $v$ , помеченным меткой  $k$ , и графически изображать следующим образом:  $u \xrightarrow{k} v$ .

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида  $G = (V, E, in, out)$ , где  $(V, E)$  — помеченный граф;  $in = in(G)$  и  $out = out(G)$  — две выделенные вершины (необязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.



Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма.

Пусть  $F = F_\varphi$  — примитивно-положительная операция, задаваемая формулой  $\varphi$ . С этой операцией может быть ассоциирован граф  $G = G(F) = G(\varphi)$ , определяемый следующим образом:  $V(G)$  — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу  $\varphi$ ,  $in(G) = 0$ ,  $out(G) = 1$ ,  $(i, k, j) \in E(G)$  тогда и только тогда, когда атомарная формула  $r_k(z_i, z_j)$  входит в  $\varphi$ ; если формула  $z_i = z_j$  входит в  $\varphi$ , то вершины  $i$  и  $j$  отождествляются.

Заметим, что графы, соответствующие операции умножения отношений  $\circ$  и операциям цилиндрификации  $\nabla_1, \nabla_2$ , задаются следующим образом:

$$in \cdot \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot out, \quad in \cdot \xrightarrow{1} \cdot \cdot out, \quad in \cdot \cdot \xrightarrow{1} \cdot out.$$

Пусть  $G = (V, E, in, out)$  и  $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник  $G(G_1, \dots, G_m)$ , определяемый следующим образом [10]: возьмем двухполюсник  $G$  и заменим каждое его ребро  $(u, k, v) \in E$  на двухполюсник  $G_k$ , отождествляя при этом вершину  $in_k$  с вершиной  $u$  и вершину  $out_k$  с вершиной  $v$ .

Рассмотрим множество примитивно-положительных операций над отношениями  $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \dots, F_{\varphi_n}\}$ , и пусть  $A = (A, f_1, \dots, f_n)$  — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим  $G_1 = G(\varphi_1), \dots, G_n = G(\varphi_n)$ .

Для всякого терма  $p$  алгебры  $A$  определим следующим индуктивным образом двухполюсник  $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ :

- 1) если  $p = x_k$ , то  $G(p)$  представляет собой двухполюсник вида  $in \cdot \xrightarrow{k} \cdot out$ ;
- 2) если  $p = f_k(p_1, \dots, p_m)$ , то  $G(p)$  есть композиция  $G_k(G(p_1), \dots, G(p_m))$ .

Пусть  $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$  — двухполюсники. Отображение  $f : V_2 \rightarrow V_1$  называется гомоморфизмом из  $G_2$  в  $G_1$ , если  $f(in_2) = in_1$ ,  $f(out_2) = out_1$  и  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  для всякой тройки  $(u, k, v) \in E_2$ . Мы будем писать  $G_1 \prec G_2$ , если существует гомоморфизм из  $G_2$  в  $G_1$ .

Обозначим через  $Eq\{\Omega, \subset\}$  эквациональную теорию класса  $R\{\Omega, \subset\}$ . Теперь мы готовы сформулировать основной результат из [5]:

*Тождество  $p \leq q$  принадлежит эквациональной теории  $Eq\{\Omega, \subset\}$  тогда и только тогда, когда  $G(p) \prec G(q)$ .*

**Шаг 2.** Обозначим через  $\Sigma$  эквациональную теорию алгебр, удовлетворяющих тождествам 1)–10), и пусть  $\Xi$  — множество всех термов алгебры  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$ . Для всякого терма  $p_1$  и  $p_2$  из  $\Xi$  будем писать  $p_1 \prec p_2$  ( $p_1 \cong p_2$ ), если тождество  $p_1 \leq p_2$  ( $p_1 = p_2$ ) принадлежит  $\Sigma$ . В том случае, когда эквивалентность термов устанавливается с помощью тождества с номером  $k$ ), будем использовать запись  $p_1 \xrightarrow{k} p_2$  ( $p_1 \cong^k p_2$ ).

Пусть  $\Lambda$  — множество слов над алфавитом  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ,  $\odot$  — пустое слово,  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$ .

**Лемма 1.** Для любого терма  $p \in \Xi$  существуют такие  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$  ( $n \geq 0$ ), что  $p \cong (\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^* \alpha_0$ .

Доказательство леммы 1 содержится в работе [9].

**Лемма 2.** Следующие тождества принадлежат  $\Sigma$

$$17) (\alpha\beta)^* \leq \alpha^*, \quad 18) \alpha^*(\beta\gamma)^* \leq \alpha^*\gamma^*.$$

**Доказательство.** Действительно,  $(\alpha\beta)^* \xrightarrow{4} \alpha\beta^* \xrightarrow{8} \alpha^*\beta^* \xrightarrow{10} \alpha^*$  и  $\alpha^*(\beta\gamma)^* \xrightarrow{4} \alpha^*\beta\gamma^* \xrightarrow{10} \alpha^*\gamma^*$ . Лемма доказана.

**Шаг 3.** Согласно определению графы  $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$  для  $p \in \Xi$  могут быть построены следующим образом.

Если  $p = \alpha = \odot$ , то положим по определению  $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$ ,  $E_p = E_\alpha = \emptyset$ , и  $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$ .



Пусть  $p = \alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \in \Lambda$ . Тогда  $V_p = V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$ ,  $E_p = E_\alpha = \{(v_{k-1}, i_k, v_k) : k \in [1, n]\}$ , и  $in(p) = in(\alpha) = v_0$ ,  $out(p) = out(\alpha) = v_n$ :

$$in(\alpha) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} \cdot v_n = out(\alpha).$$

Пусть  $p = (\alpha)^*$ . Тогда  $V_p = V_{\alpha^*} = V_\alpha \cup \{v_{n+1}\}$ ,  $E_p = E_{\alpha^*} = E_\alpha$ , и  $in(p) = in(\alpha^*) = in(\alpha) = v_0$ ,  $out(p) = out(\alpha^*) = v_{n+1}$ :

$$in(\alpha^*) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} \cdot v_{n+1} = out(\alpha^*).$$

Пусть  $p = (\alpha_1)^*(\alpha_2)^*\dots(\alpha_n)^*\alpha_0$  и  $n > 1$ . Будем предполагать, что множества  $V_{\alpha_1^*}, \dots, V_{\alpha_n^*}, V_{\alpha_0}$  попарно не пересекаются. Возьмем в качестве  $V_p$  объединение этих множеств, в котором отождествлены следующие вершины:  $out(\alpha_1)$  и  $in(\alpha_2)$ ,  $out(\alpha_2)$  и  $in(\alpha_3)$ ,  $\dots$ ,  $out(\alpha_n)$  и  $in(\alpha_0)$ . Положим  $E_p = E_{\alpha_1} \cup \dots \cup E_{\alpha_n} \cup E_{\alpha_0}$ , и  $in(p) = in(\alpha_1)$ ,  $out(p) = out(\alpha_0)$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\alpha, \beta \in \tilde{\Lambda}$  и существует такое отображение  $f$  из  $V_\beta$  в  $V_\alpha$ , что  $(f(u), k, f(v)) \in E_\alpha$  для всякого  $(u, k, v) \in E_\beta$ . Тогда найдутся такие  $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{\Lambda}$ , что  $\alpha = \beta_1\beta_2$ . При этом  $\beta_1 = \odot$ , если  $f(in(\beta)) = in(\alpha)$ , и  $\beta_2 = \odot$ , если  $f(in(\beta)) = in(\alpha)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$ ,  $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$  и  $V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$ ,  $V_\beta = \{v'_0, \dots, v'_m\}$ . Предположим, что  $f(v'_0) = v_l$ . Тогда  $f(v'_k) = v_t$  и  $x_{j_k} = x_{i_t}$ , где  $t = l + k$ . Следовательно, достаточно положить  $\beta_1 = x_{i_1}\dots x_{i_s}$  (или  $\beta_1 = \odot$ , если  $l = 1$ , т.е.  $f(in(\beta)) = in(\alpha)$ ) и  $\beta_2 = x_{i_w}\dots x_{i_n}$  (или  $\beta_2 = \odot$ , если  $l + m = n$ , т.е.  $f(in(\beta)) = in(\alpha)$ ), где  $s = l$  и  $w = l + m + 1$ . Лемма доказана.

**Шаг 4.** Легко проверить выполнимость тождеств 8)–10). Откуда следует, что  $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla_1\}$ . Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что  $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$ .

Предположим, что тождество  $p_1 \leq p_2$  принадлежит  $Eq\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ . Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем  $G(p_1) \prec G(p_2)$ , т.е. существует гомоморфизм  $f$  из  $G(p_2)$  в  $G(p_1)$ . Согласно лемме 1 можно предположить, что  $p_1 = (\alpha_1)^*\dots(\alpha_n)^*\alpha_0$  и  $p_2 = (\beta_1)^*\dots(\beta_m)^*\beta_0$ .

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1.  $m = n = 0$ . Тогда согласно лемме 3 имеем  $p_1 = \alpha_0 = \beta_0 = p_2$ .

2.  $n = 0$ ,  $m > 0$  и  $\beta_0 = \odot$ . Тогда по лемме 3 имеем  $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$  и  $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$  для  $k = 2, \dots, m$ , откуда

$$p_1 = \alpha_0 \prec^8 \alpha_1^* \prec^3 \alpha_0^* \dots \alpha_0^* = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \prec^{17} \prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^* \prec^{18} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^* = p_2.$$

3.  $n = 0$ ,  $m > 0$  и  $\beta_0 \neq \odot$ . Тогда по лемме 3 имеем  $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$ ,  $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$  и  $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$  для  $k = 2, \dots, m$ , откуда

$$p_1 = \alpha_0 \prec^9 \alpha_1^*\alpha_0 \prec^3 \alpha_0^* \dots \alpha_0^*\alpha_0 = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^*\mu_0\beta_0 \prec^{17} \prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^*\mu_0\beta_0 \prec^{18} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\mu_0\beta_0 \prec^{10} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\beta_0 = p_2.$$

4.  $n > 0$ ,  $m > 0$  и  $\beta_0 = \odot$ . Тогда, учитывая, что компонента связности графа  $G(p_2)$  отображается в некоторую компоненту связности графа  $G(p_1)$ , по лемме 3 получаем  $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$  и  $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$  для  $k = 2, \dots, m$ , где  $g$  — функция, отображающая множество  $\{2, \dots, m\}$  во множество  $\{0, \dots, n\}$ . Следовательно,

$$p_1 = \alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \prec^3 \alpha_1^*\alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \prec^{6,10} \alpha_1^*\alpha_{g(2)}^* \dots \alpha_{g(m)}^* = = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \prec^{17} \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^* \prec^{18} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^* = p_2.$$

5.  $n > 0$ ,  $m > 0$  и  $\beta_0 \neq \odot$ . Так как  $\beta_0 \neq \odot$ , существует ребро в  $G(p_2)$ , входящее в вершину  $out(p_2)$ . Значит существует ребро в  $G(p_1)$ , входящее в вершину  $f(out(p_2)) = out(p_1)$ , откуда  $\alpha_0 \neq \odot$ . Далее, учитывая, что компонента связности графа  $G(p_2)$  отображается в некоторую компоненту связности графа  $G(p_1)$ , по лемме 3 получаем  $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$ ,  $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$  и  $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$  для  $k = 2, \dots, m$ ,



где  $g$  — функция, отображающая множество  $\{2, \dots, m\}$  во множество  $\{0, \dots, n\}$ . Поэтому

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \stackrel{3}{\prec} \alpha_1^* \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \stackrel{7}{\prec} \alpha_1^* \alpha_0^* \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \stackrel{6,10}{\prec} \\
 &\prec \alpha_1^* \alpha_{g(2)}^* \dots \alpha_{g(m)}^* \alpha_0 = (\beta_1 \lambda_1)^* (\mu_2 \beta_2 \lambda_2)^* \dots (\mu_m \beta_m \lambda_m)^* \mu_0 \beta_0 \stackrel{17}{\prec} \\
 &\prec \beta_1^* (\mu_2 \beta_k)^* \dots (\mu_m \beta_m)^* \mu_0 \beta_0 \stackrel{18}{\prec} \beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_m^* \mu_0 \beta_0 \stackrel{10}{\prec} \beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_m^* \beta_0 = p_2.
 \end{aligned}$$

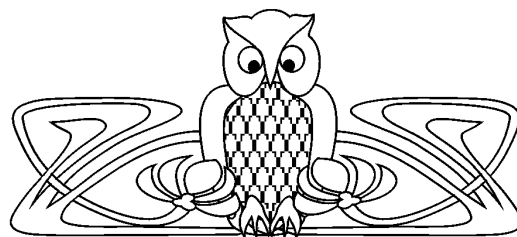
Таким образом, тождество  $p_1 \leq p_2$  принадлежит  $\Sigma$ , т. е.  $Eq\{o, \nabla_1\} \subset \Sigma$ . Теорема доказана. Следствия 1, 2 непосредственно вытекают из теорем 1, 2 и следствия 2 работы [5].

### Библиографический список

1. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.
2. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73–89.
3. Henkin L., Monk J.D., Tarski A. Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.
4. Schein B.M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1–62.
5. Бредихин Д.А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
6. Andreka H., Bredikhin D.A. The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. V. 33. P. 12–25.
7. Бредихин Д.А. О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
8. Бредихин Д.А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
9. Bredikhin D.A. On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. V. 16. P. 1–6.
10. Böner F, Pöschel F.R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7. P. 50–70.

УДК 517.518

## АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ



С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,  
кафедра теории функций и приближений  
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Устанавливаются двумерные аналоги известных условий Зигмунда и Саса для абсолютной сходимости рядов Фурье – Виленкина. Также доказывается, что двумерное условие Саса является неулучшаемым в определенном смысле.

**Ключевые слова:** абсолютная сходимость, ряды Фурье – Виленкина, модуль непрерывности, функции ограниченной  $p$ -флуктуации.

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$  — последовательность натуральных чисел, такая что  $2 \leq p_j \leq N$  при всех  $j \in \mathbb{N}$  и  $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$ . По определению полагаем  $m_0 = 1$ ,  $m_n = p_1 \dots p_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда каждое число  $x \in [0, 1)$  имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \quad (1)$$

### Absolute Convergence of Single and Double Fourier Series on Multiplicative Systems

S.S. Volosivets

Saratov State University,  
Chair of Theory of Functions and Approximations  
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Two-dimensional analogs of famous Zygmund and Szasz tests for absolute convergence of Fourier – Vilenkin series are established. Also it is proved that two-dimensional Szasz test is the best possible in the certain sense.

**Key words:** absolute convergence, Fourier – Vilenkin series, modulus of continuity, functions of bounded  $p$ -fluctuation.