Кроме того, $n_f=1$ тогда и только тогда, когда $g_\gamma=g\circ{}^\gamma g^{-1}$. В этом случае ${}^\gamma(f\circ g)=f\circ g$ для всех $\gamma\in\Gamma_{[f]}$, что означает $\Gamma_{f\circ g}=\Gamma_{[f]}$.

5. Вернемся к примеру из п. 1. Функция f, предъявленная там, является функцией, у которой $n_f=2$. Действительно, мы видели, что ${}^\gamma f=f\circ g[-1, -1]_\gamma$, $\gamma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}\setminus\mathbf{Q})$, где коцикл $g[-1, -1]_\gamma$ определен в лемме 3. В той же лемме показано, что такой коцикл соответствует конике $-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$, не изоморфной над $k_{[f]}=\mathbf{Q}$ конике $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.

Автор выражает благодарность В. А. Исковских за большую помощь в понимании используемой здесь когомологической техники и Г. Б. Шабату, под научным руководством которого написана эта статья.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grothendieck A. Esquisse d'un programme. Preprint. 1984.
2. Серр Ж. П. Когомологии Галуа., М., 1968.

Поступила в редакцию
14.04.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1995. № 1

УДК 517.957

Нгуен Манг Хунг

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Пусть $x=\{x_1, ..., x_n\}$ — точки в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, K — конус $\{x: 0<r=|x|<\infty,\ \theta\in\Omega\}$, где $(r, \theta)=(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ — полярные координаты в $\mathbf{R}^n$, Ω — область на единичной сфере S^{n-1} с границей $\partial\Omega$ класса C^2.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u+r^\sigma u^p=0 \text{ в } K, \tag{1}$$

где $\sigma\in\mathbf{R}$, $p>1$.

В этой заметке доказаны результаты о положительных решениях уравнения (1). В случае когда $u=0$ на $\partial K\setminus\{0\}$, для уравнения (1) такие результаты были получены в [1].

Лемма. *Пусть функции u, v принадлежат классу $C^2(K)\cap C^1(K\setminus\{0\})$ и удовлетворяют следующим условиям:*

(i) $\Delta u\leqslant\Delta v\leqslant 0$ *в* K,
(ii) $u>0$ *в* K,
(iii) $v=0$ *на* ∂K,
(iv) $v\to 0$ *при* $r\to\infty$.

Тогда существует положительная постоянная $C<1$, такая, что $u\geqslant Cv$ в K_1, где $K_1=\{x\in K: |x|>1\}$.

Доказательство. Предположим противное: для любого положительного числа $\varepsilon<1$ имеем $\sup\limits_{x\in K_1} w_\varepsilon(x)>0$, $w_\varepsilon=\varepsilon v-u$. Отсюда, поскольку функция $v\to 0$ при $r\to\infty$ и функция w_ε непрерывна в $\overline{K}_1$, существует такая точка $x^\varepsilon\in\Omega\setminus\partial\Omega$, что $w_\varepsilon(x^\varepsilon)=\sup\limits_{x\in K_1} w_\varepsilon(x)$. Применяя такие же рассуждения, как и при доказательстве леммы 3.4 в [2], получаем равенство

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu_1}(x^\varepsilon) > 0, \tag{2}$$

где ν_1 — единичная внешняя нормаль к ∂K_1.

Зафиксируя $r=1$, мы можем рассматривать w_ε как функцию переменных θ_i, $i=\overline{1,\ n-1}$. Тогда функция $w_\varepsilon(1,\theta)$ достигает максимума в точке $x^\varepsilon=(1,\theta^\varepsilon)\in\Omega\backslash\partial\Omega$. Следовательно,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \theta_i}(x^\varepsilon)=0, \quad i=\overline{1,\ n-1}. \tag{3}$$

Так как множество $\{x^\varepsilon,\ 0<\varepsilon<1\}$ ограничено и $0<u(x^\varepsilon)<\varepsilon v(x^\varepsilon)$, то существует последовательность $\{x^{\varepsilon_n}\}_n$, которая сходится к точке $x^0\in\Omega$. Из (2) и (3) получаем неравенства

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x^0)\geqslant 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta_i}(x^0)=0, \quad i=\overline{1,\ n-1}. \tag{5}$$

Аналогично рассуждая для неравенства (2), имеем $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0)<0$, где ν — единичная внешняя нормаль к ∂K. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^0)\neq 0$ для некоторого индекса j, $1\leqslant j\leqslant n$. В силу (4) и (5) отсюда получаем $\frac{\partial u}{\partial r}(x^0)>0$. С другой стороны, $u(x^0)=0$. Таким образом, существует такая точка $x^1\in\partial K$, что $u(x^1)<0$. Лемма доказана.

В полярных координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta=\frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)_r+\frac{1}{r^2}\Delta_\theta,$$

где Δ_θ — оператор Бельтрами—Лапласа на сфере S^{n-1}. Пусть $\Psi>0$ — первая собственная функция задачи

$$\begin{cases} \Delta_\theta\Psi+\lambda\Psi=0 \text{ в } \Omega, \\ \Psi=0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Тогда λ — наименьшее собственное значение. Обозначим

$$\alpha_\pm=-\frac{n-2}{2}\pm\sqrt{\lambda+\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}.$$

Теорема. *Пусть* $1<p\leqslant p^*=\max\left\{1-\frac{\sigma+2}{\alpha_+},\ 1-\frac{\sigma+2}{\alpha_-}\right\}$. *Тогда уравнение* (1) *не имеет положительных решений, принадлежащих классу* $C^2(K)\cap C^1(\bar K\backslash\{0\})$.

Доказательство. Пусть теорема неверна. Тогда существует положительная функция $u\in C^2(K)\cap C^1(\bar K\backslash\{0\})$, удовлетворяющая уравнению (1).

1-й случай: $1<p<p^*$ и $p^*=1-\frac{\sigma+2}{\alpha_-}$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta v=0 & \text{в } K, \\ v=0 & \text{на } \partial K. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда функция $v=\Psi(\theta)r^{\alpha_-}$, где $\Psi(\theta)$ — из (6), является решением задачи (7). Согласно лемме имеем неравенство

$$u\geqslant Cv \text{ в } K_1, \tag{8}$$

где C — постоянная, $0<C<1$.

Так как $1<p<1-\frac{\sigma+2}{\alpha_-}$, то $(p-1)\alpha_-=(2+\sigma)+s$, где s — положительное число. Положим $C^{p-1}\Psi^{p-1}(\theta)=\Psi_1(\theta)$, $Q(x)=r^\sigma u^{p-1}$. Из (8) следует, что

$$r^2Q(x)\geqslant\Psi_1(\theta)r^s \text{ в } K.$$

Итак, мы имеем линейное уравнение

$$Lh(x)=-\Delta h(x)-\frac{1}{2}Q(x)h(x) \text{ в } K_1, \tag{9}$$

удовлетворяющее условиям теоремы 4 в [3]. Следовательно, существует ограниченная область $N\subset K_1$, такая, что уравнение (9) имеет нетривиальное решение $h(x)$, $h(x)=0$ на ∂N. По теореме 3.4 из [4] функция $u(x)$, которая является нетривиальным решением уравнения $Lu-\frac{1}{2}Q(x)u=0$, изменит знак в K_1. Это противоречит выбору u.

2-й случай: $p=p^*$ и $p^*=1-\frac{\sigma+2}{\alpha_-}$.

Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{cases} \Delta v=-C^p\Psi^p(\theta)r^{-\alpha_--2} & \text{в } K, \\ v=0 & \text{на } \partial K, \end{cases} \tag{10}$$

где функция $\Psi(\theta)$ — из (6), константа C — из (8). Несложно проверить, что $v=C_1r^{\alpha_-}\ln r\Psi(\theta)+g(\theta)r^{\alpha_-}$ является решением задачи (10), где C_1 — положительная постоянная, $g(\theta)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_\theta g(\theta)+\mu g(\theta)=C^p\Psi^p(\theta)-C_2(n+\alpha_--2)\Psi(\theta) & \text{в } \Omega, \\ g(\theta)=0 & \text{на } \partial\Omega; \end{cases}$$

здесь $C_2=\dfrac{\int\limits_\Omega C^p\Psi^{p+1}(\theta)\,d\theta}{-(n+\alpha_--2)\int\limits_\Omega\Psi^2(\theta)\,d\theta}$. В силу леммы получаем $u\geqslant C_3r^{\alpha_-}[\ln r\Psi(\theta)+g(\theta)]$ в K_1, где C_3 — положительная постоянная. Заметив, что $Q(x)=r^{\alpha_-}u^{p-1}$, имеем

$$r^2Q(x)\geqslant C_4[\ln r\Psi(\theta)+g(\theta)]^{p-1} \text{ в } K_1,$$

где $C_4=C_3^{p-1}$. Рассуждая так же, как в 1-м случае, приходим к противоречию.

При $p^* = 1 - \frac{\sigma+2}{\alpha_+}$ сделаем преобразование Кельвина

$$|y| = \frac{x}{|x|^2}, \quad v(y) = |x|^{n-2} u(x).$$

Повторяя рассуждения в первом и втором случае для уравнения $\Delta v + |y|^{-n-2-\sigma+p(n-2)} v^p = 0$ в K, мы можем утверждать справедливость теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Оценка в теореме является точной, потому что если

$$p^* < p < \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad n=2,\ 3, \\ \dfrac{n+1}{n-3} & \text{при} \quad n>3, \end{cases}$$

то существует положительное решение уравнения (1) (ср. [1]).

Автор приносит глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву, под руководством которого получен этот результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bandle C., Essén M. On positive solution of Emden equations in cone-like domains//Arch. Ration. Mech. and Anal. 1990. **112.** 319—338.
2. Гилберг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
3. Headley V. B., Swanson C. A. Oscillation criteria for elliptic equations//Pacif. J. Math. 1968. **27,** N 3. 501—506.
4. Kreith K. Sturmian theorems and positive resolvents//Trans. Amer. Math. Soc. 1969. **139.** 319—327.

Поступила в редакцию
04.10.93