Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Избранные задачи LXXVII Московской математической олимпиады,
Kvant, 2014, Number 4, 57–60

https://www.mathnet.ru/eng/kvant1810

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
January 21, 2026, 19:17:27

m, и красят все его белые клетки в черный цвет. Тогда если после нескольких таких ходов все клетки станут черными, то $K \geq mn$.

Индукция по $m + n$. При $m = 1$ утверждение верно: чтобы закрасить в итоге все клетки, в начале должно быть не менее n столбцов, в которых есть хоть одна черная клетка. Аналогично, утверждение верно при $n = 1$.

Рассмотрим теперь (m, n)-игру в прямоугольнике $M \times N$, где $M > m > 1$, $N > n > 1$. Очевидно, хотя бы один ход был сделан. Пусть для определенности этот ход был в последней строке (от перестановки строк и столбцов условие задачи не меняется, для первого хода в столбце рассуждения аналогичны). Тогда далее мы можем отбросить эту строку и считать, что происходит $(m-1, n)$-игра в прямоугольнике $(M-1) \times N$. По предположению индукции в этом прямоугольнике изначально не менее $(m-1)n$ черных клеток. Плюс не менее n черных клеток в последней строке. Итого, не менее чем $(m-1)n + n = mn$ черных клеток.

6. Под квадрантом будем всегда понимать квадрант без границы. Так как в первом квадранте (и только там) многочлен положителен, то на границе этого квадранта он равен 0 (из непрерывности). Но тогда этот многочлен делится на xy (записав P в виде $P(x,y) = yQ(x,y) + R(x)$ и положив $y = 0$, получаем, что $R(x) \equiv 0$ при $x \geq 0$, т.е. $P(x,y)$ делится на y; аналогично, он делится на x). Представим его в виде $P(x,y) = xyQ(x,y)$. Заметим, что знак $Q(x,y)$ совпадает со знаком $P(x,y)$ в первом и третьем квадрантах и отличается во втором и четвертом. Так как $P(x,y)$ положителен в первом квадранте и неположителен в других квадрантах, то $Q(x,y)$ неотрицателен в первом, втором и четвертом квадрантах, а в третьем квадранте – неположителен. Значит, он равен нулю на границе третьего квадранта, т.е. тоже делится на xy, откуда $P(x,y) = (xy)^2 Q_1(x,y)$, и теперь знаки P и Q_1 уже совпадают во всех точках. Эти рассуждения можно продолжать до бесконечности, но степень P конечна. Значит, $P \equiv 0$, что противоречит условию задачи.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXVII МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. Одно из возможных решений приведено на рисунке 16.

2. 1 8 3 + 1 8 3 9 – 8 = 2014

М А Т Е М А Т И К А

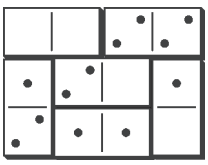

Рис. 16

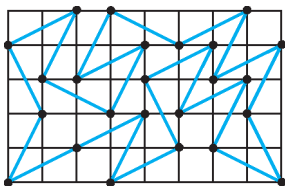

Рис. 17

3. Наиболее длинный известный жюри замкнутый путь (24 диагонали) изображен на рисунке 17.

4. Петя может выиграть.

Пускай Петя первым ходом заменит 2015 на 2014, а каждым следующим ходом будет уравнивать числа (он всегда может это сделать, повторив ход Васи с тем числом, которое Вася не менял; см. рис. 18).

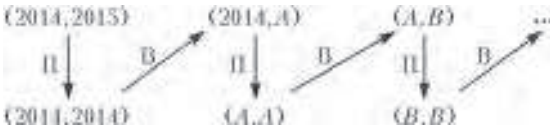

Рис. 18

Если Петя будет действовать так всю игру, то, конечно, в некоторый момент Вася сделает из одного из двух одинаковых чисел однозначное и выиграет.

Но посмотрим на этот момент внимательнее. Если Вася выиграл, заменив одно из двух чисел X на однозначное, то перед этим, на ходу Пети, одно из двух чисел X на доске уже было. В этот момент Петя может заменить X на однозначное число и выиграть (рис. 19). Петя может так пойти, потому что у

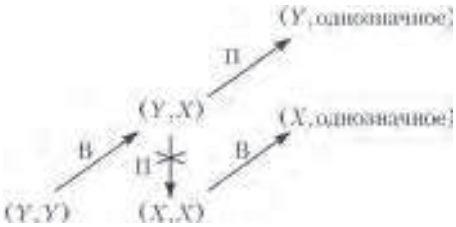

Рис. 19

него есть все возможности, которые были у Васи на последнем, выигрышном, ходе: делить число X пополам, если оно четное, и вычитать из него его же цифру.

Итак, сформулируем стратегию Пети полностью: «если одно из чисел можно заменить на однозначное – сделать это; в противном случае уравнять два числа».

5. Да.

Один из возможных примеров изображен на рисунке 20.

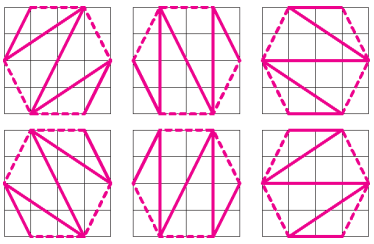

Рис. 20

6. Да, мог.

Разбиение чисел от 7 до 2014 на пары «первое – с последним, второе – с предпоследним и т.д.» дает четное число пар с суммой 2021. Ну а числа от 1 до 6 можно разбить как

$$(3+6)\cdot(2+4)\cdot(1+5) = 3^2 \cdot 6^2.$$

7. Пусть продолжение перпендикуляра, опущенного на прямую BD из точки M, пересекает сторону AD в точке E (рис. 21). Мы хотим доказать, что прямые CE и BM перпендикулярны.

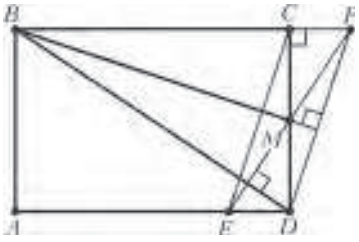

Рис. 21

Обозначим через F точку пересечения прямых ME и BC и посмотрим на треугольник BDF: в нем высоты DC и FE пересекаются в точке M. Значит, и прямая BM является высотой этого треугольника, $BM \perp DF$. Но четырехугольник $CFDE$ является параллелограммом (действительно, треугольники EMD и FMC равны по катету и острому углу, поэтому отрезки CF и ED равны и параллельны). Поэтому раз прямая BM перпендикулярна прямой DF, она перпендикулярна и прямой CE.

8. Нужно построить либо 16 одноэтажных и 7 двухэтажных, либо 14 одноэтажных и 8 двухэтажных башен.

Докажем сначала, что башни высоты больше 2 строить бессмысленно.

Действительно, пусть какая-то из башен имеет высоту $h > 2$. Сбросим с нее верхний этаж, превратив его в новую башню

высоты 1 (рис. 22). Как после этого изменится сумма у инспектора? С укороченной нами башни теперь не видны башни высоты $h - 1$. Зато, так как $h > 2$, со всех этих башен (вклю-

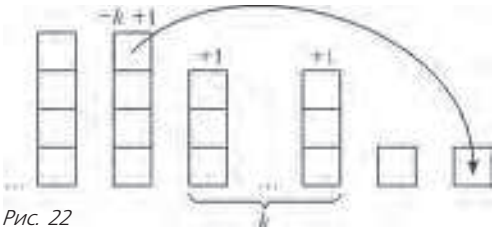

Рис. 22

чая укороченную) стала видна новая башня. Значит, вся сумма увеличилась.

Осталось изучить случай, в котором все башни имеют высоту 1 или 2. Если первых X, а вторых Y (по условию $18X + 2Y = 30$), то сумма у инспектора равна

$$XY = (30 - 2Y)Y = 2Y(15 - Y) = 2\left(7{,}5^2 - (Y - 7{,}5)^2\right).$$

Для целых Y это выражение принимает максимальное значение при $Y = 7$ и $Y = 8$ и равно 112.

9. Можно ничего не заплатить.

Прежде чем тратить деньги, подумаем. Пусть l_1, l_2, l_3 – веса трех выделенных жирным (рис. 23) наклонных рядов, v_1, v_2, v_3 – веса трех вертикальных рядов. Тогда $l_1 + l_2 + l_3 = v_1 + v_2 + v_3$: и то, и другое – это просто сумма весов всех девяти яблок. Но, по меньшей мере, пять из шести этих величин равны одной и той же величине t, значит, равны и все шесть (действительно, перенеся пять слагаемых, равных t, в одну часть, мы получаем, что и оставшаяся величина равна $3t - 2t = t$). Аналогичным образом получаем, что веса остальных трех наклонных рядов тоже равны t. Мы нашли девять рядов, веса которых равны. Значит, отличается вес оставшегося ряда, горизонтального.

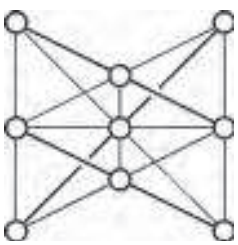
Рис. 23

Комментарий. Описанная ситуация действительно возможна – см. рисунок 24 (подойдут любые a, b, c такие, что $2b \neq a + c$; можно показать, что все примеры имеют такой вид).

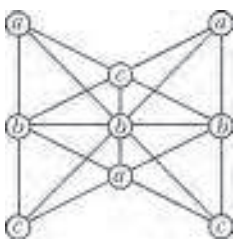

Рис. 24

10. Пусть трехчлен $ax^2 + bx + c$ (a, b, c – нечетные числа) имеет корень вида $1/n$. Домножив равенство на n^2, получаем $a + bn + cn^2 = 0$. Если n четно, то первое слагаемое нечетно, а следующие два четны, поэтому результат нечетный и нулем оказаться не может. Если же n нечетно, то все три слагаемых нечетны, и получаем аналогичное противоречие. Значит, корня вида $1/n$ у такого трехчлена не бывает.

11. 10.

Сначала покажем, что k, равного 10, нам хватит.

Будем идти вдоль ряда рубашек и считать отдельно белые и фиолетовые рубашки. Как только мы насчитаем 11 одноцветных – допустим, без ограничения общности, что фиолетовых – рубашек, остановимся. Теперь снимем все белые рубашки, которые мы прошли (их не больше 10), и все фиолетовые рубашки, до которых мы еще не дошли (их ровно 10). При необходимости снимем еще несколько белых рубашек. Очевидно, что все 11 фиолетовых рубашек висят подряд (все белые рубашки, висевшие между ними, мы сняли). Оставшиеся белые рубашки тоже висят подряд: все оставшиеся фиолетовые рубашки мы сняли.

Теперь покажем, что рубашки могут висеть так, что меньшего k нам может не хватить. Допустим, что рубашки висят в следующем порядке: сначала идут 10 белых рубашек, затем 21 фиолетовая и затем еще 11 белых. В этом случае после снятия $k < 10$ рубашек каждого цвета первой и последней рубашкой будут белые. Следовательно, белые рубашки не будут идти подряд.

12. 4.

Из трех палочек длин $a \le b \le c$ можно составить треугольник, если $a + b > c$. По теореме косинусов этот треугольник тупоугольный тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 < c^2$. Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ – длины палочек.

Предположим, что $n \ge 5$. Тогда

$$a_5^2 > a_4^2 + a_3^2 \ge 2a_3^2 > 2a_2^2 + 2a_1^2.$$

С другой стороны, по неравенству треугольника $a_5 < a_1 + a_2$. Возведем в квадрат (обе части неравенства положительны):

$$a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2.$$

Сравнив с предыдущим, получаем

$$a_1^2 + a_2^2 < 2a_1a_2,$$

что невозможно.

Пример для $n = 4$ можно построить следующим образом. Возьмем $a_1 = 1$ и $a_2 = 1$, выберем a_3 чуть больше, чем $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, а a_4 чуть больше, чем $\sqrt{a_2^2 + a_3^2}$.

Например, подходят значения 1; 1; 1,5; 1,9.

13. Да, такая тройка существует.

Будем искать пример в виде $C = 10^n$, $B = 1$, $A = 10^n - 1$.

Докажем сначала, что для любого натурального k существует n такое, что $10^n - 1$ кратно 3^{k+1}. Докажем это индукцией по k. База: $10^1 - 1$ кратно 3^2. Переход: если $10^n - 1$ кратно 3^{k+1}, то $10^{3n} - 1 = \left(10^n - 1\right)\left(10^{2n} + 10^n + 1\right)$ кратно 3^{k+2}, так как $10^{2n} + 10^n + 1$ делится на 3.

Возьмем теперь k такое, что $3^k > 10000$, и n такое, что $10^n - 1$ кратно 3^{k+1}. Тогда

$$\mathrm{rad}(ABC) = \mathrm{rad}\left(10^n\left(10^n - 1\right)\right) =$$

$$= 10\,\mathrm{rad}\left(10^n - 1\right) \le 10 \cdot \frac{10^n - 1}{3^k} < \frac{10^{n+1}}{10000} = \frac{C}{1000}.$$

Комментарии. 1. Можно было воспользоваться теоремой Эйлера: так как $\varphi\left(3^{k+1}\right) = 2 \cdot 3^k$, то $10^{2 \cdot 3^k} - 1$ кратно 3^{k+1}.

2. Знаменитая ABC-гипотеза (выдвинутая независимо Эстерле и Массером в 1980-х годах) состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа k, что для любых попарно взаимно простых чисел A, B, C, таких что $A + B = C$, имеет место неравенство $C < k \cdot \mathrm{rad}(ABC)^{1+\varepsilon}$.

Из ее справедливости следует целый ряд знаменитых утверждений теории чисел. Например, нетрудно видеть, что если ABC-гипотеза верна, то уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ имеет лишь конечное число решений с $n > 2$.

Приведенная задача состоит, по существу, в том, что формулировку ABC-гипотезы нельзя усилить, заменив $1 + \varepsilon$ на 1.

Больше об ABC-гипотезе и ее следствиях можно узнать из лекции Д.О.Орлова на закрытии олимпиады или из видеозаписей лекций Д.О.Орлова [1] и К.Конрада [2] на Летней школе «Современная математика».

[1] www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=2338
[2] www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?presentid=7258

14. По условию,

$$0 > f(c)f\left(\frac{1}{a}\right) = \left(ac^2 + bc + c\right)\left(a\frac{1}{a^2} + b\frac{1}{a} + c\right) = \frac{c}{a}(ac + b + 1)^2.$$

Следовательно, $\frac{c}{a} < 0$. Но по теореме Виета $\frac{c}{a}$ равно произведению корней $f(x)$, поэтому они разных знаков.

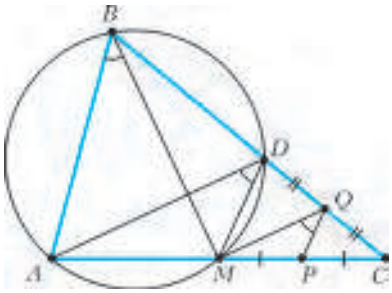

Рис. 25

15. Проведем через M прямую, параллельную PQ, до пересечения со стороной BC в точке D (рис. 25). Тогда в треугольнике MDC отрезок PQ является средней линией и делит сторону DC пополам. Следовательно, в треугольнике ADC отрезок MQ – средняя линия, а значит, параллелен AD. Отсюда имеем равенство углов между параллельными прямыми: $\angle ADM = \angle MQP$. Осталось заметить, что $\angle BAM = 180° - \angle BQP = 180° - \angle BDM$, откуда получаем вписанность четырехугольника $ABDM$ и, как следствие, равенство углов $\angle ABM = \angle ADM$.

16. $a = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Числа $\cos(x+a)$, $\cos(y+a)$, $\cos(z+a)$ образуют арифметическую прогрессию, значит,

$$2\cos(y+a) = \cos(x+a) + \cos(z+a),$$

$$2\cos y\cos a - 2\sin y\sin a =$$

$$= \cos x\cos a - \sin x\sin a + \cos z\cos a - \sin z\sin a,$$

$$(2\cos y - \cos x - \cos z)\cos a = (2\sin y - \sin x - \sin z)\sin a.$$

По условию числа $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ также образуют арифметическую прогрессию, значит, $2\cos y = \cos x + \cos z$ и поэтому левая часть этого равенства равна нулю. Следовательно, либо $\sin a = 0$ и $a = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $2\sin y = \sin x + \sin z$, т. е. числа $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ также образуют арифметическую прогрессию. Но в последнем случае точка с координатами ($\cos y$, $\sin y$) является серединой отрезка с концами в точках ($\cos x$, $\sin x$), ($\cos z$, $\sin z$) и при этом все три точки лежат на единичной окружности с центром в начале координат, что невозможно. Для $a = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, подходящим примером являются числа $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $z = \pi$.

17. а) Заметим, что $\angle CDA = \angle ABC$ как противоположные углы параллелограмма. Тогда $\angle CDA + \angle POC = \angle AOP + \angle POC = 180°$. Следовательно, точки P, O, C и D лежат на одной окружности (рис. 26). Аналогично, точки Q, O, A и D лежат на одной окружности. По теореме об отрезках секущих

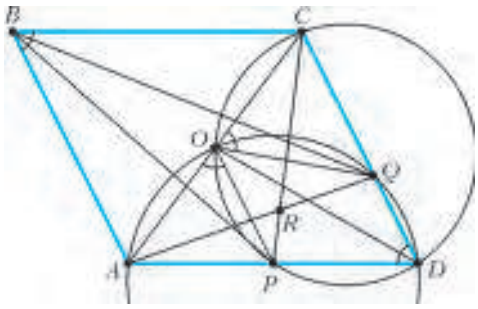

Рис. 26

имеем $CQ \cdot CD = CO \cdot CA = AO \cdot AC = AP \cdot AD$. Отсюда получаем, что $AP : CQ = CD : AD = BA : BC$. Следовательно, треугольники BAP и BCQ подобны по равным углам $\angle BAP = \angle BCQ$ и пропорциональным сторонам $BA : BC = AP : CQ$. Значит, $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Заметим, что $\angle OAQ = \angle ODQ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу OQ. Аналогично, $\angle OCP = \angle ODP$. Пусть R – точка пересечения AQ и CP. Тогда

$$\angle ABC + \angle ARC = \angle ADC + \angle ARC =$$

$$= \angle ODP + \angle ODQ + \angle ARC = \angle OCP + \angle OAQ + \angle ARC = 180°.$$

Следовательно, точки A, B, C и R лежат на одной окружности.

18. 5.

Покажем, что условия задачи выполнены, если исправными остались кнопки с цифрами 0, 1, 3, 4, 5. Действительно, любая цифра от 0 до 9 может быть представлена в виде суммы некоторых двух «рабочих» цифр. Пусть число от 1 до 99 999 999, которое мы хотим получить, состоит из цифр a_1, a_2, …, a_8 (некоторые из них, в том числе и первые, могут быть нулевыми). Представим каждую из них в виде суммы двух «рабочих» цифр: $a_1 = b_1 + c_1$, $a_2 = b_2 + c_2$, …, $a_8 = b_8 + c_8$. Тогда число, составленное из «рабочих» цифр b_1, b_2,… …, b_8, и число, составленное из «рабочих» цифр c_1, c_2, … …, c_8, дают в сумме желаемое число.

Предположим, что добиться желаемого можно для некоторого набора из четырех или меньше «рабочих» цифр. Пусть a – какая-либо из цифр 0, 1, 2, …, 9. Среди чисел от 1 до 99999999 найдется такое, которое заканчивается на a и содержит в своей десятичной записи нерабочие цифры. Тогда это число можно представить в виде суммы двух чисел, в записи которых содержатся только рабочие цифры. Поэтому для любой цифры a от 0 до 9 найдутся такие две «рабочие» цифры (возможно, совпадающие), что их сумма оканчивается на a. С другой стороны, нетрудно видеть, что среди всех сумм пар «рабочих» цифр может быть не более четырех нечетных чисел. Поэтому какая-то из цифр 1, 3, 5, 7 или 9 не встречается в конце таких сумм, что противоречит предположению.

19. Существует.

Пусть $f(x) = 1007x^2 + 1008x$. Тогда $f(x) = 1007x(x+1) + x$. Поскольку произведение $x(x+1)$ является четным числом при всех натуральных x, то $1007x(x+1)$ делится на 2014 при всех таких x. Следовательно, $f(x)$ дает такой же остаток при делении на 2014, как и x. Значит, все числа $f(1)$, $f(2)$,… …, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014.

20. $a = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $b = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Рассмотрим случай, когда числа a и b имеют один знак. В этом случае $|a| + |b| = |a+b|$. Пусть $x = \frac{\pi}{3}$. Тогда $2x = \frac{2\pi}{3}$, $\sin x = \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$1 \ge |a\sin x + b\sin 2x| = |a+b|\frac{\sqrt{3}}{2} = (|a| + |b|)\frac{\sqrt{3}}{2} \ge 1.$$

Отсюда получаем, что $|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а в точке $x = \frac{\pi}{3}$ функция $f(x) = a\sin x + b\sin 2x$ принимает либо свое наибольшее значение 1, либо свое наименьшее значение –1. Значит, точка $x = \frac{\pi}{3}$ является точкой экстремума для функции $f(x)$ и $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. Имеем

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = a\cos\frac{\pi}{3} + 2b\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{a-2b}{2} = 0.$$

Следовательно, $a = 2b$. Учитывая равенство $|a| + |b| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, получаем, что возможны лишь два варианта:

$$a = \frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = \frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ или } a = -\frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = -\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Случай, когда числа a и b имеют разные знаки, разбирается аналогично. В этом случае возможны лишь такие два варианта:

$$a = \frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ или } a = -\frac{4}{3\sqrt{3}},\ b = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Проверим, что четыре найденные пары значений $a = \pm\frac{4}{3\sqrt{3}}$, $b = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ удовлетворяют условию задачи. Действительно,

$|a|+|b|=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Функция $f(x)$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения в таких точках x, для которых $f'(x)=0$. Найдем такие x. Имеем

$$f'(x)=a\cos x+2b\cos 2x=a(\cos x\pm\cos 2x)=0,$$

где знак в скобках выбирается положительным, если a и b одного знака, и отрицательным – если иначе. Следовательно, во всех точках экстремума функции $f(x)$ имеем $|\cos x|=|\cos 2x|$. Значит, при таких x выполнено также равенство $|\sin x|=|\sin 2x|$. Отсюда $|\sin x|=2|\sin x||\cos x|$ и либо $\sin x=0$, либо $|\cos x|=\frac{1}{2}$. В первом случае $f(x)=0$, во втором $|\sin x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\sin 2x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $|f(x)|=|a|\frac{\sqrt{3}}{2}+|b|\frac{\sqrt{3}}{2}=1$.

Таким образом, во всех точках экстремума функции $f(x)$, а следовательно, и во всех вообще точках x имеем $|f(x)|\le 1$.

21. Покажем сначала по индукции, что для любого натурального n найдется такое натуральное m_n, что его десятичная запись оканчивается на единицу, а десятичная запись числа m_n^2 оканчивается на комбинацию из n единиц и двоек.

При $n=1$ в качестве m_1 можно взять число 1. Предположим, что для $n=k$ доказано, что найдется число m_k с указанными свойствами. Тогда рассмотрим числа вида $p_a=m_k+a\cdot 10^k$, где $a=0, 1, 2, \ldots, 9$. Десятичная запись каждого из них оканчивается на 1. Кроме того, имеем

$$p_a^2=\left(m_k+a\cdot 10^k\right)^2=m_k^2+2am_k\cdot 10^k+a^2\cdot 10^{2k}.$$

Посмотрим на последние $k+1$ цифр десятичной записи каждого из слагаемых этой суммы.

По предположению индукции десятичная запись числа m_k^2 оканчивается на комбинацию из k единиц и двоек. Обозначим через b $(k+1)$-ю с конца цифру числа m_k^2. Нетрудно видеть, что десятичная запись $2am_k\cdot 10^k$ оканчивается на k нулей, перед которыми идет последняя цифра числа $2a$ (так как m_k оканчивается на единицу). Десятичная же запись слагаемого $a^2\cdot 10^{2k}$ оканчивается на $2k$ нулей. Следовательно, последние k цифр десятичной записи чисел p_a^2 совпадают с последними k цифрами десятичной записи числа m_k^2. При этом $(k+1)$-я с конца цифра числа p_a^2 совпадает с последней цифрой суммы $b+2a$. Если b нечетно, то для некоторого a сумма $b+2a$ оканчивается на единицу. Если b четно, то для некоторого a сумма $b+2a$ оканчивается на двойку. Следовательно, одно из чисел p_a можно взять в качестве числа m_{k+1}.

Покажем теперь, что для любого натурального n найдется такое натуральное p_n, десятичная запись квадрата которого начинается на n единиц. Пусть $c_n=11\ldots1\cdot 10^{4n}$, где первый множитель записывается n единицами, и $d_n=c_n+10^{4n}$. Тогда

$$\sqrt{d_n}-\sqrt{c_n}=\frac{d_n-c_n}{\sqrt{d_n}+\sqrt{c_n}}=\frac{10^{4n}}{\sqrt{d_n}+\sqrt{c_n}}>\frac{10^{4n}}{2\cdot 10^{3n}}>1.$$

Следовательно, найдется такое натуральное число, которое не меньше $\sqrt{c_n}$, но меньше $\sqrt{d_n}$. Десятичная запись квадрата такого числа начинается на n единиц.

Рассмотрим число $p_n\cdot 10^k+m_n$, где k больше, чем количество цифр в десятичных записях чисел $2p_nm_n$ и m_n^2. Тогда первые n цифр десятичной записи числа

$$\left(p_n\cdot 10^k+m_n\right)^2=p_n^2\cdot 10^{2k}+2p_nm_n\cdot 10^k+m_n^2$$

совпадают с первыми n цифрами десятичной записи числа p_n^2, а последние n цифр – с последними цифрами десятичной записи числа m_n^2. Следовательно, число $p_n\cdot 10^k+m_n$ удовлетворяет условию задачи.

22. Сможет.

Пусть дежурства проходили по такой схеме: первые девять поварят сначала дежурили поодиночке, а затем дежурили все возможные пары из этих поварят. Так как из 9 поварят всего можно выбрать 36 пар, то на такое дежурство ушло ровно 9 + + 36 = 45 рабочих дней.

Покажем теперь, как повар сможет определить, кто из поварят дружит между собой, а кто нет. Если оба интересующих нас поваренка A и B были среди первых девяти, то посмотрим на количества пропавших пирожных в такие три дня: когда дежурил A, когда дежурил B и когда A и B дежурили вместе. Поварята A и B не дружат между собой тогда и только тогда, когда количество пирожных, пропавших в третий день, равно сумме количеств пирожных, пропавших в первый и второй дни.

Если теперь мы хотим выяснить, дружат ли между собой поваренок A из первых девяти поварят и десятый поваренок B, то из количества пропавших пирожных в день одиночного дежурства A вычтем количество его друзей среди первых девяти поварят (это количество мы можем определить, как указано выше). Если при этом получится ноль, то A и B не дружат между собой, иначе – дружат.

23. Пусть A, B и C – середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 соответственно. Для доказательства утверждения задачи покажем, что векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны.

Пусть P_1, P_2, …, P_8 – точки касания сферы из условия задачи с гранями многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, а S_1, S_2, …, S_8 – площади соответствующих граней. Обозначим через R радиус этой сферы. Сформулируем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. $S_1\cdot\overrightarrow{OP_1}+S_2\cdot\overrightarrow{OP_2}+\ldots+S_8\cdot\overrightarrow{OP_8}=\vec{0}$.

Утверждение 2. При всех $q=1, 2, \ldots, 8$ имеет место равенство

$$S_q\cdot\overrightarrow{OP_q}=S_{q,1}\cdot\overrightarrow{OA_i}+S_{q,2}\cdot\overrightarrow{OB_j}+\ldots+S_{q,3}\cdot\overrightarrow{OC_k},$$

где P_q – точка касания сферы с гранью $A_iB_jC_k$, $S_{q,1}$, $S_{q,2}$ и $S_{q,3}$ – площади треугольников $P_qB_jC_k$, $A_iP_qC_k$ и $A_iB_jP_q$ соответственно.

По утверждению 1 имеем

$$\vec{w}=S_1\cdot\overrightarrow{OP_1}+S_2\cdot\overrightarrow{OP_2}+\ldots+S_8\cdot\overrightarrow{OP_8}=\vec{0}.$$

С помощью утверждения 2 преобразуем каждое слагаемое этой суммы в сумму вида

$$S_{q,1}\cdot\overrightarrow{OA_i}+S_{q,2}\cdot\overrightarrow{OB_j}+\ldots+S_{q,3}\cdot\overrightarrow{OC_k},$$

а затем сгруппируем коэффициенты при одинаковых векторах. Получим равенство

$$\vec{w}=k_1\cdot\overrightarrow{OA_1}+k_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+l_1\cdot\overrightarrow{OB_1}+l_2\cdot\overrightarrow{OB_2}+m_1\cdot\overrightarrow{OC_1}+m_2\cdot\overrightarrow{OC_2}=\vec{0},$$

где k_1 – сумма площадей треугольников $P_qB_jC_k$, лежащих в одной плоскости с точкой A_1, аналогично определяются остальные коэффициенты. Заметим, что $k_1=k_2$, ведь любые два треугольника вида $P_qB_jC_k$ с общей стороной B_jC_k симметричны друг другу относительно биссекторной плоскости двугранного угла при ребре B_jC_k. Аналогично доказываются равенства $l_1=l_2$ и $m_1=m_2$. Отсюда получаем

$$\vec{w}=k_1\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right)+l_1\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}\right)+m_1\left(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}\right)=$$

$$=2k_1\overrightarrow{OA}+2l_1\overrightarrow{OB}+2m_1\overrightarrow{OC}=\vec{0},$$

где k_1, l_1, m_1 – положительные числа. Следовательно, векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны, а точки O, A, B и C лежат в одной плоскости.

Комментарий. Эта задача является трехмерным аналогом известной планиметрической теоремы Ньютона: *во всяком описанном четырехугольнике середины двух диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.*