



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Каразеева, А. П. Осколков, Аттракторы и динамические системы, порождаемые начально-краевыми задачами для уравнений движения вязкоупругих жидкостей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 162, 159–168

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

23 января 2025 г., 10:34:22



АТТРАКТОРЫ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

1. Работы О.А.Ладыженской [1]-[3] (см. также [4], [5]) создали новое направление в теории начально-краевых задач и теории асимптотических методов для уравнений с частными производными - нахождение аттракторов \mathcal{M} начально-краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений с диссипацией и построение и исследование на \mathcal{M} динамических систем, порождаемых этими начально-краевыми задачами. Развитые в них методы позволяют исследовать как задачи с параболическим характером диссипации, в которых разрешающие операторы V_t являются вполне непрерывными при $\forall t > 0$ (полугруппы класса 1 [5]), так и определенные классы диссипативных задач гиперболического типа, в которых разрешающие операторы V_t при $\forall t > 0$ можно представить в виде суммы $V_t = W_t + U_t$ сжимающих операторов W_t и вполне непрерывных операторов U_t полугруппы класса 2 [5]). В настоящее время известен достаточно богатый набор задач обоих классов (см. [1]-[5] и цитированную там литературу). Цель настоящей заметки - акцентировать внимание на том, что задачи обоих классов возникают также в теории начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей - именно, задачи с параболическим характером диссипации возникают при описании двумерных течений жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \dots$ [6]-[8], а диссипативные задачи гиперболического типа возникают при описании произвольных трехмерных течений жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L = 0, 1, 2, \dots$ (при $L = 0$ это доказано в [9]).

2. Линейной вязкоупругой жидкостью с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации $\{\lambda_\ell\}$ и времен ретардации $\{x_m\}$ называется жидкость, определяющее, или реологическое, уравнение которой, связывающее девиатор тензора напряжений σ и тензор скоростей деформаций D , имеет вид [10]-[14]

$$\sigma + \sum_{\ell=1}^L \lambda_\ell \frac{\partial^\ell \sigma}{\partial t^\ell} = 2\nu D + \sum_{m=1}^M x_m \frac{\partial^m D}{\partial t^m}, \quad \nu, \lambda_\ell, x_m > 0. \quad (1)$$

При $M = L-1, L = 1, 2, \dots$ имеем жидкости Максвелла порядка L , при $M =$

$= L = 1, 2, \dots$ - жидкости Олдройта порядка L , при $M = L + 1$, $L = 0, 1, 2, \dots$ - жидкости Кельвина-Фойгта порядка L [10] - [14].

Различные варианты уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей получены в работах А.П.Осколкова [12] - [14]. В работе [15] указан еще один вариант этих уравнений, особенно удобный при исследовании динамических систем, порождаемых начально-краевыми задачами для уравнений движения вязкоупругих жидкостей, и исследовании гидродинамической устойчивости течений таких жидкостей.

Следуя [15], будем предполагать в дальнейшем, что $\{\lambda_\ell\}$ удовлетворяют следующим условиям: корни $\{\alpha_\ell\}$ полинома $Q(p) \equiv 1 + \sum_{\ell=1}^L \lambda_\ell p^\ell$ различны, т.е. $Q'(\alpha_\ell) \neq 0$, $\ell = 1, \dots, L$, вещественны и отрицательны: $\alpha_\ell < 0$, $\ell = 1, \dots, L$, и, кроме того, $\{\lambda_\ell\}$, ν , $\{x_m\}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\beta_\ell \equiv \nu P(\alpha_\ell) [Q'(\alpha_\ell)]^{-1} > 0, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad (2)$$

причем для жидкости Олдройта порядка L $P(p) \equiv P_0(p) \equiv \sum_{m=0}^{L-1} (x_m - \mu \lambda_m) p^m$, $\mu_0 \equiv x_L \lambda_L^{-1}$, $x_0 \equiv 1$, а для жидкости Кельвина-Фойгта порядка $L = 1, 2, \dots$

$$P(p) \equiv P_V(p) \equiv \sum_{m=0}^{L-1} (x_m - \mu_V \lambda_m - \mu_* \lambda_{m-1}) p^m, \quad \mu_* \equiv x_{L+1} \lambda_L^{-1}, \quad \mu_V \equiv (x_L - \mu_* \lambda_{L-1}) \lambda_L^{-1} > 0, \quad x_0 \equiv 1, \quad \lambda_{-1} \equiv 0.$$

Условия (2) в случае жидкости Олдройта порядка L обобщают известное условие Олдройта [10] для жидкости Олдройта порядка I : $\nu - x \lambda^{-1} > 0$.

Для жидкости Олдройта порядка 2 описанные выше условия на $\{\lambda_\ell\}$, ν , $\{x_m\}$ сводятся к следующим: $\mathcal{D} \equiv \lambda_1^2 - \gamma \lambda_2 > 0$,

$$\nu \lambda_2 - x_2 + (x_1 \lambda_2 - x_2 \lambda_1)(-\lambda_1 + \sqrt{\mathcal{D}}) > 0, \quad \nu \lambda_2 - x_2 + (x_1 \lambda_2 - x_2 \lambda_1)(-\lambda_1 - \sqrt{\mathcal{D}}) < 0. \quad (3)$$

Для жидкости Кельвина-Фойгта порядка I условия (2) сводятся к следующим:

$$x_1 - x_2 \lambda^{-1} > 0, \quad \lambda - x_1 + x_2 \lambda^{-1} > 0. \quad (4)$$

В [15] показано, что движения жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \dots$ и жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L = 1, 2, \dots$ при условиях (2) описываются соответственно следующими интегродифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu_0 \Delta v - \sum_{m=1}^L \beta_m^{(0)} \int_0^t e^{a_m(t-\tau)} \Delta v d\tau + \text{grad} p = f, \quad \text{div} v = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu_v \Delta v - \mu_* \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \sum_{m=1}^L \beta_m^{(v)} \int_0^t e^{a_m(t-\tau)} \Delta v d\tau + \text{grad} p = f, \quad \text{div} v = 0. \quad (5)$$

Введем следующие обозначения: $u^m(x, t) \equiv \int_0^t e^{a_m(t-\tau)} v d\tau$, $m=1, \dots, L$;

\mathcal{P} — ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на $\dot{J}(\Omega)$ [16], $\mathcal{P}\Delta \equiv \tilde{\Delta}$, $\mathcal{P}(v_k v_k) \equiv$
 $\equiv A(v)$, $\vec{\Phi}(x, t) \equiv \{v, u^1, \dots, u^L\}$, $\vec{F} \equiv \{\mathcal{P}f, 0, \dots, 0\}$. Тогда, как следует из
 [15], движения жидкостей Олдройта порядка $L=1, 2, \dots$ и жидкостей
 Кельвина-Фойгта порядка $L=1, 2, \dots$ описываются соответственно сле-
 дующими операторными дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \Lambda_1^{(0)} \vec{\Phi} = \vec{F}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \Lambda_1^{(v)} \vec{\Phi} + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2 \vec{\Phi} = \vec{F}, \quad (7)$$

в которых

$$\Lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} -\mu \tilde{\Delta} - A & -\beta_1 \tilde{\Delta} & -\beta_2 \tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L \tilde{\Delta} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\Lambda_2 \equiv \begin{pmatrix} -\mu_* \tilde{\Delta} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \textcircled{0} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad (9)$$

Уравнение (6), (8) и уравнение (7)-(9) решаются в $Q_\infty \equiv \Omega \times [0, \infty)$, $\Omega \in E^m$, $m = 2, 3$, при начально-краевых условиях

$$\vec{\Phi}|_{t=0} = (v_0(x), 0, \dots, 0), \quad x \in \Omega; \quad \vec{\Phi}|_{\partial Q_\infty} = 0. \quad (10)$$

Движение жидкости Кельвина-Фойгта порядка 0 описывается системой дифференциальных уравнений [17]-[18], [12]-[14]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v - \alpha \frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \text{grad } p = f, \quad \text{div } v = 0, \quad (11)$$

которые решаются в Q_∞ при начально-краевых условиях

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial Q_\infty} = 0. \quad (12)$$

Будем предполагать в дальнейшем, что в уравнении (6), (8), уравнении (7)-(9) и системе (11) $f(x, t) \equiv f(x)$, $\forall t \geq 0$.

3. Рассмотрим сначала начально-краевую задачу (6), (8), (10), описывающую движение жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \dots$, и будем предполагать, что Ω - двумерная ограниченная область: $\Omega \in E^2$. Положим $E_0(\Omega) \equiv \dot{J}(\Omega) \times \prod_{\ell=1}^L H(\Omega)$ [16],

$$\|\vec{\Phi}\|_{E_0}^2 \equiv \|v\|_{2, \Omega}^2 + \sum_{\ell=1}^L \beta_\ell^{(0)} \|u_x^\ell\|_{2, \Omega}^2, \quad \text{и возьмем } E_0(\Omega) \text{ в ка-}$$

честве фазового пространства задачи (6), (8), (10). На нем, как показано в [12]-[14], определена полугруппа V_t , $t \geq 0$, ограниченных непрерывных нелинейных операторов, однозначно определяющих слабое решение (решение в смысле Э.Холфа [16]) $\vec{\Phi}(\cdot, t) \equiv \vec{\Phi}(t)$ задачи (6), (8), (10) по его значению при $t=0$: $\vec{\Phi}(t) \equiv V_t(\vec{\Phi}(0))$.

Для слабого решения задачи (6), (8), (10) справедлива оценка [7], [8]:

$$\|\vec{\Phi}\|_{E_0} \leq R_0 \equiv (\mu_0 \lambda_1^*)^{-1} \|f\|_{2, \Omega}, \quad \forall t \geq 0, \quad \lambda_1^* \equiv \min_{v \in H(\Omega)} \frac{\|v_x\|_{2, \Omega}}{\|v\|_{2, \Omega}}. \quad (13)$$

Положим, далее, $E_s(\Omega) \equiv (W_2^s(\Omega) \cap H(\Omega)) \times \prod_{p=1}^L (W_2^{s+1}(\Omega) \cap H(\Omega))$,

$s = 1, 2, \dots$, $\|\vec{\Phi}\|_{E_s}^2 \equiv (\|v\|_{2, \Omega}^{(s)})^2 + \sum_{\ell=1}^L \beta_\ell^{(0)} (\|u_x^\ell\|_{2, \Omega}^{(s+1)})^2$. В [7], [8] показано, что если $\partial\Omega \in C^{s+1}$, $f(x) \in W_2^{s-1}(\Omega) \cap \dot{J}(\Omega)$, $s = 1, 2, \dots$, то для слабого решения $\vec{\Phi}(t)$ двумерной задачи (6), (8), (10) при $\forall t > 0$

справедлива оценка

$$\|\vec{\Phi}(\cdot, t)\|_{E_s} \leq C_s(\mu_0^{-1}, \|f\|_{2,\Omega}^{(s-1)}, \alpha_t^{-1}, (\beta_t^{(0)})^{-1}), \quad (14)$$

а отсюда следует, что эволюционный оператор V_t двумерной задачи (6), (8), (10) при $\forall t > 0$ переводит шар $B_0 \equiv \{\vec{\Phi} \in E_0(\Omega) : \|\vec{\Phi}\|_{E_0} < R_0\}$ в множество $V_t(B_0)$, ограниченное в $E_1(\Omega)$ и компактное в $E_0(\Omega)$, и потому V_t при $\forall t > 0$ является вполне непрерывным в $E_0(\Omega)$, т.е. полугруппа $V_t, t > 0$, является, по терминологии [5], полугруппой класса I. На основании этого в [7], [8] доказана

ТЕОРЕМА 1. Для двумерной задачи (6), (8), (10) в фазовом пространстве $E_0(\Omega)$ имеются поглощающее множество B_0 и минимальный глобальный B -аттрактор $\mathcal{M} \equiv \bigcap_{t \geq 0} V_t(B_0)$, который является непустым, инвариантным, связным компактом в $E_0(\Omega)$ и ограниченным в пространствах $E_s(\Omega), s=1, 2, \dots$, множеством.

Далее в [7], [8] с помощью тех же соображений, что и в [1] (см. также [5]) для двумерной системы Навье-Стокса, доказываемся

ТЕОРЕМА 2. Полугруппа $V_t : E_0(\Omega) \Rightarrow E_0(\Omega), t \geq 0$ для двумерной задачи (6), (8), (10) продолжается на \mathcal{M} до непрерывной группы $V_t : \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}, -\infty < t < \infty$, причем $V_t \equiv V_t^{-1}$ для $t < 0$, и $\vec{\Phi}(t) \equiv V_t(\vec{\Phi}(0)), \vec{\Phi}(0) \in \mathcal{M}, -\infty < t < \infty$, есть решение задачи (6), (8), (10). Аттрактор \mathcal{M} состоит из тех и только тех элементов $\vec{\Psi} \in B_0$, для которых задача (6), (8), (10) имеет решение $\vec{\Phi}(t) \equiv V_t(\vec{\Psi})$, равное $\vec{\Psi}$ при $t=0$, при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Пара $\{\mathcal{M}; V_t, -\infty < t < \infty\}$ и является динамической системой, порождаемой начально-краевой задачей (6), (8), (10) о двумерных движениях жидкостей Олдройта порядка $L=1, 2, \dots$.

В [7], [8] для двумерной задачи (6), (8), (10) доказан ряд свойств аттрактора \mathcal{M} и динамической системы $\{\mathcal{M}; V_t, -\infty < t < \infty\}$, характерных для задач с параболическим характером диссипации, описываемых, по терминологии О.А.Ладыженской [5], полугруппами $V_t, t \geq 0$, класса I, а именно, доказана "конечномерность динамики V_t двумерной задачи (6), (8), (10) на \mathcal{M} ", а также конечность хаусдорфовой $d_H(\mathcal{M})$ и информационной $h(\mathcal{M})$ размерностей аттрактора \mathcal{M} [5] и оценка

$$\dim_H(\mathcal{M}) \leq h(\mathcal{M}) \leq N \ln \left(\frac{8x^2 \ell^2}{1-\sigma^2} \right) \ln^{-1} \left(\frac{2}{1+\sigma^2} \right), \quad (15)$$

в которой числа $\ell \equiv \ell(\mu_0^{-1}), \sigma \equiv \sigma(\mu_0^{-1}, N), 0 < \sigma < 1, N \equiv N(\mu_0^{-1}, \Omega) \gg 1$ определяются лишь данными задачи (6), (8),

(10), а μ - постоянная Гаусса [5].

4. Рассмотрим теперь начально-краевую задачу (7)-(10), описывающую движение жидкостей Кельвина-Фойгта порядка $L = 1, 2, \dots$, и будем предполагать на этот раз, что Ω - трехмерная ограниченная область: $\Omega \in E^3$. Возьмем в качестве фазового пространства задачи (7)-(10) пространство $\mathcal{D}_1(\Omega) \equiv \prod_{\ell=0}^L H(\Omega)$, $\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{D}_1}^2 = \|v\|_{2,\Omega}^2 +$

$$+ \mu_* \|v_x\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{\ell=1}^L \beta_\ell^{(v)} \|u_x^\ell\|_{2,\Omega}^2. \quad \text{На нем, как пока-$$

зано в [17]-[18], [12]-[14], определена группа V_t , $-\infty < t < \infty$, ограниченных нелинейных непрерывных операторов, однозначно определяющих слабое решение $\vec{\Phi}(t)$ задачи (7)-(10) по его значению при $t=0$: $\vec{\Phi}(t) \equiv V_t(\vec{\Phi}(0))$. Для слабого решения $\vec{\Phi}(t)$ задачи (7)-(10) справедлива оценка [17]-[18]:

$$\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{D}_1} \leq Q_0 \equiv (\mu_* \lambda_1^*)^{-1} \|f\|_{2,\Omega}, \quad \forall t \in (-\infty, \infty), \quad (16)$$

вытекающая из энергетического равенства для задачи (7)-(10):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{D}_1}^2 + \mu_* \|v_x\|_{2,\Omega}^2 + \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \beta_\ell^{(v)} \|u_x^\ell\|_{2,\Omega}^2 = (f, v)_{2,\Omega}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (17)$$

Как и в [1] (см. также [5]), из (17), (16) легко выводится заключение о том, что шар $B_0 \equiv \{\vec{\Phi} \in \mathcal{D}_1(\Omega) : \|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{D}_1} < Q_0\}$ является поглощающим множеством для $\forall B \in \mathcal{D}_1(E)$, и $V_t(B_0) \subset B_0$, т.е. слабые решения трехмерной задачи (7)-(10) втягиваются в шар B_0 за конечное время.

Представим V_t при $t > 0$ в виде суммы $V_t \equiv W_t + U_t$, где W_t есть разрешающий оператор для линейной задачи

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \Lambda_3 \vec{\omega} + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2 \vec{\omega} = 0, \quad \vec{\omega}|_{t=0} = \{v_0, 0, \dots, 0\} \equiv \vec{\Phi}(0), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

$$\Lambda_3 \equiv \begin{pmatrix} -\mu_* \tilde{\Delta} & -\beta_1^{(v)} \tilde{\Delta} & -\beta_2^{(v)} \tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L^{(v)} \tilde{\Delta} \\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L \end{pmatrix}, \quad (19)$$

а U_t - разрешающий оператор нелинейной задачи

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + \Lambda_3 \vec{\Psi} + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_2 \vec{\Psi} = \vec{G}(t), \quad \vec{\Psi}|_{t=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (20)$$

причем $\vec{G}(t) \equiv \vec{F}(x) - \Lambda_4(\vec{\Phi})$, $\vec{\Phi}(t) = V_t(\vec{\Phi}(0))$,

$$\Lambda_4(\vec{\Phi}) \equiv \begin{pmatrix} A(v) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & \textcircled{0} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Очевидно, что $\vec{\Phi}(t) = \vec{\omega}(t) + \vec{\Psi}(t) \equiv W_t \vec{\Phi} + U_t \vec{\Phi}$.

Из энергетического равенства для задачи (18) легко следует оценка

$$\|W_t \vec{\Phi}\|_{\mathcal{A}_1} \equiv \|\vec{\omega}\|_{\mathcal{A}_1} \leq C_1 \|\vec{\Phi}(0)\|_{\mathcal{A}_1} e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0, \quad (22)$$

в которой постоянные C_1 и $\gamma > 0$ зависят только от данных задачи (см., например, [16], гл.VI); оценка (22) показывает, что W_t , $t > 0$, является на $\mathcal{A}_1(\Omega)$ экспоненциально-сжимающей полугруппой [5].

Далее, из результатов работ [17]-[18], [12]-[14], следует, что для решений задачи (20), (21) справедлива оценка

$$\max_{t>0} \|U_t \vec{\Phi}\|_{\frac{3}{2}, \Omega}^{(2)} \equiv \max_{t>0} \|\vec{\Psi}\|_{\frac{3}{2}, \Omega}^{(2)} \leq C_2 \max_{t>0} \|\vec{G}(t)\|_{\frac{3}{2}, \Omega}, \quad (23)$$

в которой постоянная C_2 определяется только данными задачи. Из теорем вложения С.Л.Соболева следует, что если $\vec{\Phi} \in \mathcal{A}_1(\Omega)$, то $\vec{G}(t) \in L_{3/2}(\Omega)$. Тем самым разрешающий оператор U_t задачи (20), (21): $\vec{\Psi}(t) \equiv U_t \vec{\Phi}(t)$ при $\forall t > 0$ отображает пространство $\mathcal{A}_1(\Omega)$ в пространство $\mathcal{A}_2(\Omega) \equiv \prod_{t=0}^L \{W_{3/2}^2(\Omega) \cap H(\Omega)\}$

и потому является вполне непрерывным в $\mathcal{A}_1(\Omega)$.

Итак, группа V_t при $\forall t > 0$ есть сумма линейной экспоненциально-сжимающей полугруппы W_t и вполне непрерывного нелинейного оператора U_t в пространстве $\mathcal{A}_1(\Omega)$, т.е. полугруппа V_t при $\forall t > 0$ является, по терминологии О.А.Ладженской [5], полугруппой класса 2 в пространстве $\mathcal{A}_1(\Omega)$. Из доказанных О.А.Ладженской [5] общих теорем о свойствах полугрупп класса 2 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Для трехмерной задачи (7)-(9) в фазовом прост-

ранстве $\mathcal{D}_1(\Omega)$ имеются поглощающее множество $B_0 = \{\vec{\varphi} \in \mathcal{D}_1(\Omega) :$

$\|\vec{\varphi}\|_{\mathcal{D}_1} < Q_0$, см. (16)} и минимальный глобальный В-аттрактор $M = \bigcap_{t \geq 0} [V_t(B_0)]_{\mathcal{D}_1}$, который является непустым, инвариантным, связным компактом в $\mathcal{D}_1(\Omega)$ и ограниченным в $\mathcal{D}_2(\Omega)$ множеством. Хаусдорфова $\dim_H(M)$ и информационная $h(M)$ размерности аттрактора M конечны $\dim_H(M) \leq h(M)$, и $h(M)$ оценивается лишь через данные задачи.

Для жидкостей Кельвина-Фойгта порядка 0 теорема 3 доказана в [9].

Авторы выражают признательность Л.Д.Фаддееву и О.А.Ладженской за внимание к их исследованиям по гидродинамике неньютоновских жидкостей.

Литература

1. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6. Зап. науч.семина.ЛОМИ, 1972, т.27, с.91-114.
2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. II. Зап.науч. семина.ЛОМИ, 1979, т.84, с.131-146.
3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1982, т.115, с.137-155.
4. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 18. Зап. науч.семина.ЛОМИ, 1986, т.152, с.72-85.
5. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О нахождении минимальных глобальных В-аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными. Препринт ЛОМИ Е-3-87, Л., 1987, 54с.
6. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О предельных режимах и аттракторе для уравнений движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные

- вопросы теории функций. 18. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1986, т.152, с.67-71.
7. Котсиолис А.А., Осколков А.П. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УШ. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1986, т.155, с.119-125.
 8. Каразеева Н.А., Котсиолис А.А., Осколков А.П. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка L . - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1987, т.164, с.109-116.
 9. Калантаров В.К. Об аттракторах для некоторых нелинейных задач математической физики. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 18. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1986, т.152, с.50-54.
 10. Олдройт Дж.Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. - В сб.: Реология. Теория и приложения. М., 1962, с.262-310.
 11. Bird R., Armstrong R., Hassager R. Dynamics of polymeric liquids. Vol.1. Fluid mechanics. N.-Y., 1977.
 12. Осколков А.П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Препринт ЛОМИ Р-2-83, Л., 1983, 65 с.
 13. Осколков А.П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1983, т.159, с.102-131.
 14. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореф.докт.дисс., Л., 1983, 32 с.
 15. Осколков А.П., Ахматов М.М., Котсиолис А.А. Об уравнениях движения линейных вязкоупругих жидкостей и уравнениях фильтрации жидкостей с запаздыванием. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 19. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1987, т.163, с.103-109.
 16. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-ое изд. М., 1970.
 17. Осколков А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1973, т.38, с.98-136.

18. О с к о л к о в А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 9. Зап.науч.семина. ЛОМИ, 1976, т.59, с.133-177.

N.A.Karazeeva, A.P.Oskolkov. On the attractors and the dynamical Systems generated by the equations motion of viscoelastic fluids.

Attractors \mathcal{M} and dynamical Systems $\{\mathcal{M}; \sqrt{t}, -\infty < t < \infty\}$ generated by the initial-boundary value problems for twodimensional equations motion of the Oldroyd fluids order $L=1,2,\dots$ and threedimensional equations motion of the Kelvin-Voight fluids order $L=0,1,2,\dots$ are described.