ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 12 (151)

УДК 517.541

Л. Ф. Зверович

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА С РАЗРЫВНЫМ СДВИГОМ ДЛЯ n НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная ориентируемая риманова поверхность рода h с H-гладким краем $\partial\mathfrak{M}$, который состоит из r компонент и ориентирован так, что при его обходе в положительном направлении поверхность $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ остается слева. Будем предполагать, что поверхность $\mathfrak{M}$ снабжена такой конформной структурой [1], [2], при которой параметрический гомеоморфизм $z = z_k(p)$ отображает окрестность U_k точки края t_k на верхний полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ так, что точки края $\partial U_k = \partial\mathfrak{M} \cap U_k$ (и только они) переходят в точки диаметра $-1 < x < 1$ полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, а точка t_k — в начало координат. Через $p = p_k(z)$ будем обозначать функцию, обратную к $z = z_k(p)$, и также называть параметрическим гомеоморфизмом.

На $\partial\mathfrak{M}$ задан дивизор Λ, состоящий из конечного числа попарно различных точек, взятых с кратностью $(+1)$. Предположим, что множество $\partial\mathfrak{M}/\Lambda$ распадается на конечное число связных компонент, каждая из которых гомеоморфна интервалу $(0, 1)$ числовой оси. Пусть $\alpha(t)$ — гомеоморфизм множества $\partial\mathfrak{M}/\Lambda$ на себя, всюду удовлетворяющий тождеству Карлемана $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ и всюду изменяющий ориентацию. Включим все неподвижные точки гомеоморфизма $\alpha(t)$ в дивизор Λ; тогда $\alpha(t)$ будет отображать каждую связную компоненту множества $\partial\mathfrak{M}/\Lambda$ на другую связную компоненту этого множества.

Пусть на $\partial\mathfrak{M}/\Lambda$ заданы H-непрерывные вектор-функция $g(t)$ и нигде не вырождающаяся матрица-функция $G(t)$, удовлетворяющие тождествам $G(t)\,G[\alpha(t)] \equiv E$, $g(t) + G(t)\,g[\alpha(t)] \equiv 0$.

Предположим, что матрица $G(t)$ и вектор $g(t)$ H-непрерывно продолжимы слева и справа во все точки дивизора Λ, а предельные значения $G(t)$ — невырожденные матрицы.

Рассмотрим задачу: *найти вектор-функции (столбцы) $\Phi(p)$, мероморфные на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$, кратные заданному на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$ вектору-дивизору $\Delta^{(-1)}$, с H-непрерывными предельными значениями на $\partial\mathfrak{M}/\Lambda$, удовлетворяющими одному из следующих краевых условий:*

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi(t), \quad \Delta^{(-1)}/(\Phi), \quad t \in \partial\mathfrak{M}/\Lambda; \tag{1}$$

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi(t) + g(t), \quad \Delta^{(-1)}/(\Phi), \quad t \in \partial\mathfrak{M}/\Lambda. \tag{2}$$

В окрестности точек дивизора Λ искомые решения должны удовлетворять условиям $\lim\limits_{z\to 0} |z|^{\varepsilon}\,\Phi_i[p_k(z)] = 0$, $i = 1, \ldots, n$, где ε — произвольное положительное число, а $p_k(z)$ — параметрические отображения окрестностей точек $t_k \in \Lambda$.

Рассмотрим также задачу для векторов-дифференциалов: *найти векторы-дифференциалы (строки) $d\varphi(p)$, мероморфные на $\mathfrak{M}/\partial\mathfrak{M}$, кратные там вектору-дивизору Δ, с H-непрерывными предельными значениями на $\partial\mathfrak{M}/\Lambda$, удовлетворяющими краевому условию*

$$d\varphi(t) = d\varphi[\alpha(t)]\,G(t), \quad \Delta/(d\varphi), \quad t \in \partial\mathfrak{M}/\Lambda. \tag{3}$$

В окрестности точек дивизора Λ искомые решения $d\varphi(p)$ должны удовлетворять условиям: для каждой точки $t_k \in \Lambda$ дифференциалы $d\varphi_i[p_k(z)]$, $i = 1, \ldots, n$, где

$p_k(z)$ — параметрические отображения окрестностей точек t_k, допускают при $z \to 0$ особенности интегрируемых порядков.

Задачу (3) будем называть союзной задачам (1), (2). В такой постановке задачи (1)—(3) рассматриваются впервые. В случае, когда $\mathfrak{M}$ — плоская область ($h = 0$), эти задачи изучены в работе [3].

2. Пусть t_1 — произвольная точка дивизора Λ. Продолжим по непрерывности гомеоморфизм $\alpha(t)$ слева и справа в точку t_1. Мы получим значения $\alpha(t_1 - 0)$ и $\alpha(t_1 + 0)$. Определим последовательность:

$$t_1,\ \alpha(t_1 - 0),\ \alpha[\alpha(t_1 - 0) - 0],\quad \alpha[\alpha(\alpha(t_1 - 0) - 0) - 0], \ldots \tag{4}$$

Лемма. *Всякая последовательность* (4) *имеет вид*

$$t_1,\ t_2, \ldots,\ t_\nu,\ t_1,\ t_2, \ldots,\ t_\nu,\ t_1, \ldots, \tag{4'}$$

где t_j, $j = 1, \ldots, \nu$, — *попарно различные точки последовательности.*

Упорядоченное множество различных точек последовательности (4) мы будем называть неподвижным циклом (точки неподвижного цикла должны следовать в том же порядке, что и в (4')), а число ν — порядком неподвижного цикла. Начало отсчета цикла произвольное, т. е. мы отождествляем все циклы вида $t_i, \ldots, t_\nu, t_1, \ldots, t_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$.

Будем предполагать, что матрица $G(t)$ и гомеоморфизм $\alpha(t)$ удовлетворяют следующим требованиям:

1) Пусть t_k является произвольной точкой дивизора Λ, и t_k входит в неподвижный цикл кратности ν. Перейдем в окрестности точки t_k на $\partial\mathfrak{M}$ к локальным координатам $t = t_k(x)$, где x — вещественная переменная. Матрица $G(t)$ в точке t_k должна удовлетворять условиям

$$G[t_k(x)] - G(\pm 0) = O[|x|^{2/\nu}],\ x \to 0,\ x \gtrless 0.$$

2) Пусть $t \in \partial\mathfrak{M}/\Lambda$ и $\tau = \alpha(t)$. Перейдем в окрестности точек t и τ к стандартным локальным координатам: $t = t(x)$, $\tau = \tau(u)$. Предположим, что в окрестности каждой точки $t \in \partial\mathfrak{M}/\Lambda$ функция $u = \tau^{-1}[\alpha(t(x))] = \lambda(x)$ имеет H-непрерывную и всюду отличную от нуля производную $\lambda'(x)$.

3) Пусть $t_0 \in \Lambda$ и $\tau_1 = \alpha(t_0 - 0)$, а $\tau_2 = \alpha(t_0 + 0)$. Перейдем в окрестности точек t_0, τ_1, τ_2 к локальным координатам: $t = t_0(x)$, $\tau = \tau_1(u)$, $\tau = \tau_2(u)$. Подставляя параметрические отображения в функцию $\tau = \alpha(t)$, получим

$$u = \lambda_{t_0}(x) = \begin{cases} \tau_1^{(-1)}[\alpha(t_0(x))], & \text{если } x \leqslant 0, \\ \tau_2^{(-1)}[\alpha(t_0(x))], & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Будем предполагать, что для каждой точки $t_0 \in \Lambda$, производная $\lambda'_{t_0}(x)$ H-непрерывно продолжима слева и справа в точку $x = 0$, а предельные значения $\lambda'_{t_0}(+0)$ и $\lambda'_{t_0}(-0)$ конечны и отличны от нуля.

4) Пусть точки $t_1, \ldots, t_\nu$ образуют неподвижный цикл. Обозначим через $x_1, \ldots, x_\nu$ локальные параметры окрестностей точек $t_1, \ldots, t_\nu$ соответственно, а через $t = f_i(x)$, $i = 1, \ldots, \nu$, — соответствующие параметрические отображения. Подставим в функцию $\tau = \alpha(t)$ параметрические отображения. Получим

$$x_{\mu_1} = f_{\mu_1}^{(-1)}[\alpha(f_1(x_1))] = \lambda_{\mu_1}(x_1),\ x_1 \geqslant 0,$$
$$x_{\mu_2} = f_{\mu_2}^{(-1)}[\alpha(f_2(x_2))] = \lambda_{\mu_2}(x_2),\ x_2 \geqslant 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{\mu_\nu} = f_{\mu_\nu}^{(-1)}[\alpha(f_\nu(x_\nu))] = \lambda_{\mu_\nu}(x_\nu),\ x_\nu \geqslant 0,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, \nu$. Будем предполагать, что для всех неподвижных циклов порядка ν и для всех возможных ν имеют место равенства

$$\lambda'_1(+0)\,\lambda'_2(+0) \ldots \lambda'_\nu(+0) = (-1)^\nu.$$

Можно показать, что все указанные ограничения на гомеоморфизм $\alpha(t)$ не зависят от выбора стандартных локальных координат.

3. Пусть точки дивизора Λ образуют μ неподвижных циклов. Точки, принадлежащие одному неподвижному циклу, мы будем обозначать следующим образом: $t_1^k, \ldots, t_{\nu_k}^k$, $k=1, \ldots, \mu$. Для каждого неподвижного цикла определим матрицу:

$$\overset{k}{A} = \prod_{i=1}^{\nu_k} [G(t_i^k - 0)]^{-1}. \tag{5}$$

Сомножители в произведении (5) расположены слева направо в том порядке, что и точки t_i^k в неподвижном цикле. Пусть $\overset{k}{\lambda}_j$ $(j=1, \ldots, n)$ — корни уравнения $\det(\overset{k}{A} - \lambda E) = 0$. Представим их в виде

$$\overset{k}{\lambda}_j = e^{2\pi i \overset{k}{\rho}_j}, \quad j=1, \ldots, n, \tag{6}$$

причем числа $\overset{k}{\rho}_j$ выберем так, чтобы выполнялись условия

$$0 \leqslant \operatorname{Re} \overset{k}{\rho}_j < 1, \quad j=1, \ldots, n. \tag{7}$$

Для каждого неподвижного цикла $t_1^k, \ldots, t_{\nu_k}^k$ определим число $m_k = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} \overset{k}{\rho}_j$, где числа $\operatorname{Re} \overset{k}{\rho}_j$ однозначно определены формулой (6) и условиями (7) по собственным числам матриц (5).

Пусть $\partial\mathfrak{M}/\Lambda = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$, и $\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \{\arg \det G(t)\}_{\overline{\Gamma}_j}$, где через $\overline{\Gamma}_j$ обозначено замыкание дуги Γ_j. При указанных выше ограничениях на матрицу $G(t)$ и гомеоморфизм $\alpha(t)$ имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если l — число линейно-независимых решений задачи* (1), *а l' — число линейно-независимых решений союзной задачи* (3), *то*

$$l - l' = -\frac{\varkappa_0}{2} - \sum_{k=1}^{\mu} m_k + \operatorname{ord} \Delta - n\left(h - 1 + \frac{r}{2} + \frac{\operatorname{ord} \Lambda}{4} - \frac{\mu}{2}\right),$$

где $\varkappa_0$ и m_k $(k=1, \ldots, \mu)$ определены выше, h — род поверхности $\mathfrak{M}$, r — число компонент края $\partial\mathfrak{M}$, μ — число неподвижных циклов дивизора Λ, $\operatorname{ord} \Delta$ *и* $\operatorname{ord} \Lambda$ — *порядки вектора-дивизора Δ и дивизора Λ соответственно.*

Теорема 2. *Для существования решений неоднородной задачи* (2) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства* $\int_{\partial\mathfrak{M}} d\varphi[\alpha(t)]\, g(t) = 0$ *для всех решений $d\varphi(p)$ союзной задачи* (3).

Метод исследования тот же, что и в работе [3] для случая плоской области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИИЛ, 1960.

2. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. М., ИИЛ, 1957.

3. Зверович Л. Ф. Задача Карлемана для нескольких неизвестных функций в случае разрывного сдвига. ИАН МолдССР. Сер. физ.-техн. и матем. н., № 3, 1973, с. 3—12.

г. Одесса

Поступила
10 VII 1973