В. К. Ионин, Соотношения между радиусами вписанного и описанного шаров замкнутой выпуклой поверхности,
Докл. АН СССР, 1963, том 148, номер 2, 268–270

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 2

МАТЕМАТИКА

В. К. ИОНИН

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАДИУСАМИ ВПИСАННОГО И ОПИСАННОГО ШАРОВ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 VII 1962)

Пусть $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ есть непрерывная симметрическая, строго монотонно возрастающая по каждому аргументу функция, определенная в области $x_1 > 0$, $x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$, и $u(1, 1, \ldots, 1) = 0$.

Определим классы n-мерных поверхностей Φ_u и Φ^u в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве E^{n+1}. Будем говорить, что замкнутая выпуклая поверхность $\Phi \in \Phi_u$, если ее главные радиусы кривизн $R_1, R_2, \ldots, R_n$ в каждой точке удовлетворяют соотношению $u(R_1, R_2, \ldots, R_n) \leqslant 0$, $\Phi \in \Phi^u$, если $u(R_1, R_2, \ldots, R_n) \geqslant 0$.

Поставим в соответствие каждой замкнутой выпуклой поверхности Φ упорядоченную пару чисел (R, r), где первое число является радиусом наименьшего шара, описанного около Φ, а второе — радиусом наибольшего шара, вписанного в Φ. Обозначим это отображение через $F(\Phi)$. В работе решается задача о нахождении множеств образов поверхностей классов Φ_u и Φ^u при отображении $F(\Phi)$.

Обозначим через $v = v(s)$ функцию, определенную уравнением $u(v, s, \ldots, s) = 0$, а через (τ, T) — наибольший интервал, на котором функция $v = v(s)$ определена. В настоящей заметке для простоты будем считать, что функция $v = v(s)$ удовлетворяет условию Липшица.

На интервалах $(\tau, 1)$ и $(1, T)$ зададим функцию

$$t(q) = \begin{cases} \tau \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + \displaystyle\int_0^\alpha \cos\psi \cdot v(p)\, d\psi, & \text{если } \tau < q < 1; \\ \displaystyle\int_0^\alpha \cos\psi \cdot v(p)\, d\psi, & \text{если } 1 < q < T, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \arccos\exp\left[-\displaystyle\int_\tau^q \frac{ds}{v(s) - s}\right], & \text{если } \tau < q < 1; \\ \arccos\exp\left[-\displaystyle\int_q^T \frac{ds}{s - v(s)}\right] & \text{если } 1 < q < T, \end{cases}$$

а $p = p(\psi, q)$ определяется соотношениями:

$$\int_p^q \frac{ds}{v(s) - s} = -\ln\cos\psi, \quad \text{если } \tau < q < 1, \quad 0 \leqslant \psi < \alpha(q);$$

$$\int_q^p \frac{ds}{s - v(s)} = -\ln\cos\psi, \quad \text{если } 1 < q < T, \quad 0 \leqslant \psi < \alpha(q).$$

Можно показать, что $\lim\limits_{q\to 1} t(q) = 1$.

В плоскости (R, r) определим два множества Δ_u и Δ^u.

Множество Δ_u задается неравенствами:

$$\begin{array}{ll} r \leqslant R & \text{при } 0 < r \leqslant \tau; \\ r \leqslant R < t(r) & \text{при } \tau < r < 1; \\ r = R & \text{при } r = 1. \end{array}$$

Множество Δ^u задается неравенствами:

$$\begin{array}{rl} r = R & \text{при } R = 1; \\ t(R) < r \leqslant R & \text{при } 1 < R < T; \\ 0 < r \leqslant R & \text{при } T \leqslant R. \end{array}$$

При введенных обозначениях имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. $F(\Phi)$ *отображает класс поверхностей* Φ_u *на множество* Δ_u.

Теорема 2. $F(\Phi)$ *отображает класс поверхностей* Φ^u *на множество* Δ^u.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. При $u = x_1 x_2 \ldots x_n - 1$ Φ_u (Φ^u) состоит из поверхностей, гауссова кривизна которых в каждой точке не меньше (не больше) единицы. В этом случае функция

$$t(q) = \int_0^\alpha \frac{\cos^n \psi \, d\psi}{(q^n - 1 + \cos^n \psi)^{(n-1)/n}},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \arccos(1 - q^n)^{1/n} & \text{при } 0 < q < 1; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } 1 < q < \infty. \end{cases}$$

Так как диаметр описанного шара не меньше диаметра поверхности, а диаметр вписанного шара не больше ширины поверхности, то при $u = x_1 x_2 - 1$ из теорем 1 и 2 следуют теоремы Бляшке и Бонне (см. ([1]), стр. 134, 144).

2°. При $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n$ Φ_u (Φ^u) состоит из поверхностей, среднее арифметическое главных радиусов кривизн которых в каждой точке не больше (не меньше) единицы. При $n = 2$ класс Φ_u (Φ^u) совпадает с классом поверхностей, гауссова кривизна которых не меньше (не больше) средней кривизны. В этом случае функция

$$t(q) = [1 - (1 - q)^{2/n}]^{1/n} + (n - 1)(1 - q) \int_0^\alpha \frac{d\psi}{\cos^{n-1} \psi},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \arccos(1 - q)^{1/n} & \text{при } 0 < q < 1; \\ \arccos[(n - 1)(q - 1)]^{1/n} & \text{при } 1 < q < \dfrac{n}{n-1}. \end{cases}$$

Из этой формулы можно найти наибольшее значение функции $t(q)$ при $0 < q < 1$. Оно равно $1/\sin\beta$, где $\beta > 0$ находится из уравнения

$$\int_0^\beta \frac{d\psi}{\cos^{n-1}\psi} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-2}\beta \sin\beta}.$$

Следовательно, имеет место следующая

Теорема 3. *Если* $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n$, *то любая поверхность* $\Phi \in \Phi_u$ *содержится в шаре радиуса* $\dfrac{1}{\sin\beta}$. *Полученную оценку нельзя улучшить* $\left(\textit{при } n = 2 \quad \dfrac{1}{\sin\beta} \approx 1{,}20\right)$.

3^0. При $u = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} - 1$ Φ_n (Φ^u) состоит из поверхностей, средняя кривизна которых в каждой точке не меньше (не больше) единицы. В этом случае функция

$$t(q) = \begin{cases} \frac{1}{2(2q-1)} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2q-1} \sqrt{\frac{1-z^2}{(2q-1)^2-z^2}}\,dz & \text{при } \frac{1}{2} < q < 1; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-z^2}{(2q-1)^2-z^2}}\,dz & \text{при } 1 < q < \infty. \end{cases}$$

Из этой формулы видно, что точная нижняя грань $t(q)$ при $q > 1$ равняется $^1/_2$. Следовательно, имеет место следующая

Теорема 4. *Если средняя кривизна выпуклой поверхности не превышает единицы в каждой точке, то она содержит шар радиуса $^1/_2$. Оценку эту нельзя улучшить.*

Приведем теперь краткое изложение идеи доказательства теоремы 1. Для простоты ограничимся случаем, когда $\tau = 0$. Пусть $\Phi \in \Phi_u$, и пусть O — центр наибольшего шара σ, вписанного в поверхность Φ. Очевидно, что на Φ найдется точка A, удаленная от O на расстояние R, где R — радиус наименьшего шара, описанного около Φ. Введем на прямой OA координаты так, чтобы точки O и A имели координатами числа 0 и R. Обозначим через $Q(x)$ n-мерную плоскость, проходящую через точку x прямой OA перпендикулярно последней. На отрезке $[0, R]$ определим функцию $f_0(x)$, равную расстоянию от точки x $(0 \leqslant x \leqslant R)$ прямой OA до пересечения Φ с $Q(x)$. Нетрудно показать, используя максимальность вписанного шара σ, что на отрезке $[0, r]$ (r — радиус шара σ) существует число x_0, удовлетворяющее уравнению

$$f_0(x_0) = \sqrt{r^2 - x_0^2}.$$

Зададим новую функцию на отрезке $[-R, R]$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2}, & \text{если } 0 \leqslant |x| \leqslant x_0; \\ f_0(|x|), & \text{если } x_0 \leqslant |x| \leqslant R. \end{cases}$$

В каждой плоскости $Q(x)$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$ построим $(n-1)$-мерную сферу радиуса $f(x)$ с центром на прямой OA. Семейство этих сфер образует некоторую n-мерную поверхность Ψ. Можно показать, что Ψ является замкнутой выпуклой поверхностью вращения и что в тех ее точках, где существуют главные радиусы кривизн $R_1, R_2, \ldots, R_n$ (а они существуют почти в каждой точке Ψ, см. ([2]), стр. 3), имеет место неравенство $u(R_1, R_2, \ldots, R_n) \leqslant 0$. Теперь нетрудно доказать, что почти всюду на отрезке $[-R, R]$ функция $y = f(x)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$u\left[-\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},\ y(1+y'^2)^{1/2}, \ldots, y(1+y'^2)^{1/2}\right] \leqslant 0.$$

Далее доказывается, что решение $y = g(x)$ уравнения

$$u\left[-\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},\ y(1+y'^2)^{1/2}, \ldots, y(1+y'^2)^{1/2}\right] = 0$$

с начальными условиями $g(0) = r < 1$, $g'(0) = 0$, определено и положительно в интервале $(-t(r), t(r))$ и $g(R) > f(R) = 0$. Отсюда можно вывести, что $R < t(r)$. На этом доказательство теоремы 1 заканчивается. Теорема 2 доказывается аналогично.

Автор приносит глубокую благодарность В. А. Топоногову, критические замечания которого содействовали существенному улучшению работы.

Институт математики с вычислительным центром
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступило
7 VII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Blaschke, Kreis und Kugel, 1916 (нов. изд. 1956). [2] А. Д. Александров, Уч. зап. Ленинградск. гос. унив., сер. матем. наук, в. 6 (1939).