Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Я. Альпер, Об $\varepsilon$-энтропии некоторых классов функций,
*Докл. АН СССР*, 1960, том 132, номер 5, 977–979

https://www.mathnet.ru/dan23669

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
12 декабря 2025 г., 15:18:28

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 132, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Я. АЛЬПЕР

# ОБ ε-ЭНТРОПИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 II 1960)*

Пусть $T$ — компактное множество в метрическом пространстве $X$ и $H_\varepsilon(T)$ — ε-энтропия множества $T$, $H_\varepsilon(T) = \lg N_\varepsilon(T)$, где $N_\varepsilon(T)$ — наименьшее число элементов из $X$, образующих ε-сеть для $T$, и логарифм берется по основанию 2. Мы будем пользоваться знаками $\asymp$ и $\sim$ для слабой и сильной эквивалентности, а также знаками $\preccurlyeq$ и $\succcurlyeq$, принятыми в работе ([1]).

Пусть $G$ — конечная односвязная область плоскости $z$ со спрямляемой границей $\Gamma$, параметрическое уравнение которой $z = z(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \leqslant s \leqslant L$, где $s$ — длина дуги на $\Gamma$, отсчитываемая от некоторой точки. Принадлежность кривой $\Gamma$ классу $C_\mu^m$ обозначает, что $x(s)$ и $y(s)$ имеют производные до порядка $m$ включительно для $0 \leqslant s \leqslant L$ и производные порядка $m$ удовлетворяют условию Липшица по $s$ с показателем $\mu$, $0 < \mu \leqslant 1$.

1°. Рассмотрим вопрос об ε-энтропии класса функций, аналитических в области $G$ и непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$ с добавочными условиями о характере непрерывности в $\bar{G}$. Норму функции $f(z)$ определим равенством $\|f\| = \max\limits_{z \in \bar{G}} |f(z)|$.

Лемма 1. *Если граница области $G$ — спрямляемая кривая Жордана и $T_q$ — класс функций, аналитических в области $G$, непрерывных со своими производными до порядка $p$ включительно в $\bar{G}$ и удовлетворяющих условиям*

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant C_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, p), \quad z \in \bar{G}; \tag{1}$$

$$|f^{(p)}(z_1) - f^{(p)}(z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2}$$

*для любых точек $z_1$ и $z_2 \in \Gamma$, $C_k$ и $C$ — заданные константы $> 0$, то*

$$H_\varepsilon(T_q) \preccurlyeq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/q}, \quad q = p + \alpha. \tag{3}$$

Поясняя ход доказательства, определим число $\Delta = (\varepsilon / 2C)^{1/q}$ и рассмотрим значения дуги $s_0 = 0$, $s_r = s_0 + r\Delta$, $r = 0, 1, 2, \ldots, m$, где $m$ таково, что $s_m \leqslant L$, $s_{m+1} > L$; соответствующие точки на $\Gamma$ будут $z_r = z(s_r)$. Положим

$$\beta_r^{(k)}(f) = \left[\frac{f^{(k)}(z_r)}{\varepsilon_k}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p; \quad r = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

где $\varepsilon_k = \dfrac{\varepsilon}{2e\Delta^k}$, $[a + bi] = [a] + [b]i$, и поставим в соответствие функции $f(z) \in T_q$ матрицу $\beta = \|\beta_r^{(k)}\|$.

Дальше используется метод, который применил А. Н. Колмогоров в работе ([1]) (§ 5), но оценка остаточного члена формулы Тэйлора производится с помощью представления его в виде интеграла по контуру Г.

Лемма 2. *Если граница* $\Gamma \in C^1_\mu$, $0 < \mu \leqslant 1$ (*кривая Ляпунова*), *то имеет место оценка снизу*

$$H_\varepsilon(T_q) \geqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/q}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Доказательство можно получить с помощью теоремы 1 из работы ([2]), используя прямую теорему о наилучшем приближении в комплексной области ([3]) и обратную теорему С. Н. Мергеляна ([4]) для области с границей рассматриваемого типа.

Теорема 1. *Если* $\Gamma \in C^1_\mu$, $0 < \alpha < 1$, *то*

$$H_\varepsilon(T_q) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/q}. \tag{5}$$

*В случае* $\alpha = 1$ *справедливо соотношение*

$$\lg H_\varepsilon(T_q) \sim \frac{1}{q} \lg \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6}$$

Заметим, что теорема справедлива при несколько менее ограничительном для Г условии

$$\int_0^c \frac{j(h)}{h} |\lg h| \, dh < \infty,$$

где $j(h)$ — модуль непрерывности функции $z'(s)$.

Справедливы также следующие два утверждения.

Теорема 2. *Если граница области* $G$ — *произвольная гладкая кривая с непрерывно вращающейся касательной и* $0 < \alpha \leqslant 1$, *то*

$$\lg H_\varepsilon(T_q) \sim \frac{1}{q} \lg \frac{1}{\varepsilon}.$$

Теорема 3. *Если граница* Г *области* $G$ — *произвольная спрямляемая кривая Жордана и* $0 < \alpha \leqslant 1$, *то* *

$$\lg H_\varepsilon(T_q) \asymp \lg \frac{1}{\varepsilon}.$$

2°. Рассмотрим вопрос об ε-энтропии для класса обобщенных аналитических функций ([5]). Пусть дано уравнение

$$\frac{dw}{d\bar{z}} = A(z)\, w + B(z)\, \bar{w} = 0, \tag{7}$$

где $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ и $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right)$. Такое уравнение представляет запись в комплексной форме эллиптической системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = cu + dv, \tag{8}$$

коэффициенты которой зависят от $x$ и $y$. Будем говорить, что функция $\Phi(z) \in C^m_\mu(\bar{G})$, если $\Phi(z)$ и все ее частные производные по $x$ и $y$ до порядка $m$ включительно непрерывны в $\bar{G}$ и все частные производные порядка $m$ удовлетворяют в замкнутой области $\bar{G}$ условию Липшица относи-

* Оценка сверху для $H_\varepsilon(T_q)$ следует из леммы 1; оценку снизу можно получить в виде $H_\varepsilon(T_q) \geqslant A\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2p+z}}$.

тельно $z$ с показателем $\mu$, $0 < \mu \leqslant 1$. Норма функции $w(z)$ определяется равенством $\|w\| = \max\limits_{z \in \bar{G}} |w(z)|$.

Теорема 4. *Если* $\Gamma \in C_\alpha^p$, $0 < \alpha < 1$, $A$ *и* $B \in C_\alpha^p(\bar{G})$, *то для класса* $W_q$ *решений* $w(z)$ *уравнения* (7), *удовлетворяющих условиям*

$$|w(z)| \leqslant C_0, \quad \left|\frac{\partial^k w}{\partial x^s \partial y^{k-s}}\right| \leqslant C_k, \quad s = 0, 1, \ldots, k, \quad k = 0, 1, \ldots, p,$$

$z \in \bar{G}$, *и требованию, что константа в условии Липшица с показателем* $\alpha$ *для каждой частной производной* $p$*-го порядка от* $w$ *не превосходит* $C$ ($C_k$ *и* $C > 0$), *справедливо соотношение*

$$H_\varepsilon(W_q) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/q}, \quad q = p + \alpha. \tag{9}$$

*Для* $\alpha = 1$ *имеем*

$$\lg H_\varepsilon(W_q) \sim \frac{1}{q} \lg \frac{1}{\varepsilon}. \tag{10}$$

Заметим, что функции класса $W_q$ удовлетворяют в области $G$ уравнению (7) в классическом смысле.

Оценка сверху основана на принципе максимума модуля для обобщенных аналитических функций: $|f(z)| \leqslant M \max\limits_{z \in \Gamma} |f(z)|$, $z \in G$ (постоянная $M$ зависит только от функций $A$ и $B$) — и на методе А. Н. Колмогорова ([1]). Оценка снизу основана на существовании решения краевой задачи $\operatorname{Re} w(z) = \gamma(z)$ для уравнения (7) с произвольной достаточно гладкой функцией $\gamma(z)$ и на известных теоремах ([5]) о зависимости между характером гладкости $\gamma(z)$ и решения $w(z)$.

3°. Рассмотрим еще вопрос об $\varepsilon$-энтропии класса $V_\mu$ целых аналитических функций $f(z)$, рост которых удовлетворяет условию

$$|f(z)| \leqslant e^{\mu(r)}$$

на окружности $|z| = r$ для всех $r > r_0$, $r_0$ зависит только от $\mu(r)$. Предположим, что $\mu(r) \uparrow \infty$ и $r\mu'(r) \uparrow \infty$ при $r \uparrow \infty$ и выполнено условие $r\mu''(r)[\mu'(r)]^{-1} \geqslant d > -1$ для $r > r_1$; пусть $\|f\| = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$. Обозначим через $r = h(n)$ решение уравнения $z\mu'(r) = n$ и через $q(t)$ — решение уравнения $n \lg h(n) = t$. В обоих случаях достаточно найти асимптотическое решение.

Теорема 5. *Справедливо следующее соотношение*

$$H_\varepsilon(V_\mu) \sim q\left(\lg \frac{1}{\varepsilon}\right) \lg \frac{1}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Если положим, в частности, $\mu(r) = \sigma r^\rho$, то получим результат А. Г. Витушкина ([1])

$$H_\varepsilon(V_\mu) \sim \rho \frac{\left(\lg \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}{\lg \lg \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Если положим $\mu(r) = e^{\sigma r^\rho}$, то будем иметь

$$H_\varepsilon(V_\mu) \sim \rho \frac{\left(\lg \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}{\lg \lg \lg \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ростовский государственный университет

Поступило 25 II 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, УМН, 14, 2(86) (1959). [2] Ю. А. Брудный, А. Ф. Тиман, ДАН, 126, № 5, 931 (1959). [3] С. Я. Альпер, Изв. АН, сер. матем., 19, 423 (1955). [4] С. Н. Мергелян, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 37 (1951). [5] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959.